Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заключительного этапа 2024/2025 учебного года для 9 класса

---

1. Назовем год *замечательным*, если номер года делится на сумму двузначных чисел, из которых этот номер составлен. Например, 2025 год – *замечательный*, поскольку 2025 делится на 20 + 25 = 45. Назовите ближайший следующий *замечательный* год?

Ответ: 2035

Решение. Будем искать замечательное число на отрезке [2026; 2099]. Оно может быть записано как $20\overline{ab}$. Если $20\overline{ab}$ делится на $20+\overline{ab}$, значит $20\overline{ab} - (20+\overline{ab}) = 1980$ тоже делится на $20+\overline{ab}$. Также заметим, что должно быть выполнено условие $20+\overline{ab} > 45$, поскольку $\overline{20ab} > 2025$. Итак, задача свелась к нахождению наименьшего делителя 1980, большего 45.

Разложим 1980 на простые множители: $1980 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11$, тогда $20 + \overline{ab} = 2^x 3^y 5^z 11^w$, где x, y, z, w целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условиям $x \le 2, y \le 2, z \le 1, w \le 1$.

Если $w = 1$, то ближайшее к 45 число, кратное 11 – это $20 + \overline{ab} = 55$. Если $w = 0, z = 1$, то ближайшее к 45 число, кратное 5 – это 50, но оно не является делителем 1980 (а следующее число, кратное 5, мы уже рассмотрели ранее). Предположим теперь, что $w = z = 0$. Тогда $20 + \overline{ab} = 2^x 3^y \le 2^2 \times 3^2 = 36 < 45$. Значит, ближайшим является $20 + \overline{ab} = 55$, которому соответствует 2035 год.

Конечно, эту задачу можно было решить просто показав, что числа 2026, 2027, …, 2034 не делятся на 46, 47, …, 54 соответственно, а число 2035 делится на 55. Но это должен быть полный перебор, и он поэтому достаточно громоздок.

2. Дана доска 5 × 5, в каждой из 25 клеточек которой стоит либо 0, либо 1. Никакие 3 единицы не могут стоять в подряд идущих клетках по горизонтали, по вертикали или по диагонали. Какое наибольшее число единиц может быть на доске?

Ответ: 16.

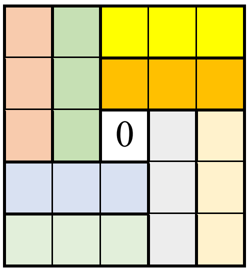
Решение. Во-первых, 16 единиц возможно (см. рис.):

1	1	0	1	1
1	1	0	1	1
0	0	0	0	0
1	1	0	1	1

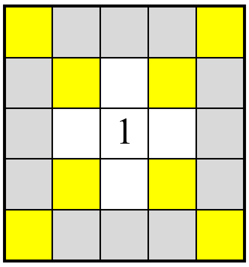
1	1	0	1	1

Докажем, что больше невозможно. Рассмотрим два случая:

1) В центре стоит 0. Тогда в каждом прямоугольнике 1 × 3 стоит не более 2 единиц, и поэтому единиц будет не более 16.



2) В центре стоит единица.

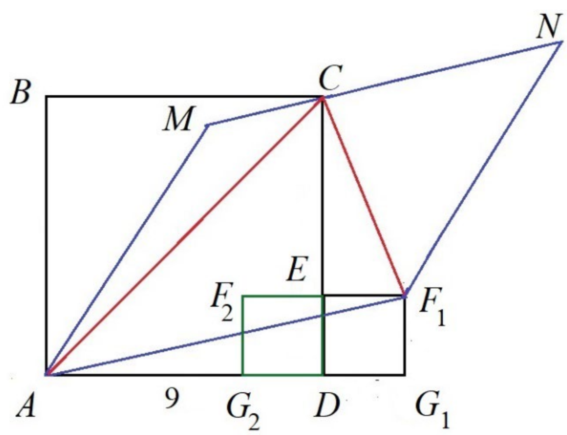


Тогда на каждой из двух желтых диагоналей может быть не более 2 единиц и в каждом сером прямоугольнике – не более 2 единиц, и в центральном белом «кресте» тоже не более 2 единиц, не считая центральной. Итого не более 2 + 2 + 4 × 2 + 2 + 1 = 15 < 16.

3. Квадрат *ABCD* со стороной 9 и квадрат *DEFG* со стороной π имеют общую вершину *D*, при этом точка *E* лежит на отрезке *CD*. Найдите наибольшее возможное значение площади параллелограмма *AMNF*, если точка *C* лежит на отрезке *MN* и делит его в отношении 1 : π.

Ответ: 81.

Решение. Возможны две разные конфигурации, в зависимости от того, где лежит точка *F*: вне большого квадрата или внутри него.



Площадь параллелограмма *AMNF* равна удвоенной площади треугольника *ACF*, площадь которого можно найти после некоторых вычислений (с использованием тригонометрии или без нее).

При этом в первом случае (см. рисунок) есть эффектный способ решения: площадь ΔACF_1 равна площади ΔACD (эти треугольники имеют одинаковое основание *AC* и равные высоты, так как $DF_1 \parallel AC$) и равна поэтому половине площади большого квадрата. Значит, площадь параллелограмма равна площади квадрата $ABCD$, то есть $9^2 = 81$.

Если же точка F лежит внутри большого квадрата, то нахождение площади более громоздко. Однако в нем нет необходимости, так как в этом случае площадь параллелограмма заведомо меньше 81, так как точка F_2 теперь находится внутри треугольника ACD, и поэтому площадь треугольника ACF_2 меньше площади треугольника ACD, площадь которого равна половине площади большого квадрата.

Заметим, что сторона меньшего квадрата и отношение $MC : CN$ могли использоваться при решении задачи другими способами, но на ответ в итоге не влияют.

4. При каких положительных значениях a и b достигается наибольшее значение следующего выражения?

$$\frac{ab}{(1+a)(a+b)(b+8)}$$

Ответ: $a = 2, b = 4$.

Решение. Максимум исходного выражения соответствует минимуму выражения

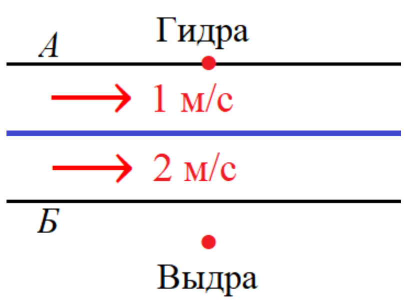
$$\frac{(1+a)(a+b)(b+8)}{ab}.$$

Зафиксируем b, будем искать минимум $\frac{(1+a)(a+b)}{a} = a + \frac{b}{a} + (1+b)$. Так как $a + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{b}{a}}$, то минимум достигается при $a = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{b}$.

Аналогично, если зафиксировать a, то получим $b = \sqrt{8a}$.

Решим систему $\begin{cases} a^2 = b \\ b^2 = 8a \end{cases}$, получим $a = 2, b = 4$.

5. У канала шириной 20 метров от берега *А* до середины вода течёт со скоростью 1 м/сек, а после середины до берега *Б* скорость течения удваивается. На берегу *А* у воды сидит Гидра. Напротив, на расстоянии 7 метров от берега *Б*, сидит её подруга Выдра. Они одновременно бросаются навстречу друг другу – Гидра со скоростью 1 м/сек, а Выдра со скоростью *V* (и на суше, и в воде) Они обе держат путь перпендикулярно каналу, но вода, конечно, будет сносить их в сторону. Найдите скорость *V*, при которой встреча подруг произойдет как можно ближе к середине канала.



Ответ: *V* = 1.4.

Решение. На самом деле вопрос с подвохом – при неправильном выборе v подруги разминутся, и нужно найти такую скорость, чтобы встреча хоть как-то состоялась.

Действительно, давайте представим, что канал заполнен двумя рядами тонких брёвен – брёвна длиной по 10 метров и повёрнуты поперёк течения. Верхний ряд брёвен движется со скоростью 1 метр в секунду, а нижний – со скоростью 2 метра в секунду. Гидра забегает на какое-то бревно из верхнего ряда, Выдра забегает на бревно из нижнего – и после этого они бегут вдоль своих брёвен. Чтобы встреча состоялась, нужно, чтобы эти два бревна состыковались ровно в то мгновение, когда Гидра (или Выдра – смотря кто быстрее) добежит до середины переправы – тогда она перескочит на правильное бревно, на то, по которому бежит подруга.

Первая версия – пусть до середины переправы первой доберётся Гидра. Значит, она перескочит с бревна на бревно при $t = 10$, на 10 метров правее начального положения, и Выдре нужно бежать так, чтобы сесть ровно на такое бревно из нижнего ряда, которое в момент времени $t = 10$ окажется на 10 метров правее начального положения. В нижнем ряду скорость брёвен вдвое выше, поэтому такое бревно поравняется с начальным положением при $t = 5$. То есть Выдре нужно подоспеть к берегу канала ровно к этому моменту. Расстояние до берега 7 метров, значит, $5 = 7/v$, то есть $v = 7/5$. Действительно ли при такой v Гидра окажется первой на середине канала? Да, Выдре до середины канала нужно переместиться на 17 метров, а $17/(7/5) > 10$.

Вторая версия – на середине переправы первой оказывается Выдра. Значит, Выдра перескакивает с бревна на бревно при $t = 17/v$. Бревно Гидры движется со скоростью метр в секунду, значит брёвна состыкуются на $17/v$ метров правее начального положения. То есть бревно Выдры при $t = 17/v$ находилось на расстоянии $17/v$ правее начального положения, при $t = 0$ оно было на $17/v$ левее начального положения, Выдра может вскочить на него в момент $17/2v$ – но до канала она добирается $7/v$ секунд времени. Уравнение $17/2v = 7/v$ решений не имеет.

Могли бы подруги встретиться на берегу? Нет, не могли. Если вдруг Гидра пересекает канал быстрее, чем Выдра добегает до берега, то Гидра будет сдвинута относительно начального положения по горизонтали, а Выдра – нет.

Значит, ответ всего один, v = 1.4, и он обеспечивает ближайшую к середине встречу просто потому, что при других v встречи не будет.

6. Назовем словом *размах* разность между наибольшим и наименьшим числом в наборе чисел $(x_1, \ldots, x_n)$. Например, размах набора $(4, 1, 7, 1, 3)$ равен 6 (разность 7 и 1).

Дан набор 2025 чисел $(x_1, \ldots, x_{2025})$ с размахом 1. Найдите наибольший возможный размах у набора чисел $(y_1, \ldots, y_{2025})$, где

$$y_1 = x_1,\ y_2 = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \ldots, y_{2025} = \frac{x_1 + \cdots + x_{2025}}{2025}.$$

Ответ: 2024/2025.

Решение. Не ограничивая общности, можно считать $\min x_i = 0, \max x_i = 1,$ т.к. размах не меняется при сдвиге на одно и то же число. Числа из последовательности y_i при сдвиге x_i изменятся, но таким же образом, все y_i сдвинутся на одно и то же число.

Пусть $y_k = \min y_i,\ \ y_l = \max y_i$.

Случай 1): $k < l$, тогда

$$y_l - y_k = \frac{x_1 + \cdots + x_l}{l} - y_k = \frac{k y_k + x_{k+1} + \cdots + x_l}{l} - y_k$$
$$= \frac{x_{k+1} + \cdots + x_l}{l} - \frac{l-k}{l} y_k \le \frac{x_{k+1} + \cdots + x_l}{l} \le \frac{l-k}{l} = 1 - \frac{k}{l}$$
$$\le 1 - \frac{1}{1025}.$$

Случай 2): $k > l$, тогда

$$y_l - y_k = y_l - \frac{l y_l + x_{l+1} + \cdots x_k}{k} = \frac{k-l}{k} y_l - \frac{x_{l+1} + \cdots x_k}{k} \le \frac{k-l}{k} y_l \le \frac{k-l}{k}$$
$$\le 1 - \frac{1}{2025}.$$

Итак, в обоих случаях размах не превосходит $1 - \frac{1}{2025}$.

Легко построить пример $x_1 = 0\ , x_2 = x_3 = \cdots = x_{2025} = 1$, в котором размах равен как раз $1 - \frac{1}{2025}$.