Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы!»
по математике

Задания заключительного этапа 2025/2026 учебного года для 7-8 классов

---

1. В 9:15 из пункта A вышел пешеход, а в 10:15 вслед за ним отправился велосипедист, который догнал пешехода в 10:30. В какой момент времени нужно было выехать велосипедисту из пункта A, чтобы догнать пешехода в 10:00? (Скорости пешехода и велосипедиста постоянны.)

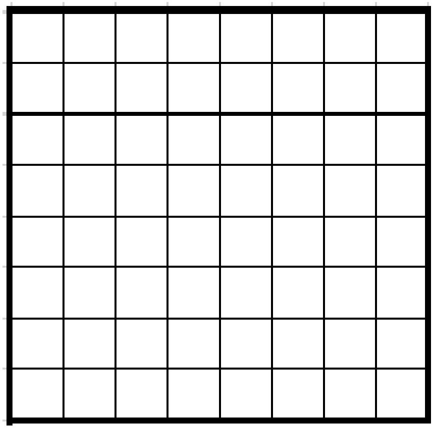
2. Известно, что 4001 – простое число. Найдите все натуральные n, при которых $n(n+4001)$ является квадратом натурального числа.

3. Известно, что $26! = \overline{4032914611266056355abcd0000}$. Найдите цифры, которые заменили на буквы a, b, c, d.

Замечание: разным буквам могут соответствовать одинаковые цифры.

4. На доске были написаны некоторые целые числа. На каждом шаге мы выбираем числа a и b и заменяем их на числа $5a - 3b$ и $7a - 5b$. Вначале на доске были записаны числа 15, 16, 17, …, 40. Можно ли через конечное число шагов получить на доске числа 2001, 2002, 2003, …, 2026?

5. Пете надо разрезать квадрат размера 8×8 (см. рис.) на несколько одинаковых восьмиугольников (не обязательно выпуклых). Разрезы можно проводить только по линиям сетки. Какое наибольшее количество 8-угольников может получиться?



6. В городской парк прибыли 49 волонтеров для уборки мусора. Они разбились на две группы, каждая группа собрала одинаковое количество мусора. Обе группы начали сбор мусора одновременно, но первая группа закончила на 1 час позже второй. Каждая группа делала перерыв на обед, известно, что во второй группе перерыв занял не менее 1 часа, но не более 1 ч. 20 мин. Если бы первая группа работала без перерыва, то она собрала бы в $1\frac{3}{4}$ раз больше мусора. Если бы вторая группа работала без перерыва, она собрала бы в $1\frac{2}{3}$ раз больше мусора. Сколько человек было в первой группе? Производительность всех волонтеров (количество собранного мусора в час) считать одинаковой.

Ответы и решения

1. Ответ: в 9:51.

Решение. К моменту времени 10:30 они преодолели одинаковое расстояние, при этом пешеход шел 75 минут, а велосипедист ехал 15 минут. Значит, скорость велосипедиста в 5 раза выше.

К моменту времени 10:00 пешеход находится в пути 45 минут. Значит, чтобы его догнать, велосипедисту нужно 45 : 5 = 9 минут, то есть он должен выехать в 9:51.

2. Ответ: n = 4 000 000.

Решение. Обозначим $p = 4001, m^2 = n \cdot (n + p) \Rightarrow m^2 - n^2 = pn$.

Рассмотрим два случая:

а) $m - n ⋮ p \Rightarrow m = n + ap$.

Подставим в уравнение: $ap(2n + ap) = pn \Rightarrow\ a(2n + ap) = n$. Равенство невозможно, так как левая часть $a(2n + ap) > n$. Противоречие.

б) $m + n ⋮ p \Rightarrow m = ap - n$.

Подставим в уравнение: $ap(ap - 2n) = pn \Rightarrow\ a(ap - 2n) = n$.

Значит, $n ⋮ a,$ и обозначив $n = ab$, получаем: $a^2p - 2a^2b = ab \Rightarrow ap - 2ab - b = 0$. Умножим на два и прибавим p к обеим частям $2ap - 4ab - 2b + p\ = p \Rightarrow 2a(p - 2b) + (p - 2b) = p \Rightarrow (2a + 1)(p - 2b) = p.$ Один из сомножителей должен быть равен $p,$ и так как $p - 2b < p$, то $2a + 1 = p,\ p - 2b = 1 \Rightarrow a = b = \frac{p-1}{2}$.

Значит, $n = \frac{(p-1)^2}{4}, m = \frac{p^2-1}{4}$. Подставив $p = 4001$, получаем ответ.

3. Ответ: Решений нет.

Решение. В произведение 26! множитель 5 входит 6 раз: в 5, 10, 15, 20 – по одному, в 25 – два раза. Следовательно, 26! оканчивается на шесть нулей. Поэтому две последние отсутствующие цифры есть 0 и 0.

Число 26! должно делиться на все целые числа от 1 до 26 и, так как 26 > 11, то оно обязано делиться на 9 и на 11. Обозначим две левые отсутствующие цифры через a и b и запишем признаки делимости на 9 и на 11:

$$4 + 0 + 3 + 2 + 9 + 4 + 1 + 6 + 1 + 1 + 2 + 6 + 6 + 0 + 5 + 6 + 3 + 5 + 5 + a + b ⋮ 9,$$

$$4 - 0 + 3 - 2 + 9 - 4 + 1 - 6 + 1 - 1 + 2 - 6 + 6 - 0 + 5 - 6 + 3 - 5 + 5 - a + b ⋮ 11.$$

Поэтому $(69 + a + b) ⋮ 9 \Rightarrow (6 + a + b) ⋮ 9, (9 - a + b) ⋮ 11$.

Отсюда $a + b = 3$ или 12, $a - b = 9$ или -2.

Так как $(a + b)$ и $(a - b)$ имеют одинаковую четность, то возможны два случая:

1) $\begin{cases} a+b=3, \\ a-b=9 \end{cases} \Rightarrow a=6, b=-3$ – не подходит; 2) $\begin{cases} a+b=12, \\ a-b=-2 \end{cases} \Rightarrow a=5, b=7.$

Значит, отсутствующие цифры: 5, 7, 0, 0. И наше число поэтому, казалось бы, равно $\overline{403294161126605635557000000}$.

Однако, если мы разделим это число на $1000000 = 2^6 \cdot 5^6$, то получим нечетное число (оно оканчивается на 7). Это означает, что множитель 2 входит в наше число всего 6 раз, что конечно же очень мало, так как в 26! входят в качестве сомножителей числа 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26 – легко посчитать, что здесь должно быть 23 «двойки» – гораздо больше, чем 6.

Что означает этот факт? Так как наши рассуждения о делимости на 10, 9, 11 были верными, то это может означать только то, что написанное в условии задачи число неверное. Поэтому, ответ: не существует таких *a*, *b*, *c*, *d*, при которых данное число равно 26!

К такому же результату можно прийти, проанализировав делимость полученного числа $\overline{403294161126605635557000000}$ на любое из чисел 7, 13, 17, 19, 23. Можно было даже «честно» посчитать произведение 26!, перемножив числа от 1 до 26 (это очень трудоемко, но возможно). Тогда отсутствующие цифры будут 8, 4, 0, 0. Однако окажется, что начальные цифры в числе 26! равны 40329146… (6-я и 7-я цифры будут расположены в другом порядке).

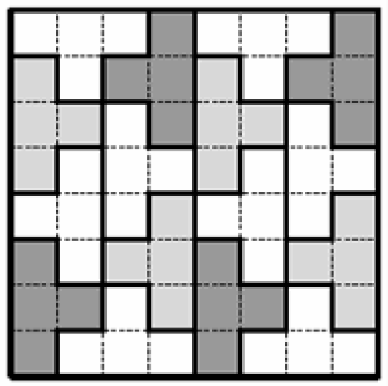
Хотя правильный ответ в этой задаче «Решений нет», было решено засчитывать эту задачу не только тем, кто обоснованно получил такой ответ, но и тем, кто обоснованно получил ответ 5, 7, 0, 0 (ведь они исходили из того, что им в условии задачи предложили правильное число), а также тем, кто перемножив 26 чисел, получил в конце цифры 8, 4, 0, 0 (именно они имеются в числе 26!).

4. Ответ: Нет.

Решение. Легко убедиться в справедливости следующих утверждений:

- Если *a* и *b* кратны 5, то и $a' = 5a - 3b$, и $b' = 7a - 5b$ – оба кратны 5.
- Если среди чисел *a* и *b* только одно кратно 5, то и среди чисел a' и b' только одно кратно 5.
- Если среди чисел *a* и *b* нет кратных 5, то и среди чисел a' и b' нет кратных 5.

Но, поскольку в последовательности 15, 16, 17, …, 40 имеется 6 чисел кратных 5, а в последовательности 2001, 2002, 2003, …, 2026 всего только 5 чисел кратных 5, то это невозможно.



5. Ответ: 16.

Решение. Если разрезы идут по линиям сетки, то каждый восьмиугольник состоит из целого числа клеток, значит 64 должно делиться на это число без остатка. Возможные варианты: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.

Из 1 или 2 клеточек нельзя составить восьмиугольник.

Из 4 клеточек можно составить, расположив их в форме буквы «Т». Пример разрезания на 16 таких восьмиугольников приведен на рисунке:

6. Ответ: 21 человек.

Решение. Обозначим за n количество людей в первой группе, тогда во второй будет $49-n$.

Обозначим за t время работы второй группы, тогда время работы первой равно $t+1$.

Пусть $p_1,\ p_2$ – длительность перерыва в 1-й и 2-й группе, соответственно.

Запишем систему:

$$\begin{cases} n(t+1-p_1)=(49-n)(t-p_2) \\ \dfrac{t+1}{t+1-p_1}=\dfrac{7}{4} \\ \dfrac{t}{t-p_2}=\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Выразив из второго уравнения $p_1=\frac{3}{7}(t+1)$, из третьего $p_2=\frac{2}{5}t$ и подставив в первое уравнение, получим:

$$n\left(t+1-\frac{3}{7}(t+1)\right)=(49-n)(t-\frac{2}{5}t)$$

$$n\left(\frac{4}{7}(t+1)\right)=\frac{(49-n)3t}{5}$$

$$\frac{\frac{20}{21}(t+1)}{t}=\frac{49-n}{n}$$

$$\frac{20}{21}\left(1+\frac{1}{t}\right)=\frac{49}{n}-1$$

Далее заметим, что

$$p_2\in\left[1,\frac{80}{60}\right]\Rightarrow t\in\left[\frac{5}{2};\frac{10}{3}\right]\Rightarrow 1+\frac{1}{t}\in\left[\frac{13}{10};\frac{7}{5}\right]\Rightarrow\frac{20}{21}\left(1+\frac{1}{t}\right)\in\left[\frac{26}{21};\frac{28}{21}\right].$$

$$\text{Поэтому } \frac{49}{n}\in\left[\frac{47}{21};\frac{49}{21}\right]\Rightarrow n\in\left[21\,;\frac{49\cdot 21}{47}\right].$$

Так как $\frac{49\cdot21}{47}=47\cdot\frac{21}{47}+\frac{2\cdot21}{47}=21+\frac{42}{47}<22$, то $n\ =21$.