ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!» ПО ФИЗИКЕ.
2024/25 учебный год, ЗАДАНИЕ ЗАОЧНОГО ТУРА. 7,8 и 9 классы.

ВОЗМОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ.

Часть I: проверялись только ответы. Пример варианта:

Вопрос 1 (7 баллов):

Водитель экспресса между станциями всегда ведет свой состав с одной и той же скоростью. Он часто проезжал мимо находящихся на соседнем пути электричек. Он заметил, что, если он обгоняет электричку на перегоне перед платформой Воробьево, вся электричка проходит мимо него в окне за t_1 = 272 с. «Наверное, электрички тут тоже идут с одинаковыми скоростями» - подумал он. Если же электричка стоит у этой платформы, то вся она проходит мимо него за время t = 32 с. Однажды, проехав Воробьево, машинист увидел, что электричка едет по соседнему пути навстречу экспрессу. За какое время теперь электричка целиком пролетит мимо него? Ответ запишите в секундах, с точностью до целого значения.

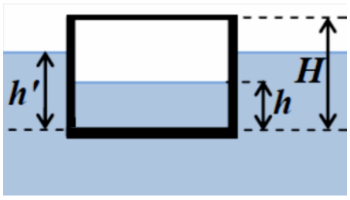
Ответ: **17**.

Комментарий: Пусть v – скорость экспресса, а u – скорость электрички. При обгоне электрички экспресс движется относительно нее со скоростью $v-u$, а когда экспресс едет навстречу электричке – со скоростью $v+u$. Значит, если длина электрички равна L, то

$$\left\{\begin{matrix} v-u=\dfrac{L}{t_1} \\ v=\dfrac{L}{t} \end{matrix}\right\} \Rightarrow u=\frac{L}{t}-\frac{L}{t_1} \Rightarrow v+u=\frac{L}{t_2}=2\frac{L}{t}-\frac{L}{t_1} \Rightarrow \frac{1}{t_2}=\frac{2}{t}-\frac{1}{t_1} \Rightarrow t_2=\frac{t\cdot t_1}{2t_1-t}=17 \text{ с.}$$

Вопрос 2 (8 баллов):

Цилиндрическая металлическая кастрюля высоты H = 16 см с толстыми стенками плавает на поверхности воды в бассейне (глубина воды под ней больше H). Внутри кастрюли тоже есть вода - высоту этого слоя воды над дном кастрюли обозначим h), а дно кастрюли находится на глубине h' под поверхностью воды в бассейне (см. рисунок). Известно, что при h_1 = 32 мм h'_1 = 64 мм, а при h_2 = 72 мм глубина погружения кастрюли увеличивается до h'_2 = 96 мм. До какого минимального уровня h_C нужно аккуратно долить воду внутрь кастрюли, чтобы она утонула? Ответ запишите в мм, с точностью до целого значения.



Ответ: **152**.

Комментарий: Введем обозначения: M – масса кастрюли, S – площадь ее внешнего горизонтального сечения, s – внутреннего, а ρ – плотность воды. Тогда условие равновесия плавающей кастрюли (сила давления воды снизу уравновешивает силу тяжести, действующую на кастрюлю и воду в ней) можно записать так:

$$\rho h'S=M+\rho hs \Rightarrow h'=\frac{s}{S}h+\frac{M}{\rho S}\equiv a\cdot h+b.$$

Отметим, что нам не нужно учитывать атмосферное давление, так как оно давит на кастрюлю равномерно со всех сторон – сверху непосредственно, а снизу ее давление передается водой. Мы не знаем величин, для которых вводили обозначения, но можем определить из приведенных значений h' и h коэффициенты в нашей формуле:

$$\left\{\begin{matrix} 64\text{ мм}=a\cdot 32\text{мм}+b \\ 96\text{ мм}=a\cdot 72\text{мм}+b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 32\text{мм}=a\cdot 40\text{мм} \\ b=64\text{ мм}-a\cdot 32\text{мм} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a=0{,}8 \\ b=38{,}4\text{ мм} \end{matrix}\right..$$

Таким образом, связь h' и h для нашей кастрюли имеет вид $h'=0{,}8\cdot h+38{,}4$ мм. Кастрюля утонет при $h'=H=160\text{ мм} \Rightarrow h=\frac{160\text{ мм}-38{,}4\text{ мм}}{0{,}8}=152\text{ мм}.$

Вопрос 3 (10 баллов):
У трубки постоянного сечения длиной L = 1600 мм один из концов – запаянный, а второй открыт в атмосферу. Трубку расположили вертикально, открытым концом вверх и налили в нее ртуть таким образом, что столбик ртути, составляющий 12 % от длины трубки, располагался внизу (начинаясь от запаянного конца). Открытый конец трубки закрыли крышкой, аккуратно ее перевернули и так же аккуратно убрали крышку. Часть ртути вылилась, и в новом положении равновесия при прежней температуре длина оставшегося столбика ртути составляла уже 4 % от длины трубки. При каком атмосферном давлении проводился опыт (считайте, что оно оставалось неизменным)? Ответ запишите в мм.рт.ст., с точностью до целого значения.
Ответ: **768**.

Комментарий: Перед переворотом давление воздуха в трубке сечением S равнялось p_A, и он занимал объем $S \cdot L(1-x)$. В конечном состоянии воздух занимал объем $S \cdot L(1-y)$, а его давление определялось из условия равновесия столбика ртути: $p = p_A - \rho g L y$. Поскольку температура воздуха не изменилась, то

$$(p_A - \rho g L y) S \cdot L(1-y) = p_A S \cdot L(1-x) \Rightarrow p_A = \rho g L \frac{y(1-y)}{x-y} = 768 \text{ мм. рт. ст.}$$

Часть II. (проверялись РЕШЕНИЯ).

1. («Два выстрела», 15 баллов): Доктор Ватсон по заданию Шерлока Холмса дежурил на воздушном шаре, который удерживался неподвижным с помощью троса, закрепленного на Земле. Погода была безветренной. Холмсу нужно было отправить Ватсону записку, и для этого он помещал ее в небольшой шарик и выстреливал этим шариком вертикально вверх из трубки с маломощным зарядом, подбирая заряд и целясь таким образом, чтобы шарик пролетал рядом с корзиной шара уже с небольшой скоростью, и Ватсон мог его поймать специальным сачком. В первый раз шарик пролетел совсем рядом с корзиной, но Ватсону не удалось его поймать сразу, зато он поймал его на пути вниз – через t_1= 7,5 с после выстрела. Через небольшое время Холмсу понадобилось отправить Ватсону еще одну записку, и он использовал точно такой же заряд. В этот раз Ватсон поймал шарик с первой попытки – на пути вверх через t_2= 6,9 с после выстрела. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите скорость, с которой вылетали шарики из трубки и высоту, на которой находилась корзина воздушного шара. Ускорение свободного падения считайте равным $g \approx 9{,}8$ м/с^2. С какими скоростями летели шарики в моменты времени, когда Ватсон их ловил?

Указание: В соответствии с условием, движение шарика – *равноускоренное*, то есть проекция его скорости на ось, направленную вертикально вверх, уменьшается на 9,8 м/с за каждую секунду.

Возможное решение:

Как ясно из указания, скорость шарика, запушенного вертикально вверх со скоростью v_0, спустя время t после старта, равна $v(t) = v_0 - gt$. При линейном изменении скорости средняя скорость на участке пути, пройденного за это время, равна полусумме начальной и конечной скоростей этого участка. Поэтому высота, на которой оказывается шарик спустя время t после старта, равна $H = \frac{1}{2}(v_0 + v_0 - gt)t = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. Таким образом, оба заданных времени являются корнями квадратного уравнения

$$t^2 - 2\frac{v_0}{g}t + \frac{2H}{g} = 0.$$

По теореме Виета

$$2\frac{v_0}{g} = t_1 + t_2 \Rightarrow v_0 = \frac{g(t_1 + t_2)}{2} \approx 70{,}56\ \text{м/с}.$$

и

$$\frac{2H}{g} = t_1 \cdot t_2 \Rightarrow H = \frac{g t_1 t_2}{2} \approx 253{,}575\ \text{м} \approx 253{,}6\ \text{м}.$$

Из характера движения шарика ясно, что после пролета вверх мимо корзины он тормозится до нулевой скорости такое же время, в течении которого разгоняется при падении до корзины. Значит, скорость шарика при обоих пролетах мимо корзины должна быть одинакова и равна скорости, набираемой за половину промежутка времени между пролетами, то есть

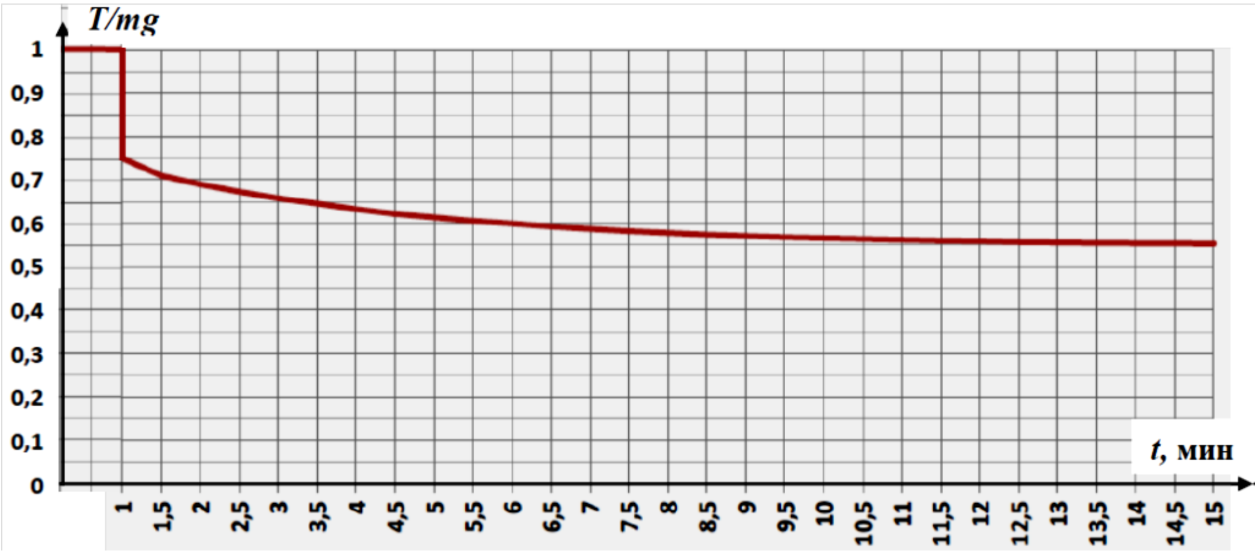
$$v_1 = v_2 = \frac{g(t_2 - t_1)}{2} \approx 2{,}94\ \text{м/с}.$$

ОТВЕТЫ: начальная скорость шариков $v_0 = \frac{g(t_1+t_2)}{2} \approx 70{,}56\ \text{м/с}$, корзина воздушного шара находилась на высоте около $H = \frac{g t_1 t_2}{2} \approx 253{,}6\ \text{м}$, в момент «поимки» оба шарика летели с одинаковыми скоростями $v_1 = v_2 = \frac{g(t_2-t_1)}{2} \approx 2{,}94\ \text{м/с}$.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

№	действие		макс. балл
1	Указано (используется в решении), что высота шарика связана с временем полета формулой $H = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$		**3**
2	Правильно		**9**
	2.1	Записано квадратное уравнение для времен полета.	2
	2.2	Получена правильная формула для v_0	2
	2.3	Получена правильная формула для *H*	2
	2.4	Указано, что скорости равны и получена правильная формула для $v_1 = v_2$	1+2=3
3	Получение ответов		**3**
	3.1	Получен правильный численный ответ для v_0	1
	3.2	Получен правильный численный ответ для *H*	1
	3.3	Получен правильный численный ответ для $v_1 = v_2$	1
	ВСЕГО		**15**

2. («График замораживания», 18 баллов) В большом сосуде с теплоизолирующими стенками находилась вода, температура которой была практически точно равна 0ºС. Небольшой груз из необычного материала, о котором нам известна только величина его удельной теплоемкости c = 18,9 Дж/(г·°С) (а также то, что он довольно хорошо проводит тепло), подвесили на легкой тонкой нити, прикрепленной к крючку электронного динамометра. Этот динамометр был настроен так, что он показывал силу натяжения нити в единицах величины силы тяжести, действующей на груз. Груз стали равномерно опускать вниз, так что он в итоге целиком оказался под водой, где его аккуратно остановили. На графике показана зависимость показаний динамометра от времени. Определите плотность сплава и температуру груза перед опусканием его в воду. Считать точными следующие данные: плотность воды ρ_0 = 1 г/см^3, плотность льда ρ = 0,9 г/см^3, удельная теплота плавления льда λ = 336 Дж/г.



Возможное решение:

Ясно, что показания динамометра уменьшаются в процессе опускания груза в воду из-за появления силы Архимеда, причем вначале (за «очень малое» в масштабе графика время) эта сила появляется из-за погружения самого груза в воду, а потом (медленный процесс) – из-за намораживания льда на грузе: плотность льда ниже плотности воды, и увеличение силы Архимеда (благодаря увличению объема) больше увеличения силы тяжести (связанной с дополнительной массой льда).

Рассмотрим сначала «быстрый» процесс опускания груза в воду, пренебрегая «намораживанием» льда: сила натяжения нити месте с силой Архимеда уравновешивают силу тяжести:

$$T + F_A = mg \Rightarrow T = mg - \rho_0 V_{погр} g.$$

При полом погружении $V_{погр} = \dfrac{m}{\rho_c}$, и

$$T = mg - \rho_0 \frac{m}{\rho_c} g \Rightarrow T = mg\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_c}\right).$$

По графику в этот момент видно, что

$$\frac{T}{mg} \approx 0{,}75 \Rightarrow \frac{\rho_0}{\rho_c} \approx 0{,}25 \Rightarrow \ \rho_c \approx 4\rho_0 = 4 \text{ г/см}^3.$$

За достаточно большое время процесс намораживания льда прекращается, поскольку устанавливается тепловое равновесие – при температуре t = 0°С. Обозначим M массу льда после установления теплового равновесия. Тогда

$$T = (m + M)g - \rho_0\left(\frac{m}{\rho_c} + \frac{M}{\rho}\right)g \Rightarrow \frac{T}{mg} \approx 0{,}55 = 0{,}75 - \frac{M}{9m}$$

(здесь мы подставили известные значения плотностей). Из этого уравнения находим массу льда, замороженную к моменту становления равновесия $M \approx 0{,}2 \cdot 9m = 1{,}8 \cdot m$. Записав уравнение теплового баланса, находим из него начальную температуру груза t_0:

$$\lambda M = cm(t - t_0) \Rightarrow t_0 = -\frac{\lambda M}{cm} = -1{,}8\frac{\lambda}{c} \approx -32°\text{C}.$$

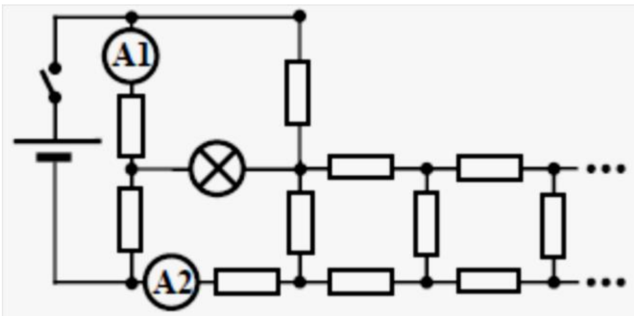
Важно отметить, что в процессе замораживания льда температура границы раздела вода-лед всегда остается равной 0°С, и поэтому в УТБ нет слагаемого, учитывающего охлаждение воды или нагрева льда. Данные по условию точны, и погрешности в ответах связаны только с определением части числовых данных из графика.

ОТВЕТ: плотность сплава $\rho_c \approx 4\rho_0 = 4$ г/см^3, начальная температура груза $t_0 \approx -32°\text{C}$..

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

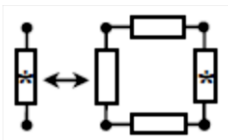
№	**действие**		**макс. балл**
1	Правильный анализ изменения силы натяжения в процессе погружения груза в воду.		**6**
	1.1	Указано (используется в решении), что «ступенька» на графике при t=1 мин отвечает погружению груза в воду, и что в это время влиянием образования льда можно пренебречь.	1+1=2
	1.2	Правильно записано уравнение равновесия груза в момент его полного погружения	2
	1.3	Записано правильное уравнение, выражающее плотность груза через данные, определяемые из графика	
2	Правильный анализ изменения сил натяжения при намораживании льда		**8**
	2.1	Указано, что постоянство силы натяжения на графике отвечает наступлению теплового равновесия	2
	2.2	Правильно записано уравнение равновесия груза после наступления теплового равновесия	2
	2.3	Правильно записано УТБ для наступления теплового равновесия.	2
	2.4	Получена правильная формула для начальной температуры груза через данные задачи	2
3	Получение ответов		**4**
	3.1	Получен правильный численный ответ для плотности сплава	2
	3.2	Получен правильный численный ответ для начальной температуры	2
	ВСЕГО		**18**

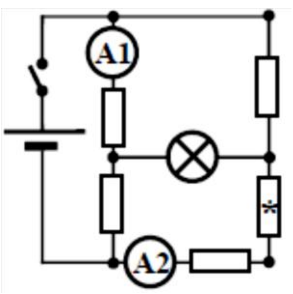
3. («Длинная цепь», 20 баллов) В школьной лаборатории ученики собрали цепь, схема которой показана на рисунке, из аккумулятора, ключа, лампочки накаливания, двух практически идеальных амперметров (их внутренние сопротивления намного меньше сопротивления любого другого элемента схемы) и 2024 одинаковых резисторов. Ключ замкнули, и амперметр А1 показал величину силы тока I_1 = 2732 мА (ошибка измерения у этих амперметров около 0,5 мА). Течет ли ток через лампу? Каковы показания амперметра А2?



Возможное решение:

Пусть R – сопротивление одного из наших резисторов. В первую очередь отметим, что всю длинную цепочку из 2020 резисторов (кроме трех занумерованных и одного, включенного последовательно с цепочкой) можно заменить на один резистор R*, и при этом для расчета его сопротивления можно воспользоваться тем соображением, что при отсечении от такой цепочки одного звена ее сопротивление практически не изменится. Поэтому





$$R^* = \frac{R(2R + R^*)}{3R + R^*} \Rightarrow R^{*2} + 2RR^* - 2R^2 = 0 \Rightarrow R^* = \left(\sqrt{3} - 1\right)R.$$

Значит, общее сопротивление в «правой нижней» ветви схемы равно

$R_n = \sqrt{3}R$, причем это именно общее сопротивление всех «незанумерованных» резисторов схемы. Теперь видно, что мост не является сбалансированным ($R^2 \neq \sqrt{3}R^2$), и через лампу течет ненулевой ток. Общее напряжение, создаваемое источником, на всей «мостовой» схеме, равно

$$U = I_1R + I_4R = I_3R + I_2R_n \Rightarrow I_1 + I_4 = I_3 + \sqrt{3}I_2.$$

Здесь $I_{1,2}$ – силы токов через амперметры, а $I_{3,4}$– через резисторы в ветвях моста без амперметров (№ 3 – «выше» на схеме, № 4 – «ниже»). С другой стороны, условие непрерывности тока дает

$$I_1 + I_3 = I_2 + I_4.$$

Складывая эти два уравнения почленно и сокращая одинаковые слагаемые, получаем, что

$$2I_1 = \left(\sqrt{3} + 1\right)I_2,$$

и теперь показания амперметра А2 легко определяются:

$$I_2 = \frac{2I_1}{\sqrt{3} + 1} \approx 2000 \text{ мА}$$

с ошибкой около 0,5 мА.

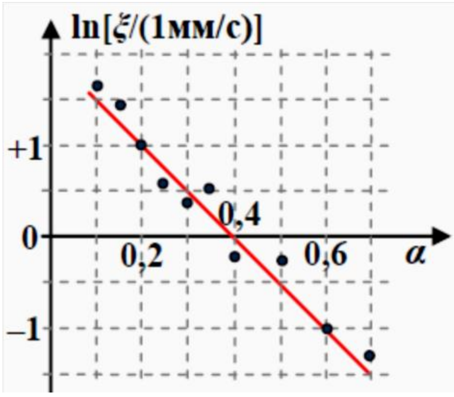
ОТВЕТЫ: Ток через лампу течет, $I_2 = \frac{2I_1}{\sqrt{3}+1} \approx 2000$ мА.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

№	действие		макс. балл
1	Правильно определено эквивалентное сопротивление «длинной» цепочки		**7**
	1.1	Указано (используется в решении), что при отсечении от такой цепочки одного звена ее сопротивление практически не изменится	2
	1.2	Записанное правильное уравнение для R^*	3
	1.3	Получено правильное выражение R^* через R	2
2	Правильно определено соотношение сил токов через амперметры		**9**
	2.1	Общее напряжение «моста» записано через силы токов в «плечах»	3
	2.2	Правильно записано условие непрерывности тока	3
	2.3	Правильно вычислено отношение I_2/I_1	3
3	Получение ответов		**4**
	3.1	Указано и обосновано, что через лампу течет ненулевой ток	1+2=3
	3.2	Получен правильный численный ответ	1
	ВСЕГО		**20**

4. («Пороховой ракетный двигатель», 22 балла): В качестве стартовых силовых установок и ускорителей используются **пороховые ракетные двигатели** (твердотопливные реактивные двигатели, в которых в качестве топлива используется бездымный порох). Самые ранние сведения об использовании твердотопливных ракет (китайских пороховых ракет) относятся к XIII веку. Вплоть до XX века все ракеты использовали ту или иную форму твёрдого топлива. Важной характеристикой таких двигателей является *скорость истечения* продуктов сгорания пороха из сопла двигателя. Конечно, точный расчет этой скорости – очень сложная задача, и скорость истечения зависит и от сорта пороха, и от конструкции камеры сгорания и сопла, и даже от способа и условий запуска горения. На практике для расчета скорости истечения чаще всего используют *эмпирические зависимости*, получаемые на основании опытных данных. Пусть, например, для некоторого типа двигателей, и конкретного сорта пороха была подобрана зависимость скорости истечения u от давления в камере сгорания p:

$$u = \xi \cdot (p/1\ \text{Па})^{\alpha},$$

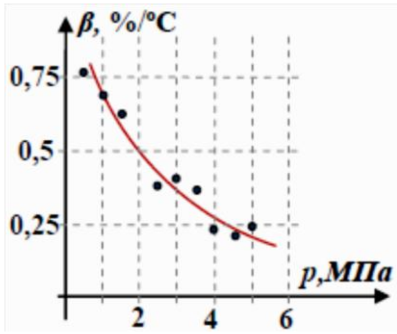


где ξ и α – подобранные коэффициенты, связанные с характеристиками пороха и зависящие от параметров двигателя (например, от площади сопла). Впрочем, измерения показали, что для изучаемых двигателей эти величины не являются независимыми: на графике приведены их значения для нескольких двигателей этого типа при использовании одинакового сорта пороха. Как видно, связь $\ln(\xi)$ с α с удовлетворительной для оценочных вычислений точностью может быть описана линейной зависимостью (на графике показана соответствующая прямая):

$$\ln[\xi/(1\text{мм/с})] = b - k \cdot \alpha,$$

где b и k — постоянные для данного типа двигателей и этого топлива параметры. Кроме того, известно, что на скорость истечения оказывает влияние и температура в камере сгорания. Известно, что с увеличением этой температуры увеличивается и скорость истечения. Характер этой зависимости также сложно получить теоретически, и поэтому здесь тоже используют эмпирические зависимости. Для этого измеряют скорость истечения при различных температурах, а затем подбирают подходящую зависимость. Исследования показали, что влияние температуры можно учесть, вводя «корректирующий» множитель, который показывает, как отличается скорость истечения при температуре T от скорости при «номинальной» температуре $T_N = +20\ °\text{C}$.

$$u(T) = u_N \cdot exp\{\beta(T - T_N)\},$$



где величина β – это *коэффициент температурной чувствительности* топлива. Было установлено, что для изучаемых двигателей он зависит в основном от величины давления в камере сгорания. На графике показаны экспериментальные значения температурной чувствительности для наших сортов пороха, измеренные при различных давлениях, а также *аппроксимирующая кривая* для этой зависимости.

В результате мы получили эмпирическую формулу для расчета скорости истечения:

$$u(p, T) = \xi \cdot (p/1\ \text{Па})^{\alpha} \cdot exp\{\beta(T - T_N)\},$$

в которой $\xi = \xi(\alpha)$ и $\beta = \beta(p)$.

Определите скорость истечения газа из сопла в установившемся режиме, при котором температура в камере сгорания T = 1730ºС, а давление p = 2 МПа. Известно, что изменение площади сопла, при котором скорость истечения уменьшится в два раза при тех же температуре и давлении, соответствует уменьшению коэффициента α в k = 1,175 раза.

Математическая подсказка: *Логарифмическая* и *показательная* функции в математике – взаимно обратные. В физике особую роль играет *экспонента* – показательная функция, основанием которой является «замечательное» число $e \approx 2{,}7218281828\ldots$. Таким, образом, для вычисления экспоненты нужно возвести это число в степень аргумента: $\exp(x) \equiv e^x$. Логарифм по основанию e называют *натуральным*: $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$.

Возможное решение:

В первую очередь определим постоянные b и k в эмпирической зависимости скорости истечения от α. Выберем на графике удобные точки *интерполирующей прямой*:

$$\begin{cases} 1 = b - 0{,}2 \cdot k \\ -1 = b - 0{,}6 \cdot k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ k = 5 \end{cases} \Rightarrow \ln[\xi/(1\text{ мм/с})] = 2 - 5 \cdot \alpha,$$

Теперь используем информацию из условия: для значения скорости истечения $u' = \frac{1}{2}u$

$$\frac{u}{u'} = 2 = \frac{\xi}{\xi'} \cdot \left(\frac{p}{1\text{ Па}}\right)^{\alpha-\alpha'} = e^{-5(\alpha-\alpha')}\left(\frac{p}{1\text{ Па}}\right)^{\alpha-\alpha'} = \left(\frac{p}{e^5\text{ Па}}\right)^{\alpha-\alpha'} \Rightarrow \alpha - \alpha' = \frac{\ln(2)}{\ln(p/e^5\text{ Па})} \approx 0{,}073.$$

Нам также известно, что $\alpha' = \alpha/1{,}175$, и из полученных уравнений находим $\alpha \approx 0{,}49$. Это позволяет нам определить ξ для исследуемого режима:

$$\xi \approx 1\,\frac{\text{мм}}{\text{с}} \cdot e^{2-5\cdot 0{,}49} \approx 0{,}64\,\frac{\text{мм}}{\text{с}}.$$

По второму графику определяем β для заданного давления: $\beta \approx 0{,}5\frac{\%}{^\circ C}$. Теперь мы можем определить скорость истечения по рекомендованной эмпирической формуле:

$$u \approx 0{,}64\,\frac{\text{мм}}{\text{с}} \cdot (2 \cdot 10^6)^{0{,}49} \cdot exp\left[\frac{17{,}1}{2}\right] \approx 4{,}04\,\frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

ОТВЕТ: скорость истечения в этом режиме $u \approx 4$ км/с.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

№	действие		макс. балл
1	Определение α и ξ для исследуемого режима		**13**
	1.1	Правильно определены постоянные b и k для интерполирующей прямой	2+2=4
	1.2	Записано уравнение на α и ξ , следующее из заданного отношения скоростей	2
	1.3	Получено правильное уравнение на α	3
	1.4	Найдено α в диапазоне 0,47 – 0,51	2
	1.5	Найдено ξ в диапазоне 0,58 – 0,70	2
2	Определение β для исследуемого режима и правильной схемы вычисления u		**5**
	2.1	По графику правильно найдено β для заданного давления	3
	2.2	Все полученные константы подставлены в эмпирическую формулу для нахождения скорости истечения	2
3	Получен правильный ответ $u \approx (4{,}0 \pm 0{,}4)$ км/с; для ответа в более широком диапазоне $(4{,}0 \pm 0{,}8)$ км/с – **2 балла**, для $(4{,}0 \pm 1{,}5)$ км/с – **1 балл**.		**4**
	ВСЕГО		**22**