Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 10 классы. Заключительный этап 2024/2025 учебного года

Вариант В-1

1. В турнире по волейболу участвовало 20 команд. Каждая команда играла со всеми остальными по одному разу, за выигрыш начислялось 3 очка, за проигрыш очки не начислялись (ничьих в волейболе нет). Очки, набранные командами, образуют убывающую арифметическую прогрессию. Сколько очков набрала команда, занявшая второе место?

2. Назовем год *замечательным*, если номер года делится на сумму двузначных чисел, из которых этот номер составлен. Например, 2025 год – замечательный, поскольку 2025 делится на 20 + 25 = 45. Сколько ещё замечательных годов в XXI веке (с 2001 по 2100 год включительно)?

3. Множество *A* состоит из натуральных чисел *n*, делящихся на $\left[\sqrt[3]{n}\right]$. Здесь $[x]$ – целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превышающее x. Найдите количество чисел из отрезка $[25, 2025]$, принадлежащих множеству *A*.

4. При каких положительных значениях a, b и c достигается наибольшее значение выражения?

$$\frac{abc}{(1+a)(a+b)(b+\mathrm{c})(c+16)}$$

5. Квадрат *ABCD* со стороной 9 и квадрат *DEFG* со стороной π имеют общую вершину *D*, при этом точка *E* лежит на отрезке *CD*. Найдите наибольшее и наименьшее возможные значения площади параллелограмма *AMNF*, если точка *C* лежит на отрезке *MN* и делит его в отношении $1 : \pi$.

6. Отрезок $AB = 1$ лежит на прямой l и пересекается с отрезком $CD = m$ в точке O, причём $CO : OD = k$, $\angle AOC = 60°$ и $AC \neq BD$. Для каких пар чисел m и k отрезок AB можно передвинуть по прямой l так, чтобы в его новом положении выполнялось равенство $AC = BD$?

Апрель 2025 г.

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 10 классы. Заключительный этап 2024/2025 учебного года

Вариант В-2

1. В турнире по волейболу участвовало 10 команд. Каждая команда играла со всеми остальными по одному разу, за выигрыш начислялось 2 очка, за проигрыш очки не начислялись (ничьих в волейболе нет). Очки, набранные командами, образуют убывающую арифметическую прогрессию. Сколько очков набрала команда, занявшая второе место?

2. Назовем год *замечательным*, если номер года делится на сумму двузначных чисел, из которых этот номер составлен. Например, 2025 год – замечательный, поскольку 2025 делится на 20 + 25 = 45. Сколько ещё замечательных годов в XXI веке (с 2001 по 2100 год включительно)?

3. Множество A состоит из натуральных чисел n, делящихся на $\left[\sqrt[3]{n}\right]$. Здесь $[x]$ – целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превышающее x. Найдите количество чисел из отрезка $[36, 2025]$, принадлежащих множеству A.

4. При каких положительных значениях a, b и c достигается наибольшее значение выражения?

$$\frac{abc}{(a+1)(a+c)(b+16)(b+c)}$$

5. Квадрат $ABCD$ со стороной 11 и квадрат $DEFG$ со стороной π имеют общую вершину D, при этом точка E лежит на отрезке CD. Найдите наибольшее и наименьшее возможные значения площади параллелограмма $AMNF$, если точка C лежит на отрезке MN и делит его в отношении $\pi : 1$.

6. Отрезок $AB = 1$ лежит на прямой l и пересекается с отрезком $CD = m$ в точке O, причём $CO : OD = k$, $\angle AOC = 45°$ и $AC \neq BD$. Для каких пар чисел m и k отрезок AB можно передвинуть по прямой l так, чтобы в его новом положении выполнялось равенство $AC = BD$?

Апрель 2025 г.

Ответы и решения

1-1. Ответ: 54.

Решение. Решим задачу в общем виде. Пусть участвовало n команд, за победу дается a очков.

Пусть x — количество очков, набранных последней командой. Посчитаем число разыгранных очков двумя способами. С одной стороны, это число равно $a \cdot \frac{n(n-1)}{2}$. С другой стороны, так как очки распределились в арифметической прогрессии, то, обозначив ее разность через d, получим $nx + d\frac{n(n-1)}{2}$.

Значит, $nx + d\frac{n(n-1)}{2} = a \cdot \frac{n(n-1)}{2}$. Так как $d = k \cdot a$, где k — натуральное число, то

$$nx + ka\frac{n(n-1)}{2} = a \cdot \frac{n(n-1)}{2},$$

откуда $nx = (1-k)a \cdot \frac{n(n-1)}{2}$, то есть $\frac{x}{a} = (1-k)\frac{n-1}{2}$.

Значит, для k есть две возможности: $k = 1$, $k = 0$. При $k = 0$ получается $d = 0$, что не годится по условию. Следовательно, $k = 1$ и $x = 0$.

Тогда при $a = 3$, $n = 20$ получаем $d = 3$ и первая команда наберет $0 + 3 \cdot 19 = 57$ очков, а вторая $0 + 3 \cdot 18 = 54$ очка.

Другой способ решения. Последняя команда в таблице набрала не менее 0 очков, 19-я команда – не менее 3 очков, 18-я команда – не менее 6 очков, …, 2-я команда – не менее $0 + 3(19-1) = 54$ очков, 1-я команда – не менее $0 + 3(20-1) = 57$ очков. В то же время, 1-я команда не могла набрать более $19 \cdot 3 = 57$ очков, так как она сыграла 19 игр. Значит, 1-я команда набрала 57 очков, 2-я команда – 54 очка, 3-я команда – 51 очко, …, 19-я команда – 3 очка, 20-я команда – 0 очков.

1-2. Ответ: 16.

2-1. Ответ: 10.

Решение. Во-первых, заметим, что года, у которых третья цифра 0 не могут быть замечательными просто потому, что не образуется двух двузначных чисел, из которых год составлен. И хотя 2002 делится на 20 + 02, а 2100 делится на 21 + 00, эти года не будут замечательными, так как числа 02 и 00 соответственно не двузначные.

Для поиска остальных нужных годов обозначим год как $\overline{20ab}$. При этом $a \in [1,9], b \in [0,9]$.

Если $\overline{20ab}$ делится на $20+\overline{ab}$, то $\overline{20ab}-\left(20+\overline{a\,b}\right)=1980$ тоже делится на $20+\overline{ab}$. Так как $1980=2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11$, то это число имеет $(2+1)(2+1)(1+1)(1+1)=36$ делителей, и нужно найти те из них, которые находятся на отрезке $[20+10, 20+99]=[30, 119]$. Таких делителей 11, это числа: $2^2\cdot 11=44$, $3\cdot 11=33$, $3^2\cdot 11=99$, $5\cdot 11=55$, $2\cdot 3\cdot 11=66$, $2\cdot 5\cdot 11=110$, $3^2\cdot 5=45$, $2\cdot 3^2\cdot 5=90$, $2^2\cdot 3\cdot 5=60$, $2\cdot 3\cdot 5=30$, $2^2\cdot 3^2=36$. Тогда $\overline{ab}$ будет на 20 меньше, что соответствует следующим годам 2024, 2013, 2079, 2035, 2046, 2090, 2025, 2070, 2040, 2010, 2016.

Таким образом, всего в XXI веке замечательных годов 11. Но при ответе на вопрос «Сколько **ещё** замечательных годов…?», мы должны учесть все года, кроме 2025, то есть правильный ответ – 10.

Замечание. Отметим, что формулировка задачи не вполне строгая, и она, вообще говоря, допускала также трактовку, при которой года 2002 и 2100 также могли считаться замечательными. В этом случае она также считалась решенной правильно.

2-2. Ответ: 12.

3-1. Ответ: 251.

Решение. Так как для натуральных чисел n от 1 до 7 (включительно) $\left[\sqrt[3]{n}\right]=1$, то все они входят в множество A. Всего 7 чисел.

Из отрезка $n\in[8, 26]$, для которого $\left[\sqrt[3]{n}\right]=2$, в множество A входят четные числа 8, 10, …, 26. Всего их $\left[\frac{26-8}{2}\right]+1=10$.

Из отрезка $n\in[27, 63]$, для которого $\left[\sqrt[3]{n}\right]=3$, в множество A входят кратные 3 числа 27, 30, …, 63. Всего их $\left[\frac{63-27}{3}\right]+1=13$.

В общем случае, из отрезка $n\in[k^3,(k+1)^3-1]$, для которого $\left[\sqrt[3]{n}\right]=k$, в множество A входят числа, делящиеся на k. Всего этих чисел $\left[\frac{(k+1)^3-1-k^3}{k}\right]+1=3k+4$.

Так как наименьшее и наибольшее числа из отрезка $[25, 2025]$ равны $25=3^3-2$ и $2025=12^3+297$, соответственно, то искомое количество равно сумме трех слагаемых:

а) количество четных чисел из отрезка $[25, 3^3-1]$, такое число одно – это число 26;

б) количество подходящих чисел из отрезка $[3^3, 12^3-1]$, оно равно

$$\sum_{k=3}^{11}(3k+4)=\frac{13+37}{2}\cdot 9=225;$$

в) количество делящихся на 12 чисел из отрезка $[12^3, 2025]$, оно равно

$$\left[\frac{297}{12}\right]+1=25.$$

Суммарное количество: $1+225+25=251$.

3-2. Ответ: 247.

4-1. Ответ: $a=2, b=4, \mathrm{c}=8$.

Решение. Максимум исходного выражения соответствует минимуму выражения

$$\frac{(1+a)(a+b)(b+\mathrm{c})(\mathrm{c}+16)}{ab\mathrm{c}}.$$

Зафиксируем b и c, будем искать минимум $\frac{(1+a)(a+b)}{a}=a+\frac{b}{a}+(1+b)$. Так как $a+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{a\cdot\frac{b}{a}}$, то минимум достигается при $a=\frac{b}{a} \quad\Rightarrow\quad a=\sqrt{b}$.

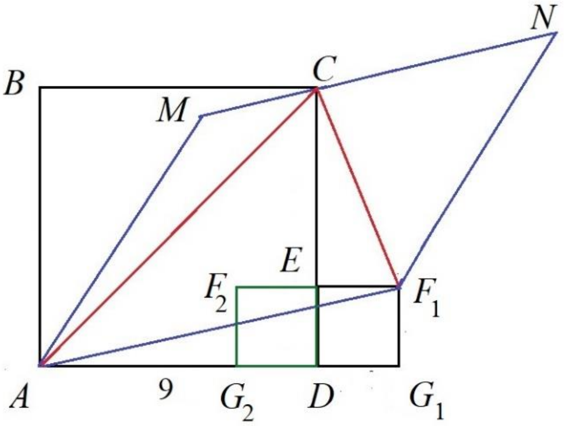
Аналогично, если зафиксировать a и c, то получим $b=\sqrt{ac}$, а если зафиксировать a, b, то получим $c=4\sqrt{b}$.

Решим систему $\begin{cases} a^2=b \\ b^2=ac \\ c^2=16b \end{cases}$, получим $a=2, b=4, c=8$.

4-2. Ответ: $a=2, b=8, \mathrm{c}=4$.

5-1. Ответ: 81; $81-18\pi$.

Решение. Возможны две разные конфигурации, в зависимости от того, где лежит точка *F*: вне большого квадрата или внутри него.



Площадь параллелограмма *AMNF* равна удвоенной площади треугольника *ACF*, площадь которого можно найти после некоторых вычислений (с использованием тригонометрии или без нее).

Однако есть более эффективные способы решения.

В случае внешнего касания квадратов площадь ΔACF_1 равна площади ΔACD (эти треугольники имеют одинаковое основание *AC* и равные высоты, так как $DF_1 \parallel AC$) и, следовательно, равна половине площади большого квадрата. Это значит, что площадь параллелограмма равна площади квадрата *ABCD*, то есть $9^2=81$.

Если точка F лежит внутри большого квадрата, то на первый взгляд, нахождение площади более громоздко. Однако и здесь есть простые способы.

Например, можно найти отношение высот треугольников ACF_2 и ACD (основания у них одинаковы) – оно равно $\frac{\frac{9\sqrt{2}}{2} - \pi\sqrt{2}}{\frac{9\sqrt{2}}{2}} = 1 - \frac{2\pi}{9}$. Тогда искомая площадь равна $81\left(1 - \frac{2\pi}{9}\right) = 81 - 18\pi$.

Или же, так как точка F_2 лежит на диагонали BD, то треугольники AF_2G_2 и CF_2E равны по площади, а значит,

$$S_{AF_2C} = S_{ACD} - 2S_{AF_2G_2} - S_{DEF_2G_2} = \frac{9^2}{2} - 2 \cdot \frac{(9-\pi)\pi}{2} - \pi^2 = \frac{81}{2} - 9\pi.$$

Тогда площадь параллелограмма равна $81 - 18\pi$.

Обратим внимание, что сторона меньшего квадрата могла бы быть использована для решения задачи в первом случае, но в конечном итоге она не влияет на ответ в этом случае. А отношение $MC : CN$ не участвует в решении задачи в обоих случаях.

5-2. Ответ: 121; $121 - 22\pi$.

6-1. Ответ: если $m \neq 2$, то k – любое положительное число; если $m = 2$, то $k = 1$.

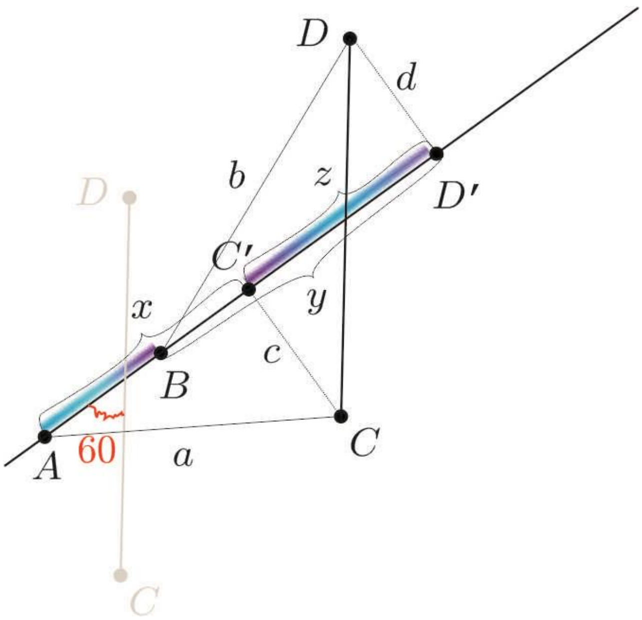
Решение. Рассмотрим 3 случая.

1. Если $k = 1$, то отрезок AB достаточно расположить так, чтобы точка O стала его серединой, а значит, четырёхугольник $ACBD$ — параллелограммом.

2. Если $k \neq 1$ и $m > 2$ (случай $m < 2$ рассматривается аналогично), то проекция $C'D' = z$ отрезка $CD = m$ на прямую l имеет длину

$$z = m\cos 60° = \frac{m}{2} = 1 + \varepsilon > AB.$$

Передвинем отрезок AB по прямой l так, чтобы точки A, B, C', D' на ней располагались в указанном порядке, и обозначим $AC = a$, $BD = b,\ CC' = c, DD' = d,\ AC' = x, BD' = y$.



Тогда имеем

$$a^2 = x^2 + c^2, \qquad b^2 = y^2 + d^2,$$
$$y = x + z - 1$$
$$= x + \varepsilon,$$

откуда получаем, что величина

$$AC - BD = a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b} = \frac{x^2-y^2+c^2-d^2}{a+b} = \frac{x-y+\frac{c^2-d^2}{x+y}}{\frac{a+b}{x+y}} = \frac{-\varepsilon+\frac{c^2-d^2}{2x+\varepsilon}}{\frac{a+b}{2x+\varepsilon}}$$

при неограниченном увеличении параметра x (а с ним и $2x + \varepsilon$) в некотором положении отрезка AB обязательно станет отрицательной. Аналогично, если те же точки на прямой l расположены в порядке C', D', A, B, то та же величина при неограниченном увеличении параметра x в некотором другом положении отрезка AB обязательно станет положительной. Поэтому в некотором промежуточном (между двумя указанными) положении отрезка AB рассматриваемая величина обязательно обнулится.

3. Если $k \neq 1$ и $m = 2$, то в обозначениях предыдущего пункта имеем

$$x = y, \qquad c \neq d, \qquad AC - BD = \frac{x^2 - y^2 + c^2 - d^2}{a + b} \neq 0.$$

6-2. Ответ: если $m \neq \sqrt{2}$, то k — любое положительное число, а если $m = \sqrt{2}$, то $k = 1$.