

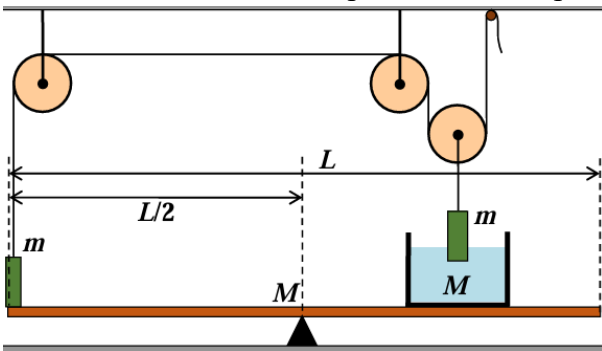
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2025 года
БИЛЕТ № 07 (7,8,9 классы): возможные решения и критерии проверки

Теоретические вопросы: нет ответа – **0 баллов**, есть неверный ответ с частично правильной терминологией – **1 балл**, есть разумные соображения – **2 балла**, в основном все правильно, но есть заметные неточности или ответ неполон – **3 балла**, правильный ответ с мелкими недочетами или недостаточно обоснованный – **4 балла**, полный, правильный и обоснованный ответ – **5 баллов**.

Задание 1:

Вопрос: Небольшой груз подвешен на легкой тонкой нити. Во сколько раз изменится сила натяжения этой нити, если груз опустить в сосуд с водой – так, что он целиком окажется под водой, но не будет касаться дна или стенок сосуда? Плотность материала груза в 5 раз больше плотности воды.

Задача: На длинном горизонтальном рычаге с точкой опоры точно посередине уравновешены небольшой груз массы m , поставленный на один из концов рычага, и сосуд с водой. Масса сосуда (вместе с водой) M равна массе рычага. При этом груз с помощью невесомой нерастяжимой нити и системы легких блоков соединен с таким же грузом, который подвешен так, что немного опущен в воду (см. рисунок). Через специальный зажим плавно выдают нить, увеличивая ее общую длину, и глубина погружения груза увеличивается, но рычаг остается в равновесии. Найдите отношение масс груза и рычага.



На каком расстоянии (в единицах длины рычага) от точки опоры рычага расположен центр дна сосуда?

Ответ на вопрос: В воздухе сила Архимеда, действующая на груз с такой плотностью, пренебрежимо мала, и сила натяжения нити практически равна силе тяжести, то есть $T = mg$. В воде сила натяжения нити равна разности силы тяжести и силы Архимеда, поэтому

$$T' = mg - \rho_{\text{в}} V g = mg \left(1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho} \right) = \frac{4}{5} mg \Rightarrow \frac{T}{T'} = 1,25.$$

Значит, сила натяжения нити после опускания такого груза в воду уменьшится в 1,25 раза.

Решение задачи: Заметим, что рычаг сам по себе находится в равновесии, и условием его равновесия является равенство моментов сил, с которыми на рычаг действуют груз, стоящий на его конце (N_1), и сосуд с водой (N_2). Пусть x – расстояние от точки опоры рычага до центра дна сосуда. Тогда $N_1 \cdot L/2 = N_2 \cdot x$. Груз на конце рычага находится в равновесии, и поэтому сила его взаимодействия с рычагом равна разности сил тяжести и натяжения нити: $N_1 = mg - T$. Аналогично $N_2 = Mg + F_A$, где сила, действующая на сосуд с водой со стороны груза, частично опущенного в воду, равна силе Архимеда, действующей на этот груз со стороны воды. Наконец, равновесие второго груза означает, что $2T = mg - F_A \Rightarrow T = \frac{1}{2} mg - \frac{1}{2} F_A$. Объединяя эти уравнения, получаем условие равновесия рычага в виде

$$\left(\frac{1}{2} mg + \frac{1}{2} F_A \right) \cdot \frac{L}{2} = (Mg + F_A) \cdot x,$$

причем равновесие не нарушается при изменении глубины погружения подвешенного груза (то есть при изменении величины силы Архимеда). Ясно, что это возможно, только если в нашем равенстве независимо равняются друг другу коэффициенты при F_A и слагаемые без F_A . Таким образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} mg \cdot L = Mg \cdot x \\ \frac{1}{4} F_A \cdot L = F_A \cdot x \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{L}{4}, \\ \frac{m}{M} = 1 \end{array} \right.,$$

и все нужные ответы получены.

Ответ: Масса груза равна массе рычага, центр дна сосуда находится на расстоянии $\frac{L}{4}$ от точки опоры.

Критерии для задачи:

№	действие	балл
1	указано, что равновесие рычага соответствует равенству моментов сил, с которыми на рычаг действуют груз, стоящий на его конце (N_1), и сосуд с водой (N_2)	2
2	указано, что эти силы определяются из условия равновесия сил, приложенных к грузу и сосуду	2
3	указано, что сила, действующая со стороны подвешенного груза на сосуд с водой, равна силе Архимеда, действующей на этот груз	3
4	указано, что давление груза на рычаг уменьшается за счет силы натяжения нити	1
5	указано, что блок тянет подвешенный груз вверх с силой $2T$	2
6	правильно записано условие равновесия рычага $N_1 \cdot L/2 = N_2 \cdot x$	2
7	правильно записаны уравнения связи сил давления с F_A и T	$2 \times 2 = 4$
8	получен ответ $m = M$	2
9	получен ответ $x = \frac{L}{4}$	2
Всего		20

Задание 2:

Вопрос: Мокрый снег – смесь жидкой воды и ледяных кристаллов, находящихся в равновесии. Чему равна температура мокрого снега при нормальном атмосферном давлении по шкале Цельсия?

Задача: Калориметр наполовину заполнен водой с температурой 59°C . В него засыпают порцию мокрого снега, объем которой равен объему свободного от воды пространства, а потом ожидают наступления теплового равновесия. Так поступают до тех пор, когда очередная порция снега растает не полностью. Известно, что у используемого снега объемная доля льда составляет 80 %. Сколько порций будет в итоге засыпано в калориметр? На сколько процентов будет заполнен объем калориметра после этого? Теплообменом содержимого калориметра с окружающей средой пренебречь. Плотность льда составляет 90 % от плотности жидкой воды, удельная теплоемкость воды $4,2 \text{ Дж}/(\text{г} \cdot ^\circ\text{C})$, удельная теплота плавления льда $340 \text{ Дж}/\text{г}$.

Ответ на вопрос: Одной из реперных точек шкалы Цельсия, отвечающая 0°C , является температура, при которой лед и вода находятся в равновесии при нормальном атмосферном давлении. Это означает, что температура мокрого снега при таком давлении и есть 0°C .

Решение задачи: Пусть V – объем калориметра, а объем воды в термосе после n досыпаний снега и установления равновесия равен $V_n \equiv x_n \cdot V$. Ясно, что объем досыпаемого в n -ый раз снега равен $\Delta V_n = (1 - x_n) \cdot V$, а его масса $\Delta m_n = (1 - x_n) \cdot [0,8 \cdot 0,9 + 0,2] \rho V = 0,92(1 - x_n) \rho V$. Таким образом, $x_{n+1} = x_n + 0,92 \cdot (1 - x_n) \Rightarrow 1 - x_{n+1} = 0,08 \cdot (1 - x_n)$. Как видно, мы имеем дело с геометрической прогрессией, то есть $(1 - x_n) = (1 - x_0)(0,08)^n = 0,5 \cdot (0,08)^n$, или $x_n = 1 - 0,5 \cdot (0,08)^n$.

Запишем теперь условие установления равновесия после досыпания n -ой порции снега: лед тает, и вода, полученная из снега, нагревается до конечной температуры – все за счет остывания имевшейся в калориметре воды до конечной температуры:

$$c \rho x_n V (t_n - t_{n+1}) = \lambda \cdot 0,8 \cdot 0,9 \rho V (1 - x_n) + c \cdot (0,8 \cdot 0,9 + 0,2) \rho V \cdot t_{n+1}.$$

Разделив это соотношение на $c \rho V$ и перегруппировав слагаемые, получаем

$$y_{n+1} = \frac{x_n y_n - 0,72(1 - x_n)}{0,92 + 0,08 \cdot x_n}$$

где $y_n \equiv \frac{c t_n}{\lambda}$. По условию $x_0 = 0,5$ и $y_0 = \frac{c t_0}{\lambda} = \frac{1239}{1700} \approx 0,7288$. Как видно из полученных формул, заполнение калориметра с ростом n очень быстро приближается к 100 %, а температура содержимого – к 0°C , так что итераций будет немного. Последней итерацией будет та, на которой в соответствии с полученной формулой $y < 0$ (так как это означает, что запаса теплоты у имевшейся воды не хватает на плавление всего льда и нагрев воды из снега до положительной температуры). Итак:

$$x_1 = 0,96, y_1 \approx 0,0045956.$$

$$x_2 = 0,9968, y_2 < 0.$$

Таким образом, в итоге в калориметр будет засыпано две порции мокрого снега, и после установления равновесия калориметр будет заполнен водой на 99,68 % своего объема.

Ответ: Две порции, на 99,68 % объема.

Примечание: Участники не должны выводить общие рекуррентные формулы. Можно использовать последовательное рассмотрение итераций – ясно, что таким путем тоже можно прийти до правильного ответа за не слишком большое время.

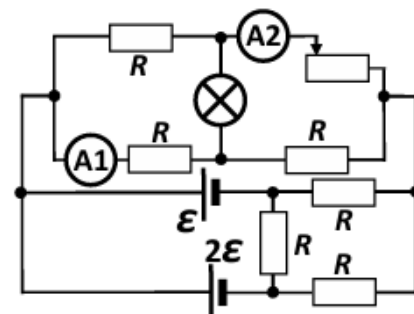
Критерии для задачи:

№	действие	балл
1	указано (используется в решении), что после таяния порции досыпанного снега калориметр заполнен не до конца	1
2	указано, что каждый раз в процессе установления равновесия лед тает, и вода, полученная из снега, нагревается до конечной температуры – все за счет остывания имевшейся в калориметре воды до конечной температуры	3×2=6
3	указано, что последней является итерация, на которой запаса теплоты у имевшейся воды не хватает на плавление всего льда и нагрев воды из снега до положительной температуры	3
4	для всех анализируемых итераций правильно вычислена масса добавляемого снега	2
5	правильно определено, как происходит рост занятого объема на 1-ой и второй итерациях	1+2=3
6	правильно определена температура воды после первой итерации	2
7	доказано, что вторая итерация является последней	3
Всего		20

Задание 3:

Вопрос: Реостат подключили к источнику постоянного напряжения через идеальный амперметр. При сопротивлении реостата 2 Ом сила тока через него равнялась 1,1 А, а при сопротивлении 4 Ом – 0,6 А. Найдите внутреннее сопротивление источника.

Задача: Из нескольких одинаковых резисторов, двух аккумуляторов, двух идеальных амперметров и реостата собрали цепь по схеме, изображенной на рисунке. Сопротивление реостата прямо пропорционально координате его движка по размещенной на реостате шкале. Когда движок находился в положении с координатой x , показания амперметров были $I_1 = 5,7$ А и $I_2 = 1,1$ А. Движок переместили в положение с координатой $x' = 3x$, и показания A1 изменились – теперь стали $I'_1 = 5,6$ А. Каковы теперь показания A2?



Ответ на вопрос: Сопротивление идеального амперметра равно нулю, поэтому ЭДС источника в первом случае равно $\mathcal{E} = 1,1 \text{ А} \cdot (r + 2 \text{ Ом})$, где r – внутреннее сопротивление источника. Во втором случае $\mathcal{E} = 0,6 \text{ А} \cdot (r + 4 \text{ Ом})$. Вычитая эти уравнения находим, что $0 = 0,5 \text{ А} \cdot r - 0,2 \text{ В}$, из которого ясно, что $r = 0,4 \text{ Ом}$.

Решение задачи: Обозначим силы тока через амперметры I_1 и I_2 , а силы параллельных им токов через резисторы – I_3 и I_4 соответственно. Тогда из непрерывности тока следует, что $I_1 + I_3 = I_2 + I_4$. Сопротивление реостата в первом случае можно записать как $\tilde{R} = \beta R \cdot x$ (где, согласно условию, величина β – некоторая постоянная), и тогда, вычисляя напряжение на концах «мостового» участка схемы двумя способами, получаем:

$$R \cdot I_3 + \beta R x \cdot I_2 = R \cdot I_1 + R \cdot I_4 \Rightarrow I_3 + \beta x \cdot I_2 = I_1 + I_4.$$

Вычитая из этого уравнения уравнение непрерывности, приходим к соотношению

$$(\beta x + 1) \cdot I_2 = 2I_1 \Rightarrow \beta x = \frac{2I_1 - I_2}{I_2} = \frac{103}{11}.$$

Аналогичные вычисления для второго случая дают:

$$\left\{ \begin{array}{l} I'_1 + I'_3 = I'_2 + I'_4 \\ R \cdot I'_3 + 3\beta R x \cdot I'_2 = R \cdot I'_1 + R \cdot I'_4 \end{array} \right\} \Rightarrow (3\beta x + 1) \cdot I'_2 = 2I'_1 \Rightarrow I'_2 = \frac{I'_1 I_2}{3I_1 - I_2} = 0,385 \text{ А}.$$

Ответ: $I'_2 = \frac{I'_1 I_2}{3I_1 - I_2} = 0,385 \text{ А.}$

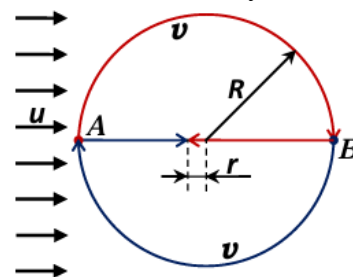
Критерии для задачи:

№	действие	балл
1	указано (используется в решении), что соотношение сил токов через амперметры можно найти по уравнениям баланса напряжений в «мостовой» части схемы и уравнения непрерывности токи в ней же	2×4=8
2	в решении явно используется линейность связи сопротивления реостата с положением его движка	2
3	правильно записана система уравнений, позволяющая найти соотношение сил токов через амперметры	3
4	явно и правильно выражен коэффициент пропорциональности линейной связи (βx или эквивалентная величина)	2
5	получена явная связь сил токов, эквивалентная $I'_2 = \frac{I'_1 I_2}{3I_1 - I_2}$	3
6	получен правильный численный ответ	2
Всего		20

Задание 4:

Вопрос: Пловец пересек прямолинейный участок реки шириной 25 м, двигаясь всегда под углом 30° к берегу, а затем вернулся обратно по тому же пути. Какое время он потратил, если скорость течения была равна 2 м/с, а скорость пловца относительно воды – 3 м/с?

Задача: Два вертолета стартовали одновременно с площадок A и B . Каждый из них сначала пролетел половину окружности радиусом $R = 16$ км (долетев точно до второй площадки), а затем возвращался назад по ее диаметру. В этот день ветер дул от A к B со скоростью, которая была в 8 раз меньше скорости движения каждого из вертолетов относительно воздуха. На каком расстоянии от центра окружности произошла встреча вертолетов?



Ответ на вопрос: При перемещении пловца со скоростью v относительно воды, движущейся относительно берега со скоростью u , скорость его перемещения относительно берега $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{u}$. Чтобы удержаться на заданном курсе относительно берега (под углом α), пловец должен направлять свою скорость под некоторым углом упреждения β к курсу. Если курс таков, что течение «попутное», то

$$\begin{cases} v \cdot \sin(\beta) = u \cdot \sin(\alpha) \\ v' = v \cdot \cos(\beta) + u \cdot \cos(\alpha) \end{cases} \Rightarrow v' = \sqrt{v^2 - u^2 \sin^2(\alpha)} + u \cdot \cos(\alpha).$$

Эту величину иногда называют «курсовой скоростью», или скоростью продвижения по заданному курсу относительно берега. Аналогично для «встречного» течения $v' = \sqrt{v^2 - u^2 \sin^2(\alpha)} - u \cdot \cos(\alpha)$. Поэтому время переправы «туда и обратно»

$$t = \frac{D}{\sin(\alpha) [\sqrt{v^2 - u^2 \sin^2(\alpha)} + u \cdot \cos(\alpha)]} + \frac{D}{\sin(\alpha) [\sqrt{v^2 - u^2 \sin^2(\alpha)} - u \cdot \cos(\alpha)]} = \frac{2D\sqrt{v^2 - u^2 \sin^2(\alpha)}}{\sin(\alpha)(v^2 - u^2)} \approx 56,6 \text{ с.}$$

Решение задачи: Рассмотрим полет первого вертолета от A до B . Скорость его продвижения по полуокружности все время изменяется из-за изменения угла между направлением движения и направлением ветра. Вычислим время, за которое он пролетает маленький участок этой окружности с угловым размером $\Delta\alpha$, касательная к которому направлена под углом α к линии AB (см. рисунок). Воспользовавшись выражением для курсовой скорости, находим, что

$$\Delta t_1 = \frac{R \cdot \Delta\alpha}{\sqrt{v^2 - u^2 \sin^2(\alpha)} + u \cdot \cos(\alpha)}.$$

Полное время полета первого вертолета от A до B равно сумме всех таких времен для всех участков полуокружности. Время полета второго вертолета от B до A по своей полуокружности – это сумма выражений вида

$$\Delta t_2 = \frac{R \cdot \Delta \alpha}{\sqrt{v^2 - u^2 \sin^2(\alpha)} - u \cdot \cos(\alpha)}.$$

Ясно, что $t_2 > t_1$, а их разность

$$t_2 - t_1 = \sum \left[\frac{R \cdot \Delta \alpha}{\sqrt{v^2 - u^2 \sin^2(\alpha)} - u \cdot \cos(\alpha)} - \frac{R \cdot \Delta \alpha}{\sqrt{v^2 - u^2 \sin^2(\alpha)} + u \cdot \cos(\alpha)} \right] = \\ = \frac{2u}{v^2 - u^2} \sum R \cdot \Delta \alpha \cdot \cos(\alpha).$$

Теперь можно заметить, что последняя сумма есть сумма проекций участков полуокружностей на линию АВ, то есть она равна

$$\sum R \cdot \Delta \alpha \cdot \cos(\alpha) = \sum \Delta l \cdot \cos(\alpha) = |AB| = 2R.$$

Тогда ясно, что

$$t_2 - t_1 = \frac{4uR}{v^2 - u^2}.$$

Если мы вычислим разность времен, которые потратят первый и второй вертолет на полеты по прямой (от В до А и от А до В соответственно), то тут мы обнаружим, что дольше летит (против ветра) первый вертолет, и при этом

$$t'_1 - t'_2 = \frac{2R}{v - u} - \frac{2R}{v + u} = \frac{4uR}{v^2 - u^2}.$$

Таким образом, полный маршрут оба вертолета пролетают за одинаковое время (в конечные пункты они прилетают одновременно). Так как в точке встречи они тоже, естественно, находятся одновременно, то время полета первого вертолета от точки встречи до А и время полета второго от точки встречи до В равны, то есть

$$\frac{R - r}{v - u} = \frac{R + r}{v + u} \Rightarrow r = \frac{u}{v} R = \frac{1}{8} R = 2 \text{ км.}$$

Ответ: На расстоянии $r = \frac{u}{v} R = \frac{1}{8} R = 2 \text{ км.}$

Критерии для задачи:

№	действие	балл
1	в решении используется правильная формула для курсовой скорости или правильные эквивалентные выражения	2
2	время полета по полуокружности корректно вычисляется как сумма времен прохождения ее малых участков	5
3	в решении указано, что полное время полета вертолетов одинаково	3
4	записаны явные правильные выражения для t_1 и t_2	2
5	правильно вычислена их разность	1+2=3
6	в решении доказано, что полное время полета вертолетов одинаково	2
7	получен аналитический ответ в виде $r = \frac{u}{v} R = \frac{1}{8} R$	2
8	получен правильный численный ответ	1
Всего		20