ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2025 года

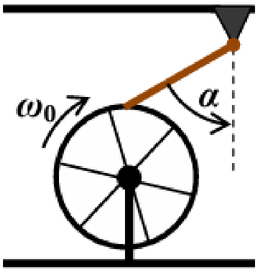
БИЛЕТ № 06 (10 классы): возможные решения и критерии проверки.

Теоретические вопросы: нет ответа – **0 баллов**, есть неверный ответ с частично правильной терминологией – **1 балл**, есть разумные соображения – **2 балла**, в основном все правильно, но есть заметные неточности или ответ неполон – **3 балла**, правильный ответ с мелкими недочетами или недостаточно обоснованный – **4 балла**, полный, правильный и обоснованный ответ – **5 баллов**.

Задание 1:

Вопрос: Однородный тонкостенный цилиндр скатывается без проскальзывания с высоты H в поле тяжести g. Найдите скорость его оси в конце скатывания.

Задача: Вертикальное колесо с тонкостенным ободом массой M (масса спиц и втулки колеса пренебрежимо мала) и радиусом R может вращаться без трения вокруг закрепленной горизонтальной оси, проходящей через его центр. Его раскрутили до угловой скорости ω_0 в направлении, показанном на рисунке, а затем аккуратно опустили на него конец стержня массой m, подвешенного шарнирно за другой конец. Стержень опирается на верхнюю точку обода, трения в шарнире нет, и в этом положении стержень составляет угол $\alpha = 60°$ с вертикалью. Колесо совершило ровно 160 оборотов до полной остановки. Затем опыт повторили, но на этот раз колесо раскрутили до той же угловой скорости в противоположном направлении. Сколько оборотов оно совершит до полной остановки на этот раз? Сопротивлением воздуха пренебречь. Коэффициент трения между концом стержня и поверхностью обода $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$.



Ответ на вопрос: При скатывании без проскальзывания работа силы трения равна нулю, и убыль потенциальной энергии цилиндра в поле тяжести равна его приобретенной кинетической энергии. По теореме Кенига кинетическая энергия цилиндра складывается из энергий поступательного и вращательного движений. В отсутствие проскальзывания скорость движения оси цилиндра радиуса R относительно поверхности связана с угловой скоростью его вращения вокруг оси симметрии, проходящей через центр масс, соотношением $\upsilon = \omega \cdot R$. В тонкостенном цилиндре все его массивные элементы находятся на расстоянии R от оси вращения, и во вращательном движении имеют точно такие же скорости, как и в поступательном. Поэтому учет энергии вращения у такого цилиндра сводится к удвоению кинетической энергии. Следовательно:

$$mgH = 2 \cdot \frac{mv^2}{2} = mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{gH}.$$

Решение задачи: Вращение колеса тормозится силой трения со стороны стержня. Сам стержень при этом находится в равновесии под действием силы тяжести, силы реакции шарнира, силы нормальной реакции колеса и «ответной» силы трения. Последняя до самой остановки является силой трения скольжения, и ее величина равна μN. Обозначим длину стержня L, и для первого опыта запишем для него условие равновесия моментов сил относительно оси шарнира:

$$mg\frac{L}{2}\sin(\alpha) - NL \cdot \sin(\alpha) + \mu NL \cdot \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow F_{mp} = \frac{\mu mg}{2}\frac{\mathrm{tg}(\alpha)}{\mathrm{tg}(\alpha) - \mu}.$$

Колесо остановится, когда работа этой силы заберет у колеса с массой M всю его кинетическую энергию, то есть

$$F_{mp} \cdot 2\pi R \cdot n_1 = \frac{MR^2}{2}\omega_0^2 \Rightarrow n_1 = \frac{MR\omega_0^2}{2\pi\mu mg}\frac{\mathrm{tg}(\alpha) - \mu}{\mathrm{tg}(\alpha)}.$$

Во втором опыте (при изменении направления начального вращения) направления сил трения между колесом и стержнем изменяются на противоположные, и в этих уравнениях изменяется только знак слагаемого с μ. Поэтому в этом случае число оборотов колеса до остановки

$$n_2 = \frac{MR\omega_0^2}{2\pi\mu mg}\frac{\mathrm{tg}(\alpha) + \mu}{\mathrm{tg}(\alpha)} = \frac{\mathrm{tg}(\alpha) + \mu}{\mathrm{tg}(\alpha) - \mu}n_1 = 320.$$

Ответ: Во втором опыте колесо совершит $n_2 = \frac{\mathrm{tg}(\alpha)+\mu}{\mathrm{tg}(\alpha)-\mu}n_1 = 320$ оборотов.

Критерии для задачи:

№	действие	балл
1	указано, что колесо тормозится силой трения о стержень	1
2	указано, что вплоть до остановки это сила трения скольжения	1
3	используются правильные условия равновесия стержня	3
4	правильно описан процесс торможения (записано правильное уравнение ЗСЭ или правильный закон равнозамедленного вращательного движения колеса)	3
5	правильно описаны различия в условиях остановки при разном направлении вращения	2
6	правильно найдена величина силы трения стержня и колеса (через массу, коэффициент трения и угол)	3
7	получено правильное выражение для числа оборотов до остановки в обоих опытах	2×2=4
8	получен правильный аналитический ответ	2
9	получен правильный численный ответ	1
Всего		**20**

Задание 2:

Вопрос: Постоянное количество гелия сначала участвует в изохорном процессе 1-2, в котором его давление увеличивается на 10% от давления в точке 2, а затем в изотермическом процессе 2-3, в котором давление уменьшается ровно на ту же величину. В процессе 1-2 к газу подводится количество теплоты Q_{12} = 333 Дж. Какое количество теплоты подводится к газу в процессе 2-3?

Задача: Допустим, что у нас есть серия тепловых машин, работающих по циклу, состоящему из двух изохор и двух изотерм (рабочее вещество у всех этих машин – один и тот же идеальный газ). Отметим, что у всех машин серии одинаково отношение количества теплоты, подводимого в процессе изохорного нагревания, к работе за цикл. У одной из машин, у которой максимальная температура в цикле в n_1 = 1,5 раза больше минимальной, КПД цикла равно 20%. У другой машины это отношение равно n_2 = 1,8. Найдите КПД ее цикла.

Ответ на вопрос: При изохорном нагревании работа не совершается, и подводимое тепло равно увеличению внутренней энергии. Поскольку гелий можно считать одноатомным идеальным газом, то $Q_{12} = \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = \frac{3}{20}p_2V_1$, или $p_2V_1 = \frac{20}{3}Q_{12}$. В изотермическом процессе внутренняя энергия гелия не изменяется, и подведенное тепло равно работе, которая может быть найдена как площадь криволинейной трапеции. Объем в этом процессе увеличивается во столько же раз (10/9), во сколько уменьшается давление и, если, учитывая относительную малость изменений, приблизить площадь криволинейной трапеции площадью обычной трапеции, то

$$Q_{23} \approx \frac{p_2 + 0{,}9p_2}{2}\left(\frac{10}{9}V_1 - V_1\right) = \frac{19}{180}p_2V_1 = \frac{19}{27}Q_{12} \approx 234 \text{ Дж.}$$

Примечание: Можно было использовать формулу для вычисления работы в изотермическом процессе, но тогда ответ получается в форме

$$Q_{23} = p_2V_1 \cdot \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) = \frac{20}{3}Q_{12} \cdot \ln\left(\frac{10}{9}\right),$$

и аналогичную точность вычисления без калькулятора здесь обеспечить сложнее: например, если воспользоваться приближенной формулой $\ln\left(1 + \frac{1}{9}\right) \approx \frac{1}{9}$, то получится $Q_{23} \approx 247$ Дж. Точное значение $Q_{23} = \frac{20}{3}Q_{12} \cdot \ln\left(\frac{10}{9}\right) \approx 233{,}9$ Дж. Поэтому ответ с логарифмом без вычисления или с «грубой» его оценкой (с ошибкой более 3%) оценивался в 4 балла.

Решение задачи: В описанном цикле теплота подводится к рабочему телу в процессах изохорного нагревания (будем его считать процессом 12) и изотермического расширения (процесс 23). Значит, количество теплоты нагревателя $Q_H = Q_{12} + Q_{23}$. Заметим, что по условию Q_{12} для всех машин связан с полной работой в цикле: $Q_{12} = k \cdot A$, где k – неизвестная константа. С другой стороны, работа в этом цикле совершается только в изотермических процессах, и A равно разности количеств тепла, подведенного в изотермическом расширении и отведенного в изотермическом сжатии. Но работа (и количество тепла) в изотермическом процессе прямо пропорциональна абсолютной температуре, и поэтому $A = Q_{23} + Q_{41} = Q_{23}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, где n – отношение максимальной и минимальной температур. Таким образом, величина, обратная КПД

$$\eta^{-1} = \frac{Q_H}{A} = \frac{Q_{12}}{A} + \frac{Q_{23}}{A} = k + \frac{n}{n-1}.$$

Подставляя в эту формулу известное значение, находим, что 5 = k + 3, то есть k = 2. Следовательно, для всех машин нашей серии $\eta = \frac{n-1}{3n-2}$. В частности, при n_2 = 1,8 получаем $\eta_2 = \frac{4}{17} \approx 23{,}5$ %.

Ответ: $\eta_2 = \frac{n_2-1}{3n_2-2} = \frac{4}{17} \approx 23{,}5$ %.

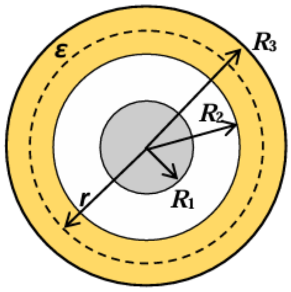
Критерии для задачи:

№	действие	балл
1	указана (используется в решении) правильная классификация процессов в цикле по направлению теплообмена рабочего тела с окружающими телами	2
2	указано, что работа совершается только в изотермических процессах	2
3	используется правильная связь КПД цикла с двумя из трех величин Q_H, Q_X или A	2
4	КПД ищется в виде функции от отношения температур n с неизвестной константой	2
5	константа в зависимости КПД от n определяется по известному значению КПД	2
6	в решении использована связь $Q_{12} = k \cdot A$	2
7	получена правильная связь Q_{23} с A и n	3
8	получено правильное выражение для КПД через n	3
9	получен правильный численный ответ	2
Всего		**20**

Задание 3:

Вопрос: На металлическую сферу радиусом R нанесен заряд $+q$, а на сферу радиусом $2R$ – заряд $-q$. Пространство между сферами заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε. Чему равен потенциал (относительно бесконечности) точки, находящейся на расстоянии $3R/2$ от общего центра сфер?

Задача: Металлический шар радиусом R_1 = 20 см зарядили с помощью источника с ЭДС 120 В (включив источник между «землей» и шаром). Затем его окружили слоем диэлектрика с проницаемостью ε = 4, внутренний радиус которого был равен R_2 = 40 см, а внешний – R_3 = 60 см. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы удалить диэлектрик из области между r = 50 см и R_3 на большое расстояние от шара? Считайте, что работа по разделению этого слоя на мелкие «кусочки» пренебрежимо мала по сравнению с работой по перемещению этих кусочков на большое расстояние.



Ответ на вопрос: Вне большей сферы напряженность поля равна нулю (это сферически-симметричное поле нулевого заряда). Поэтому ее потенциал равен потенциалу бесконечности, то есть нулю в предложенной калибровке. Поле между сферами создается зарядом внутренней сферы, и оно совпадает с полем точечного заряда $+q$ в однородном диэлектрике. Значит, его потенциал может отличается от потенциала точечного заряда в однородном диэлектрике только на постоянную величину: $\varphi(r) = C + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$ при $R \le r \le 2R$. С учетом того, что $\varphi(2R) = C + \frac{q}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon R} = 0$, находим $C = -\frac{q}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$. В итоге получаем, что $\varphi(3R/2) = \frac{q}{6\pi\varepsilon_0\varepsilon R} - \frac{q}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon R} = +\frac{q}{24\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$.

Решение задачи: На базе рассуждений, использованных в ответе на вопрос, мы можем получить и формулу емкости произвольного сферического конденсатора с радиусами обкладок a и b, пространство между которыми заполнено диэлектриком. В самом деле, потенциал внешней обкладки относительно бесконечности равен нулю, и напряжение на конденсаторе равно потенциалу внутренней обкладки $U = \varphi(a) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon b} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{b-a}{ab}$. Тогда емкость такого конденсатора $C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon\frac{ab}{b-a}$, и его энергия

$$W_C = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{b-a}{ab}.$$

Теперь получим выражение для энергии поля системы из заряженного металлического шара с зарядом Q и слоя диэлектрика. Для этого мысленно вставим на радиусах и пары бесконечно тонких и близких сфер с противоположными зарядами $-Q$ и $+Q$. Поскольку мы вставили всюду нулевые заряды, поле не поменялось. Но теперь эту систему можно считать системой трех сферических конденсаторов – образованных шаром и внутренним «вставленным» слоем, вторым и третьим «вставленными» слоями, а также четвертым слоем и бесконечностью. Таким образом,

$$W=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}+\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{R_3-R_2}{R_2R_3}+\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_3}=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left[\frac{\varepsilon}{R_1}-(\varepsilon-1)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right)\right].$$

Теперь ясно, что минимальная возможная работа по удалению диэлектрика в рамках установленных в условиях приближений равна разности энергий конечной и начальной конфигураций. Поскольку

$$W=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left[\frac{\varepsilon}{R_1}-(\varepsilon-1)\left(\frac{1}{2R_1}-\frac{1}{3R_1}\right)\right]=\frac{(5\varepsilon+1)Q^2}{48\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1}.$$

и

$$W'=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left[\frac{\varepsilon}{R_1}-(\varepsilon-1)\left(\frac{1}{2R_1}-\frac{2}{5R_1}\right)\right]=\frac{(9\varepsilon+1)Q^2}{80\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1}.$$

то

$$A_{min}=W'-W=\frac{(\varepsilon-1)Q^2}{120\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1}=\frac{Q^2}{160\pi\varepsilon_0 R_1}.$$

Остается заметить, что заряд шара, заряженного от источника с заданной ЭДС $Q=4\pi\varepsilon_0R_1\mathcal{E}$. Поэтому $A_{min}=\frac{1}{10}\pi\varepsilon_0R_1\mathcal{E}^2$.

Если принять, что $4\pi\varepsilon_0=\frac{1}{9}\cdot10^{-9}$ Кл^2·с/(кг·м^3), то можно получить численный ответ $A_{min}=8$ нДж.

Ответ: $A_{min}=\frac{1}{10}\pi\varepsilon_0R_1\mathcal{E}^2$, или $A_{min}=8$ нДж, или другое правильное аналитическое выражение.

Критерии для задачи:

№	**действие**	**балл**
1	в решении используется правильный способ расчета энергии сферической системы зарядов и слоев диэлектрика (как системы сферических конденсаторов или через энергии самодействия и взаимодействия тел, или через интегрирование плотности энергии)	4
2	минимальная работа вычисляется как разность энергий конечной и начальной конфигураций	3
3	записана (используется в решении) правильная связь заряда шара и ЭДС источника	3
4	получено правильное выражение (через величины радиусов или один радиус и их соотношения, заряд шара или ЭДС источника) для энергии начальной конфигурации	4
5	получено правильное выражение (через величины радиусов или один радиус и их соотношения, заряд шара или ЭДС источника) для энергии конечной конфигурации	4
6	записан правильный аналитический ответ через те же величины **или** правильный численный ответ	2
Всего		**20**

Задание 4:

Вопрос: Определим поперечное увеличение для линз как отношение поперечных по отношению к ГОО (главной оптической оси линзы) размеров изображения и предмета, взятое со знаком «+», если изображение является прямым, и со знаком «–», если перевернутым. Можно ли в этом случае по значению поперечного увеличения определить тип линзы?

Задача: При изучении изображения светящегося шарика диаметром 2 мм, полученного с помощью тонкой линзы, было обнаружено, что расстояние между центрами шарика и изображения равно L = 85 см, причем соединяющий их отрезок не пересекает плоскости линзы и наклонен к ГОО линзы под углом $\alpha=\arcsin\left(\frac{13}{85}\right)\approx 8{,}8°$, а максимальный поперечный размер изображения равен 1,2 мм. Определите тип линзы (собирающая или рассеивающая) и найдите величину ее фокусного расстояния.

Ответ на вопрос: Как легко понять из построения, изображение светящихся предметов (точки которых являются действительными источниками) в рассеивающих линзах всегда прямые и уменьшенные, и для рассеивающих линз введенная алгебраическая величина поперечного увеличения Г изменяется от 0 до +1 (+1 соответствует предмету, «прижатому» к линзе). У собирающих линз прямыми бывают только мнимые изображения предметов, и они всегда увеличенные Г > +1 (за исключением случая прижатого предмета, когда Г = +1). Действительные изображения предметов в собирающих линзах всегда перевернутые, и для них $\Gamma < 0$. Таким образом, по этой величине почти всегда можно определить тип линзы: $\Gamma < 0$ и $\Gamma > +1$ отвечают собирающим линзам (отметим, что сюда формально входят случаи $\Gamma = \pm\infty$, отвечающие приближению предмета к фокальной плоскости линзы, хотя наблюдать изображение в этих случаях невозможно), а $0 < \Gamma < +1$ отвечают рассеивающим линзам. Единственно исключение – это значение $\Gamma = +1$, когда предмет прижат к линзе и она фактически «не работает».

Решение задачи: Как видно из условия, изображение является мнимым (действительный источник и его изображение находятся по одну сторону от линзы) и уменьшенным, а такая комбинация возможна только у рассеивающей линзы. Таким образом, у нас именно рассеивающая линза. Если обозначить a и b расстояния от центра шарика и центра изображения до плоскости линзы, то, в соответствии с данными задачи,

$$\left\{\begin{matrix} a - b = L\cdot\cos(\alpha) = \dfrac{84}{85}L \\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{h}{h'} = \dfrac{5}{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a = \dfrac{h}{h-h'}L\cdot\cos(\alpha) = \dfrac{42}{17}L \\ b = \dfrac{h'}{h-h'}L\cdot\cos(\alpha) = \dfrac{126}{85}L \end{matrix}\right. .$$

Отметим, что заданный угол достаточно мал, и луч, идущий вдоль прямой, соединяющей центр шарика с центром изображения, можно считать параксиальным, и поэтому мы считаем, что он проходит через оптический центр линзы, и действует характерная для тонких линз связь поперечного увеличения с расстояниями до источника и изображения (второе уравнение). В соответствии с формулой линзы ее оптическая сила

$$D \approx \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{(h-h')^2}{hh'L\cdot\cos(\alpha)} = -\frac{17}{63L}.$$

Следовательно, величина фокусного расстояния нашей линзы

$$|F| \approx \frac{hh'L\cdot\cos(\alpha)}{(h-h')^2} = \frac{63}{17}L = 315 \text{ см}.$$

Ответ: Это рассеивающая линза, величина фокусного расстояния $|F| \approx \frac{hh'L\cdot\cos(\alpha)}{(h-h')^2} = \frac{63}{17}L = 315$ см.

Критерии для задачи:

№	действие	балл
1	явно указано, что наблюдаемое изображение является мнимым (**2 балла**) и уменьшенным	2×2=4
2	сделан вывод, что линза является рассеивающей	5
3	явно указано на значение малости угла α	1
4	правильно записано уравнение для расстояний от центра шарика и центра изображения до плоскости линзы (если без проецирования на направление оптической оси – **1 балл**)	2
5	правильно записано уравнение для связи отношения этих расстояний с отношением поперечных размеров (если в решении нет различия между расстояниями вдоль соединяющей прямой и расстояниями вдоль оптической оси – **2 балла)**	3
6	правильно используется формула линзы для нахождения оптической силы или фокусного расстояния	2
7	получен правильный аналитический ответ через данные задачи	2
8	получен правильный численный ответ	1
Всего		**20**