

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы!» по математике

Задания заключительного этапа 2025/2026 учебного года для 5-6 классов

1. Решите уравнение:

$$1 - \left(2 - \left(3 - \left(\dots 2024 - \left(2025 - \left(2026 - x \right) \dots \right) \right) \right) \right) = 2026.$$

2. В 9:15 из пункта A вышел пешеход, а в 10:15 вслед за ним отправился велосипедист, который догнал пешехода в 10:30. В какой момент времени нужно было выехать велосипедисту из пункта A , чтобы догнать пешехода в 10:00? (Скорости пешехода и велосипедиста постоянны.)

3. На доске размера 8×8 стоят фишки так, как это показано на рисунке. Можно ли убрать несколько фишек так, чтобы на каждой вертикали и на каждой горизонтали стояла ровно одна фишка?

Укажите в ответе наименьшее число фишек, которое надо убрать, или -1 , если это невозможно сделать.

●		●		●			
●	●	●		●	●	●	
●		●		●			
●		●		●			
		●	●	●		●	●
●		●		●			
	●	●		●	●	●	
●	●		●		●	●	●

4. Известно, что 4001 – простое число. Найдите все натуральные n , при которых $n(n + 4001)$ является квадратом натурального числа.

5. Секретный агент хочет открыть сейф, 8-значный код к которому состоит из восьми различных ненулевых цифр. Ему известно, что на четных позициях стоят четные цифры, а на нечетных позициях – нечетные цифры. Кроме того, сумма чисел, стоящих на четных позициях, равна сумме цифр, стоящих на нечетных позициях.

На набор и проверку одного варианта кода из 8 цифр у агента уходит 30 секунд. Сколько времени ему нужно потратить, чтобы сейф с гарантией открылся?

6. На доске были написаны некоторые целые числа. На каждом шаге мы выбираем числа a и b и заменяем их на числа $5a - 3b$ и $7a - 5b$. Вначале на доске были записаны числа $15, 16, 17, \dots, 40$. Можно ли через конечное число шагов получить на доске числа $2001, 2002, 2003, \dots, 2026$?

Ответы и решения

1. Ответ: 3039.

Решение. После раскрытия скобок получим

$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 2025 - 2026 + x = 2026.$$

Разобьем сумму в левой части на 1013 пар: $(1 - 2) + (3 - 4) + \dots + (2025 - 2026) + x = 2026$. В каждой паре разность равна -1 , значит $-1013 + x = 2026 \Rightarrow x = 3039$.

2. Ответ: в 9:51.

Решение. К моменту времени 10:30 они преодолели одинаковое расстояние, при этом пешеход шел 75 минут, а велосипедист ехал 15 минут. Значит, скорость велосипедиста в 5 раз выше.

К моменту времени 10:00 пешеход находится в пути 45 минут. Значит, чтобы его догнать, велосипедисту нужно $45 : 5 = 9$ минут, то есть он должен выехать в 9:51.

3. Ответ: -1 .

Решение. В 4-х горизонталях, которые выделены желтым, шашки стоят только в 3 столбцах.

Получается, что из шашек, стоящих в соответствующих позициях, мы должны оставить 4 шашки. Но тогда в каком-то из трех соответствующих столбцов будет не менее 2 шашек, что противоречит условию.

●		●		●			
●	●	●		●	●	●	
●		●		●			
●		●		●			
		●	●	●		●	●
●		●		●			
	●	●		●	●	●	
●	●		●		●	●	●

4. Ответ: $n = 4\,000\,000$.

Решение. Обозначим $p = 4001$, $m^2 = n \cdot (n + p) \Rightarrow m^2 - n^2 = pn$.

Рассмотрим два случая:

а) $m - n : p \Rightarrow m = n + ap$.

Подставим в уравнение $ap(2n + ap) = pn \Rightarrow a(2n + ap) = n$. Но левая часть $a(2n + ap) > n$. Противоречие.

б) $m + n : p \Rightarrow m = ap - n$.

Подставим в уравнение $ap(ap - 2n) = pn \Rightarrow a(ap - 2n) = n$.

Следовательно, $n : a$, обозначим $n = ab$ и подставим: $a^2p - 2a^2b = ab \Rightarrow ap - 2ab - b = 0$. Умножим на два и прибавим p к обеим частям $2ap - 4ab - 2b + p = p \Rightarrow 2a(p - 2b) + (p - 2b) = p \Rightarrow (2a + 1)(p - 2b) = p$. Один из сомножителей должен быть равен p , но $p - 2b < p$, следовательно $2a + 1 = p$, $p - 2b = 1 \Rightarrow a = b = \frac{p-1}{2}$.

Значит, $n = \frac{(p-1)^2}{4}$, $m = \frac{p^2-1}{4}$. Подставив $p = 4001$, получаем ответ.

5. Ответ: 288 минут = 4 часа 48 минут.

Решение. Сумма четырех четных ненулевых цифр равна 20, а сумма пяти нечетных цифр равна 25. Значит, в коде не используется цифра 5.

Количество вариантов равно $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 24^2 = 576$.

Затраченное время равно $576 \cdot 30$ секунд = $576 \cdot \frac{1}{2}$ минуты = 288 минут = 4 часа и 48 минут.

6. Ответ: Нет.

Решение. Легко убедиться в справедливости следующих утверждений:

- Если a и b кратны 5, то и $a' = 5a - 3b$, и $b' = 7a - 5b$ – оба кратны 5.
- Если среди чисел a и b только одно кратно 5, то и среди чисел a' и b' только одно кратно 5.
- Если среди чисел a и b нет кратных 5, то и среди чисел a' и b' нет кратных 5.

Но, поскольку в последовательности 15, 16, 17, ..., 40 имеется 6 чисел кратных 5, а в последовательности 2001, 2002, 2003, ..., 2026 всего только 5 чисел кратных 5, то это невозможно.