Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 10 классы. Заключительный этап 2025/2026 учебного года

Вариант 10Е-1

1. Найдите число решений уравнения

$$2^{2\sin x} + 7^{2\sin x} + 1 = 14^{\sin x} + 2^{\sin x} + 7^{\sin x}$$

на отрезке $[-3{,}14;\ 315]$.

2. Уравнение $x^3 + (23 + 10\sqrt{3})x = (10 + \sqrt{3})x^2 + 23\sqrt{3}$ имеет три корня: a, b и c. Какие значения может принимать объем параллелепипеда со сторонами $a+1, b+1, c+1$?

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, угол A – прямой, $AC = AD$. На стороне AB выбрана точка M так, что MC пересекает BD в точке N, $BM = BN = AD$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $DC = 6$.

4. Таня задумала две такие цифры a и b, что составленное из них двузначное число является простым и произведение двух четырёхзначных чисел $\overline{793a}$ и $\overline{1b09}$ при делении на 11 дает в остатке 1. Определите все возможные значения получающегося простого числа.

5. На доске написаны некоторые целые числа. На каждом шаге мы выбираем числа a и b и заменяем их на числа $5a - 3b$ и $7a - 5b$. Вначале были записаны числа 15, 16, 17, …, 40. Можно ли через конечное число шагов получить на доске числа 2001, 2002, 2003, …, 2026?

6. Петя и Вася играют в кубики. За один ход Петя бросает правильный 12-гранник (додекаэдр) с числами $1, 2, \ldots, 12$ на гранях. За один ход Вася бросает два кубика (гексаэдра) с числами $1, 2, \ldots, 6$ на гранях и складывает два выпавших на них числа. Побеждает тот игрок, у кого больше очков. Второй ход делается только в случае равного количества очков. Если победитель опять не выявлен, делается третий ход. После этого игра заканчивается в любом случае.

А) Какова вероятность, что Петя выиграет уже после первого хода?

Б) Какова вероятность того, что победитель так и не будет выявлен?

В) У кого из игроков вероятность выиграть больше, и чему она равна?

Апрель 2026 г.

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 10 классы. Заключительный этап 2025/2026 учебного года

Вариант 10Е-2

1. Найдите число решений уравнения

$$3^{2\sin x} + 5^{2\sin x} + 1 = 15^{\sin x} + 3^{\sin x} + 5^{\sin x}$$

на отрезке $[-3{,}15;\ 314]$.

2. Уравнение $x^3 + (22 + 10\sqrt{2})x = (10 + \sqrt{2})x^2 + 22\sqrt{2}$ имеет три корня: a, b и c. Какие значения может принимать объем параллелепипеда со сторонами $a+1, b+1, c+1$?

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, угол D – прямой, $DB = DC$. На стороне AD выбрана точка M так, что MB пересекает AC в точке N, $AM = AN = BD$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $BC = 12$.

4. Ваня задумал две такие цифры a и b, что составленное из них двузначное число является простым и произведение двух четырёхзначных чисел $\overline{4a89}$ и $\overline{290b}$ при делении на 11 дает в остатке 1. Определите все возможные значения получающегося простого числа.

5. На доске написаны некоторые целые числа. На каждом шаге мы выбираем числа a и b и заменяем их на числа $5a - 3b$ и $7a - 5b$. Вначале были записаны числа 20, 21, 22, …, 45. Можно ли через конечное число шагов получить на доске числа 2001, 2002, 2003, …, 2026?

6. Аня и Таня играют в кубики. За один ход Аня бросает правильный 12-гранник (додекаэдр) с числами $1, 2,\ \ldots, 12$ на гранях. За один ход Таня бросает два кубика (гексаэдра) с числами $1, 2, \ldots, 6$ на гранях и складывает два выпавших на них числа. Побеждает тот игрок, у кого больше очков. Второй ход делается только в случае равного количества очков. Если победитель опять не выявлен, делается третий ход. После этого игра заканчивается в любом случае.

А) Какова вероятность, что Аня выиграет уже после первого хода?

Б) Какова вероятность того, что победитель так и не будет выявлен?

В) У кого из игроков вероятность выиграть больше, и чему она равна?

Апрель 2026 г.

Ответы и решения

1-1. Ответ: 101. Решение. Переписав уравнение в виде $(2^t - 7^t)^2 + (2^t - 1)^2 + (7^t - 1)^2 = 0$ (здесь $t = \sin x$), получаем, что $2^t = 7^t = 1,$ то есть имеется единственное решение $t = 0$. Значит, $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Так как $-\pi < -3{,}14 < 0$ и $100\pi < 315 < 101\pi$ (ввиду того, что $3{,}14 < \pi < 3{,}15$ и $\frac{315}{101} < 3{,}12$), то на данный отрезок попадают корни при $n = 0, 1, 2, \ldots, 100$ – всего 101 корень.

1-2. Ответ: 101.

2-1. Ответ: $\left(0;\ 34\left(\sqrt{3}+1\right)\right]$.

Решение. Среди всех параллелепипедов с заданной длиной сторон максимальный объем имеет прямоугольный параллелепипед. При изменении углов между сторонами объем может стать сколь угодно малым, принимая все промежуточные значения.

Объем прямоугольного параллелепипеда равен

$$(a+1)(b+1)(c+1) = abc + (ab + bc + ac) + (a + b + c) + 1.$$

По теореме Виета для многочленов корни a, b и c уравнения

$$x^3 - \left(10 + \sqrt{3}\right)x^2 + \left(23 + 10\sqrt{3}\right)x - 23\sqrt{3} = 0$$

удовлетворяют соотношениям $a + b + c = 10 + \sqrt{3}$, $ab + bc + ac = 23 + 10\sqrt{3}$, $abc = 23\sqrt{3}$.

Поэтому объем прямоугольного параллелепипеда равен $23\sqrt{3} + 23 + 10\sqrt{3} + 10 + \sqrt{3} + 1 = 34 + 34\sqrt{3}$. Значит, объем может принимать значения $\left(0;\ 34\left(\sqrt{3}+1\right)\right]$.

Заметим, что можно было, вместо этого, искать корни уравнения (это $\sqrt{3}$ и $5 \pm \sqrt{2}$), но это более сложно и трудоемко.

2-2. Ответ: $\left(0;\ 33\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$.

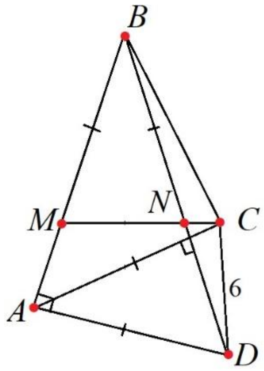
3-1. Ответ: 75.

Решение. Так как углы *ABD* и *CAD* равны (два острых угла с соответственно перпендикулярными сторонами), то $\Delta MBN = \Delta DAC$. Обозначим в этих треугольниках $BM = BN = AD = AC = a$, $\angle MBN = \angle DAC = 2\alpha$. Тогда $\angle AMC = 90° + \alpha$, $\angle MCA = 90° - \angle DNC = 90° - \angle MNB = \alpha$, и по теореме синусов в ΔAMC:

$$\frac{AM}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin(90° + \alpha)} \Leftrightarrow AM = a \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Тогда $AD = AB \cdot \operatorname{tg} 2\alpha \Leftrightarrow a = (a + AM) \cdot \operatorname{tg} 2\alpha \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 = (1 + \operatorname{tg} \alpha) \cdot \operatorname{tg} 2\alpha \Leftrightarrow \frac{(1 + \operatorname{tg} \alpha) \cdot 2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}.$$



Значит, высота в ΔDAC, проведенная из вершины A, равна 9, $AD = a = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$.

Тогда $AB = AM + MB = \sqrt{10} + 3\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$. Диагонали четырехугольника равны $AC = a = 3\sqrt{10}$, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{16 \cdot 10 + 9 \cdot 10} = 5\sqrt{10}$. Поэтому $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 75$.

3-2. Ответ: 300.

4-1. Ответ: 47 или 61.

Решение. Так как остаток от деления числа $\overline{abcd}$ на 11 равен остатку от деления на 11 знакопеременной суммы его цифр: $d - c + b - a$ (этот факт легко получить, если вспомнить признак делимости на 11 и его доказательство), то при делении на 11 число $\overline{793a}$ имеет остаток $(a - 1)$, а число $\overline{1b09}$ имеет остаток $(b + 8)$. Значит, произведение $(a - 1)(b + 8)$ при делении на 11 имеет тот же остаток, что и произведение исходных четырехзначных чисел.

Так как a и b цифры, то $a - 1 \in [-1; 8], b + 8 \in [8; 17]$. При этом произведение $(a - 1) \cdot (b + 8)$ должно давать остаток 1 при делении на 11, а значит, оно может быть равно одному из чисел -10, 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100, 111, 122, 133.

Подходящие варианты:

$a - 1$	$b + 8$	$(a - 1)\ (b + 8)$	$(a; b)$	Числа
-1	10	-10	(0; 2)	2; 20
1	12	12	(2; 4)	24; 42
2	17	34	(3; 9)	39; 93
5	9	45	(6; 1)	61; 16
3	15	45	(4; 7)	47; 74
4	14	56	(5; 6)	56; 65
7	8	56	(8; 0)	80; 8
6	13	78	(7; 5)	75; 57

Простыми двузначными являются два числа 61 и 47.

4-2. Ответ: . 19 или 23.

5-1. Ответ: Нет.

Решение. Легко убедиться в справедливости следующих утверждений:

- Если a и b кратны 5, то и $a' = 5a - 3b$ и $b' = 7a - 5b$ оба кратны 5.
- Если среди чисел a и b только одно кратно 5, то и среди чисел a' и b' только одно кратно 5.
- Если среди чисел a и b нет кратных 5, то и среди чисел a' и b' нет кратных 5.

Но, поскольку в последовательности 15, 16, 17, …, 40 имеется 6 чисел кратных 5, а в последовательности 2001, 2002, 2003, …, 2026 всего только 5 чисел кратных 5, то это невозможно.

5-2. Ответ: Нет.

6-1. Ответ: А) 5/12; Б) 1/1728; В) У Васи вероятность больше, она равна 157/288.

Решение. Рассмотрим один ход. Всего имеется $12 \cdot 36$ различных равновероятных исходов бросков. В зависимости от числа очков, выпавших у Пети (все эти 12 случаев равновероятны), количество исходов, при которых у Васи выпадает соответственно или столько же очков, или меньше, или больше, чем у Пети, указано в следующей таблице:

П	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
В = П	k_i	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
В < П	l_i	0	0	1	3	6	10	15	21	26	30	33	35
В > П	m_i	36	35	33	30	26	21	15	10	6	3	1	0

Если отбросить временно первый столбец (соответствующий значению $i = 1$), то в этой укороченной таблице:

1) число из любого столбца третьей строки получается суммированием чисел из предыдущих столбцов второй строки, а число четвёртой строки – суммированием чисел из следующих столбцов второй строки;

2) вторая строка симметрична относительно её среднего числа с номером $i = 7$, т.е. $k_{14-i} = k_i$, поскольку каждому исходу (a, b) бросания двух кубиков с суммой $a + b = i$ взаимно-однозначно соответствует «симметричный» исход $(a', b') = (7 - a, 7 - b)$ с суммой $a' + b' = 14 - i$;

3) из первых двух пунктов следует, что третья и четвертая строки также симметричны друг другу относительно 7-го столбца.

Далее, теперь уже в полной таблице:

4) во второй строке сумма чисел равна 36 (поскольку каждый из 36 исходов (a, b) бросания двух кубиков учтён ровно здесь один раз – в столбце с соответствующим значением суммы $a + b = i$);

5) сумма чисел S четвёртой строки, из-за числа 36 в её самом первом столбце, на 36 больше, чем в третьей, поэтому она больше сумм чисел как второй, так и третьей строки, а сумма чисел всех трёх этих строк равна

$$12 \cdot 36 = 36 + (S - 36) + S = 2S \;\Rightarrow\; S = 6 \cdot 36.$$

Таким образом, четвертая строка содержит в точности 1/2 всех исходов, третья – 5/12, а вторая – 1/12. Последние три числа как раз и совпадают с вероятностями Васиного выигрыша, проигрыша и ничьей соответственно.

Таким образом, после первого хода вероятность выигрыша Васи равна 1/2, а вероятность выигрыша Пети равна 5/12.

Вероятность ничьей после 3-х ходов равна

$$\left(\frac{1}{12}\right)^3 = \frac{1}{1728}.$$

В итоге Вася выиграет с вероятностью

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{144 + 12 + 1}{12 \cdot 12} = \frac{157}{288}.$$

Петя выиграет с вероятностью

$$\frac{5}{12} + \frac{1}{12} \cdot \frac{5}{12} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{12} \cdot \frac{144 + 12 + 1}{12 \cdot 12} = \frac{785}{1728}.$$

Вероятность выигрыша больше у Васи, так как

$$\frac{157}{288} = \frac{942}{1728} > \frac{785}{1728}.$$

Легко убедиться, что сумма последних трех вероятностей равна 1.

Заметим, что в условии задачи в вопросе Б стоял лишний предлог НЕ, в результате чего этот вопрос задачи мог трактоваться неоднозначно. Засчитывались, как правильные, решения с любой возможной трактовкой вопроса Б.

6-2. Ответ: А) 5/12; Б) 1/1728; В) У Тани вероятность больше, она равна 157/288.