Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2025/2026 учебного года

Вариант Е-1

1. Найдите число решений уравнения

$$2^{2\sin x} + 7^{2\sin x} + 1 = 14^{\sin x} + 2^{\sin x} + 7^{\sin x}$$

на отрезке $[-3{,}14;\ 315]$.

2. Уравнение $x^3 + \left(23 + 10\sqrt{3}\right)x = \left(10 + \sqrt{3}\right)x^2 + 23\sqrt{3}$ имеет три корня: a, b и c. Какие значения может принимать объем параллелепипеда со сторонами $a+1, b+1, c+1$?

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, угол A – прямой, $AC = AD$. На стороне AB выбрана точка M так, что MC пересекает BD в точке N, $BM = BN = AD$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $DC = 6$.

4. Таня задумала две такие цифры a и b, что составленное из них двузначное число является простым и произведение двух четырёхзначных чисел $\overline{793a}$ и $\overline{1b09}$ при делении на 11 дает в остатке 1. Определите все возможные значения получающегося простого числа.

5. Петя и Вася играют в кубики. За один ход Петя бросает правильный 12-гранник (додекаэдр) с числами $1, 2,\ \dots, 12$ на гранях. За один ход Вася бросает два кубика (гексаэдра) с числами $1, 2, \dots, 6$ на гранях и складывает два выпавших на них числа. Побеждает тот игрок, у кого больше очков. Второй ход делается только в случае равного количества очков. Если победитель опять не выявлен, делается третий ход. После этого игра заканчивается в любом случае.

А) Какова вероятность, что Петя выиграет уже после первого хода?

Б) Какова вероятность того, что победитель так и не будет выявлен?

В) У кого из игроков вероятность выиграть больше, и чему она равна?

6. Вершины треугольника лежат на графике многочлена 2026-й степени. Стороны треугольника меньше 1. Докажите, что любая точка на границе или внутри треугольника лежит на некотором отрезке длиной меньше 1, концы которого лежат на графике этого многочлена.

Апрель 2026 г.

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2025/2026 учебного года

Вариант Е-2

1. Найдите число решений уравнения

$$3^{2\sin x}+5^{2\sin x}+1=15^{\sin x}+3^{\sin x}+5^{\sin x}$$

на отрезке $[-3{,}15;\ 314]$.

2. Уравнение $x^3+\left(22+10\sqrt{2}\right)x=\left(10+\sqrt{2}\right)x^2+22\sqrt{2}$ имеет три корня: a, b и c. Какие значения может принимать объем параллелепипеда со сторонами $a+1, b+1, c+1$?

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, угол D – прямой, $DB=DC$. На стороне AD выбрана точка M так, что MB пересекает AC в точке N, $AM=AN=BD$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $BC=12$.

4. Ваня задумал две такие цифры a и b, что составленное из них двузначное число является простым и произведение двух четырёхзначных чисел $\overline{4a89}$ и $\overline{290b}$ при делении на 11 дает в остатке 1. Определите все возможные значения получающегося простого числа.

5. Аня и Таня играют в кубики. За один ход Аня бросает правильный 12-гранник (додекаэдр) с числами $1, 2,\ \dots, 12$ на гранях. За один ход Таня бросает два кубика (гексаэдра) с числами $1, 2, \dots, 6$ на гранях и складывает два выпавших на них числа. Побеждает тот игрок, у кого больше очков. Второй ход делается только в случае равного количества очков. Если победитель опять не выявлен, делается третий ход. После этого игра заканчивается в любом случае.

А) Какова вероятность, что Аня выиграет уже после первого хода?

Б) Какова вероятность того, что победитель так и не будет выявлен?

В) У кого из игроков вероятность выиграть больше, и чему она равна?

6. Докажите, что для любого треугольника с вершинами на графике многочлена степени 2026 и для любой точки P на границе или внутри этого треугольника найдётся содержащий точку P отрезок с концами на графике, длина которого не превосходит длины наибольшей стороны этого треугольника.

Апрель 2026 г.

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2025/2026 учебного года

Вариант E-3

1. Найдите число решений уравнения

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin x}+\left(\frac{1}{7}\right)^{2\sin x}+1=\left(\frac{1}{14}\right)^{\sin x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}+\left(\frac{1}{7}\right)^{\sin x}$$

на отрезке $[-315;\ 3{,}14]$.

2. Уравнение $x^3+(7+6\sqrt{5})x=(6+\sqrt{5})x^2+7\sqrt{5}$ имеет три корня: *a*, *b* и *c*. Какие значения может принимать объем параллелепипеда со сторонами $a+1, b+1, c+1$?

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, угол D – прямой, $DB=DC$. На стороне AD выбрана точка M так, что MB пересекает AC в точке N, $AM=AN=BD$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $BC=6$.

4. Галя задумала две такие цифры *a* и *b*, что составленное из них двузначное число является простым и произведение двух четырёхзначных чисел $\overline{1a09}$ и $\overline{683b}$ при делении на 11 дает в остатке 1. Определите все возможные значения получающегося простого числа.

5. Макар и Захар играют в кубики. За один ход Макар бросает правильный 12-гранник (додекаэдр) с числами $1, 2, \ldots, 12$ на гранях. За один ход Захар бросает два кубика (гексаэдра) с числами $1, 2, \ldots, 6$ на гранях и складывает два выпавших на них числа. Побеждает тот игрок, у кого больше очков. Второй ход делается только в случае равного количества очков. Если победитель опять не выявлен, делается третий ход. После этого игра заканчивается в любом случае.

А) Какова вероятность, что Макар выиграет уже после первого хода?

Б) Какова вероятность того, что победитель так и не будет выявлен?

В) У кого из игроков вероятность выиграть больше, и чему она равна?

6. Вершины треугольника лежат на графике многочлена 2025-й степени. Стороны треугольника меньше 1. Докажите, что любая точка на границе или внутри треугольника лежит на некотором отрезке длиной меньше 1, концы которого лежат на графике этого многочлена.

Апрель 2026 г.

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2025/2026 учебного года

Вариант Е-4

1. Найдите число решений уравнения

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2\sin x}+\left(\frac{1}{5}\right)^{2\sin x}+1=\left(\frac{1}{15}\right)^{\sin x}+\left(\frac{1}{3}\right)^{\sin x}+\left(\frac{1}{5}\right)^{\sin x}$$

на отрезке $[-314;\ 3{,}15]$.

2. Уравнение $x^3+\left(13+8\sqrt{2}\right)x=\left(8+\sqrt{2}\right)x^2+13\sqrt{2}$ имеет три корня: a, b и c. Какие значения может принимать объем параллелепипеда со сторонами $a+1, b+1, c+1$?

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, угол A – прямой, $AC=AD$. На стороне AB выбрана точка M так, что MC пересекает BD в точке N, $BM=BN=AD$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $DC=12$.

4. Толя задумал две такие цифры a и b, что составленное из них двузначное число является простым и произведение двух четырёхзначных чисел $\overline{180a}$ и $\overline{4b78}$ при делении на 11 дает в остатке 1. Определите все возможные значения получающегося простого числа.

5. Поля и Оля играют в кубики. За один ход Поля бросает правильный 12-гранник (додекаэдр) с числами $1, 2,\ \ldots, 12$ на гранях. За один ход Оля бросает два кубика (гексаэдра) с числами $1, 2, \ldots, 6$ на гранях и складывает два выпавших на них числа. Побеждает тот игрок, у кого больше очков. Второй ход делается только в случае равного количества очков. Если победитель опять не выявлен, делается третий ход. После этого игра заканчивается в любом случае.

А) Какова вероятность, что Поля выиграет уже после первого хода?

Б) Какова вероятность того, что победитель так и не будет выявлен?

В) У кого из игроков вероятность выиграть больше, и чему она равна?

6. Докажите, что для любого треугольника с вершинами на графике многочлена степени 2025 и для любой точки P на границе или внутри этого треугольника найдётся содержащий точку P отрезок с концами на графике, длина которого не превосходит длины наибольшей стороны этого треугольника.

Апрель 2026 г.

Ответы и решения

1-1. Ответ: 101. Решение. Переписав уравнение в виде $(2^t-7^t)^2+(2^t-1)^2+(7^t-1)^2=0$ (здесь $t=\sin x$), получаем, что $2^t=7^t=1,$ то есть имеется единственное решение $t=0$. Значит, $x=\pi n, n\in\mathbb{Z}$.

Так как $-\pi<-3{,}14<0$ и $100\pi<315<101\pi$ (ввиду того, что $3{,}14<\pi<3{,}15$ и $\frac{315}{101}<3{,}12$), то на данный отрезок попадают корни при $n=0,1,2,\ \ldots,100$ – всего 101 корень.

1-2. Ответ: 101.

1-3. Ответ: 101.

1-4. Ответ: 101.

2-1. Ответ: $\left(0;\ 34\left(\sqrt{3}+1\right)\right]$.

Решение. Среди всех параллелепипедов с заданной длиной сторон максимальный объем имеет прямоугольный параллелепипед. При изменении углов между сторонами объем может стать сколь угодно малым, принимая все промежуточные значения.

Объем прямоугольного параллелепипеда равен

$$(a+1)(b+1)(c+1)=abc+(ab+bc+ac)+(a+b+c)+1.$$

По теореме Виета для многочленов корни a, b и c уравнения

$$x^3-\left(10+\sqrt{3}\right)x^2+\left(23+10\sqrt{3}\right)x-23\sqrt{3}=0$$

удовлетворяют соотношениям $a+b+c=10+\sqrt{3}$, $ab+bc+ac=23+10\sqrt{3}$, $abc=23\sqrt{3}$.

Поэтому объем прямоугольного параллелепипеда равен $23\sqrt{3}+23+10\sqrt{3}+10+\sqrt{3}+1=34+34\sqrt{3}$. Значит, объем может принимать значения $\left(0;\ 34\left(\sqrt{3}+1\right)\right]$.

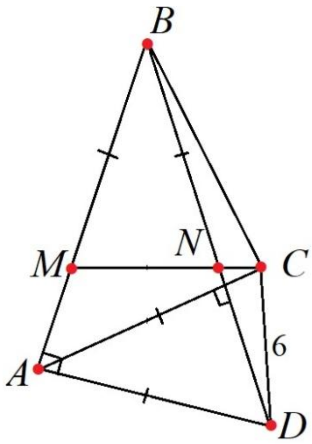
Заметим, что можно было, вместо этого, искать корни уравнения (это $\sqrt{3}$ и $5\pm\sqrt{2}$), но это более сложно и трудоемко.

2-2. Ответ: $\left(0;\ 33\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$.

2-3. Ответ: $\left(0;\ 14\left(\sqrt{5}+1\right)\right]$.

2-4. Ответ: $\left(0;\ 22\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$.

3-1. Ответ: 75.



Решение. Так как углы ABD и CAD равны (два острых угла с соответственно перпендикулярными сторонами), то $\Delta MBN = \Delta DAC$. Обозначим в этих треугольниках $BM = BN = AD = AC = a$, $\angle MBN = \angle DAC = 2\alpha$. Тогда $\angle AMC = 90° + \alpha$, $\angle MCA = 90° - \angle DNC = 90° - \angle MNB = \alpha$, и по теореме синусов в ΔAMC:

$$\frac{AM}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin(90° + \alpha)} \Leftrightarrow AM = a \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Тогда $AD = AB \cdot \operatorname{tg} 2\alpha \Leftrightarrow a = (a + AM) \cdot \operatorname{tg} 2\alpha \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 = (1 + \operatorname{tg}\alpha) \cdot \operatorname{tg} 2\alpha \Leftrightarrow \frac{(1 + \operatorname{tg}\alpha) \cdot 2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}.$$

Значит, высота в ΔDAC, проведенная из вершины A, равна 9, $AD = a = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$.

Тогда $AB = AM + MB = \sqrt{10} + 3\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$. Диагонали четырехугольника равны $AC = a = 3\sqrt{10}$, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{16 \cdot 10 + 9 \cdot 10} = 5\sqrt{10}$. Поэтому $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 75$.

3-2. Ответ: 300.

3-3. Ответ: 75.

3-4. Ответ: 300.

4-1. Ответ: 47 или 61.

Решение. Так как остаток от деления числа $\overline{abcd}$ на 11 равен остатку от деления на 11 знакопеременной суммы его цифр: $d - c + b - a$ (этот факт легко получить, если вспомнить признак делимости на 11 и его доказательство), то при делении на 11 число $\overline{793a}$ имеет остаток $(a - 1)$, а число $\overline{1b09}$ имеет остаток $(b + 8)$. Значит, произведение $(a - 1)(b + 8)$ при делении на 11 имеет тот же остаток, что и произведение исходных четырехзначных чисел.

Так как a и b цифры, то $a-1 \in [-1; 8], b+8 \in [8; 17]$. При этом произведение $(a-1)\cdot(b+8)$ должно давать остаток 1 при делении на 11, а значит, оно может быть равно одному из чисел -10, 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100, 111, 122, 133.

Подходящие варианты:

$a-1$	$b+8$	$(a-1)(b+8)$	$(a; b)$	Числа
-1	10	-10	(0; 2)	2; 20
1	12	12	(2; 4)	24; 42
2	17	34	(3; 9)	39; 93
5	9	45	(6; 1)	61; 16
3	15	45	(4; 7)	47; 74
4	14	56	(5; 6)	56; 65
7	8	56	(8; 0)	80; 8
6	13	78	(7; 5)	75; 57

Простыми двузначными являются два числа 61 и 47.

4-2. Ответ: . 19 или 23.

4-3. Ответ: 47 или 61.

4-4. Ответ: 19 или 23.

5-1. Ответ: А) 5/12; Б) 1/1728; В) У Васи вероятность больше, она равна 157/288.

Решение. Рассмотрим один ход. Всего имеется $12 \cdot 36$ различных равновероятных исходов бросков. В зависимости от числа очков, выпавших у Пети (все эти 12 случаев равновероятны), количество исходов, при которых у Васи выпадает соответственно или столько же очков, или меньше, или больше, чем у Пети, указано в следующей таблице:

П	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
В = П	k_i	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
В < П	l_i	0	0	1	3	6	10	15	21	26	30	33	35
В > П	m_i	36	35	33	30	26	21	15	10	6	3	1	0

Если отбросить временно первый столбец (соответствующий значению $i=1$), то в этой укороченной таблице:

1) число из любого столбца третьей строки получается суммированием чисел из предыдущих столбцов второй строки, а число четвёртой строки – суммированием чисел из следующих столбцов второй строки;

2) вторая строка симметрична относительно её среднего числа с номером $i = 7$, т.е. $k_{14-i} = k_i$, поскольку каждому исходу (a, b) бросания двух кубиков с суммой $a + b = i$ взаимно-однозначно соответствует «симметричный» исход $(a', b') = (7 - a, 7 - b)$ с суммой $a' + b' = 14 - i$;

3) из первых двух пунктов следует, что третья и четвертая строки также симметричны друг другу относительно 7-го столбца.

Далее, теперь уже в полной таблице:

4) во второй строке сумма чисел равна 36 (поскольку каждый из 36 исходов (a, b) бросания двух кубиков учтён ровно здесь один раз – в столбце с соответствующим значением суммы $a + b = i$);

5) сумма чисел S четвёртой строки, из-за числа 36 в её самом первом столбце, на 36 больше, чем в третьей, поэтому она больше сумм чисел как второй, так и третьей строки, а сумма чисел всех трёх этих строк равна

$$12 \cdot 36 = 36 + (S - 36) + S = 2S \;\Rightarrow\; S = 6 \cdot 36.$$

Таким образом, четвертая строка содержит в точности 1/2 всех исходов, третья – 5/12, а вторая – 1/12. Последние три числа как раз и совпадают с вероятностями Васиного выигрыша, проигрыша и ничьей соответственно.

Таким образом, после первого хода вероятность выигрыша Васи равна 1/2, а вероятность выигрыша Пети равна 5/12.

Вероятность ничьей после 3-х ходов равна

$$\left(\frac{1}{12}\right)^3 = \frac{1}{1728}.$$

В итоге Вася выиграет с вероятностью

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{144 + 12 + 1}{12 \cdot 12} = \frac{157}{288}.$$

Петя выиграет с вероятностью

$$\frac{5}{12} + \frac{1}{12} \cdot \frac{5}{12} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{12} \cdot \frac{144 + 12 + 1}{12 \cdot 12} = \frac{785}{1728}.$$

Вероятность выигрыша больше у Васи, так как

$$\frac{157}{288} = \frac{942}{1728} > \frac{785}{1728}.$$

Легко убедиться, что сумма последних трех вероятностей равна 1.

Заметим, что в условии задачи в вопросе Б стоял лишний предлог НЕ, в результате чего этот вопрос задачи мог трактоваться неоднозначно. Засчитывались, как правильные, решения с любой возможной трактовкой вопроса Б.

5-2. Ответ: А) 5/12; Б) 1/1728; В) У Тани вероятность больше, она равна 157/288.

5-3. Ответ: А) 5/12; Б) 1/1728; В) У Захара вероятность больше, она равна 157/288.

5-4. Ответ: А) 5/12; Б) 1/1728; В) У Оли вероятность больше, она равна 157/288.

6-1. Лемма. Если точки $\left(a; P(a)\right)$ и $\left(b; P(b)\right)$ графика многочлена лежат по разные стороны от прямой $y = kx + d$, то в полосе между прямыми $x = a$ и $x = b$ график и прямая имеет хотя бы одну общую точку (пересекаются); таких точек – конечное число.

Доказательство леммы. Пусть $Q(x) = P(x) - (kx + d)$. Тогда Q — многочлен, который принимает в точках a и b значения разных знаков. Так как многочлен непрерывен на всей числовой прямой, то Q имеет в интервале $(a; b)$ хотя бы один корень, то есть $Q(c) = 0$ или $P(c) = kc + d$. Значит, $(c; P(c))$ — точка пересечения. Число таких точек конечно, так как многочлен Q имеет конечное число корней. Лемма доказана.

Абсциссы вершин треугольника попарно различны, так как всякому значению переменной x соответствует только одно значение $P(x)$. Обозначим A, B, C эти точки так, чтобы $x_A < x_C < x_B$. Для точки на стороне треугольника утверждение задачи очевидно.

Рассмотрим точку D внутри треугольника и случай, когда $x_A < x_D \leq x_C$; случай $x_C < x_D \leq x_B$ рассматривается аналогично. Через D проведем прямую $l \parallel AB$. Применим лемму к многочлену, к прямой l, и к отрезкам $[x_A; x_C]$ и $[x_C; x_B]$. Найдём точки E и F пересечения графика и прямой l такие, что $x_A < x_E < x_C$, $x_C < x_F < x_B$. Так как таких точек конечное число, то можно считать, что E – это точка с наименьшей абсциссой. Тогда при $x_A < x < x_E$ график лежит относительно l по ту же сторону, что и вершина A.

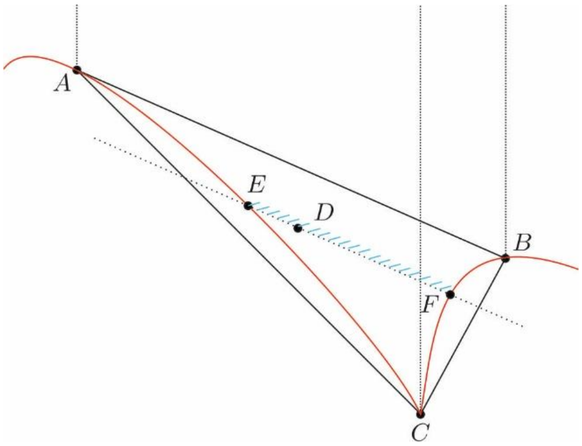


Рис. 1

Если $D \in [E; F]$, см. рис 1, то утверждение задачи верно, так как $[E; F]$ можно параллельно сдвинуть в сторону AB, длиной меньше 1.

Значит, $|EF| \leq |AB| < 1$.

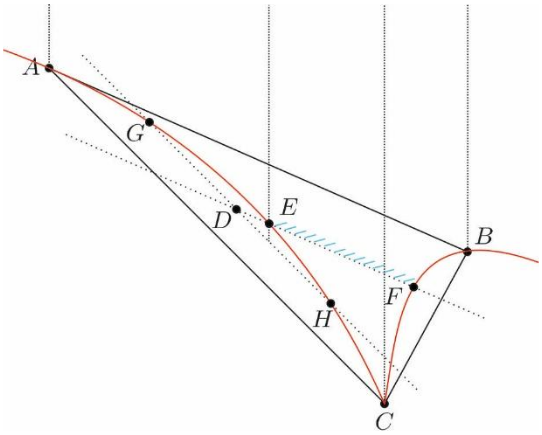


Рис. 2

Если D не принадлежит $[E; F]$, см. рис 2, то $x_D < x_E$. Проведём через D прямую $m \parallel AC$. Теперь применим лемму к прямой m и отрезкам $[x_A; x_E]$,$[x_E; x_C]$. Найдём точки G и H пересечения графика и прямой m такие, что $x_A < x_G < x_E$, $x_E < x_H < x_C$. Тогда $D \in [G; H]$, а отрезок $[G; H]$ можно параллельно сдвинуть в сторону AC.

Значит, $|GH| \leq |AC| < 1$.