

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!» ПО ФИЗИКЕ.

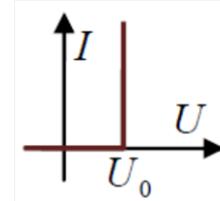
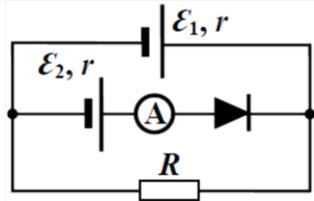
2024/25 учебный год, ЗАДАНИЕ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА. 11 классы.

ВОЗМОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ.

Часть I: проверялись только ответы. Пример варианта:

Вопрос 1 (7 баллов):

В схеме, показанной на рисунке слева, диод открывается при ненулевом напряжении $U_0 = 0,5$ В (его вольт-амперная характеристика показана на рисунке справа). Значения параметров схемы: $\mathcal{E}_1 = 39$ В, $\mathcal{E}_2 = 25$ В, $r = 2$ Ом, $R = 5$ Ом. Каковы показания амперметра? Ответ запишите в амперах.



Ответ: **0.**

Комментарий: Вычислим напряжение на диоде в предположении, что ток через него не течет.

Тогда сила тока во «внешнем» контуре схемы $I = \frac{\mathcal{E}_1}{R+r} = \frac{39}{7}$ А. Значит,

$$U_D = \mathcal{E}_2 - IR = -\frac{20}{7} \text{ В} < 0,5 \text{ В.}$$

Значит, предположение оправдалось, и диод действительно заперт.

Вопрос 2 (8 баллов):

В вертикальном цилиндре с гладкими стенками под поршнем с массой $M = 110$ кг находится $\nu = 1,1$ моля гелия при температуре $t = 27,7^\circ\text{C}$. Внешнее давление равно нормальному атмосферному, поршень покоится на высоте $H = 175$ см. Найдите период малых изотермических колебаний поршня при выводе из этого положения равновесия. Считайте, что универсальная газовая постоянная равна $R \approx 8,31$ Дж/(кг·К), а температура абсолютного нуля по шкале Цельсия $t_0 \approx 273,15^\circ\text{C}$. Ответ запишите в секундах, с точностью до десятых.

Ответ: **2,2.**

Комментарий: В состоянии равновесия $Mg + p_0 \cdot S = p \cdot S = \frac{pV}{H} = \frac{\nu RT}{H}$. При малом отклонении

(на расстояние $x \ll H$) от положения равновесия уравнение движения поршня

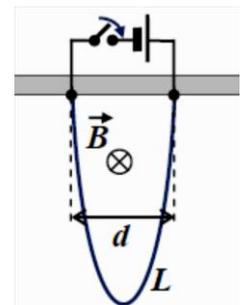
$$M\ddot{x} = p \cdot S - Mg - p_0 \cdot S = \frac{\nu RT}{H+x} - \frac{\nu RT}{H} \approx -\frac{\nu RT}{H^2} x$$

приводится к уравнению гармонических колебаний с циклической частотой $\omega = \frac{\sqrt{\nu RT}}{H\sqrt{M}}$. Значит,

период этих колебаний $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi H \sqrt{\frac{M}{\nu RT}} \approx 2,2$ с.

Вопрос 3 (10 баллов):

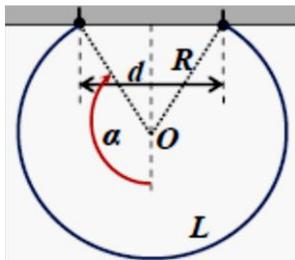
Очень легкий (с массой примерно 0,3-0,4 г) и гибкий провод подвешен за концы шарнирно к горизонтальному потолку. К этим шарнирам подведены провода, позволяющие подавать на них напряжение от аккумулятора (см. рисунок). В области пространства, в которой располагается провод, создано горизонтальное магнитное поле с индукцией $B = 0,5$ Тл, перпендикулярное плоскости его подвеса. Расстояние между точками подвеса провода равно $d = 30$ см, а его длина L ровно в $\frac{5\pi}{3} \approx 5,236$ раза больше. Ключ замыкают, и по проводу течет ток с силой $I = 36$



А. Найдите силу натяжения провода после установления равновесия. Ответ запишите в ньютонах, с точностью до десятых.

Ответ: 5,4.

Комментарий: При указанной массе на требуемом уровне точности действующей на провод силой тяжести (менее 0,004 Н) можно пренебречь. Невесомый гибкий провод в однородном магнитном поле примет форму дуги окружности некоторого радиуса R . Пусть α – половина углового размера этой дуги (см. рисунок). Тогда длина провода $L = 2R \cdot \alpha$. С другой стороны, длина хорды этой дуги соответствует расстоянию между шарнирами: $d = 2R \cdot \sin(\alpha)$. Таким образом, радиус кривизны провода в состоянии



равновесия определяется по значениям d и L из уравнения $d = 2R \cdot \sin\left(\frac{L}{2R}\right)$, а затем сила

натяжения провода находится из условия равновесия его малого элемента: $IBRd\alpha = 2T \sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right)$,

то есть $T = IBR$. Можно записать уравнение на α в виде $\frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = \frac{d}{L} = \frac{3}{5\pi}$, и заметить, что его

корень – это $\alpha = \frac{5\pi}{6}$, и при этом $d = R$. Значит, $T = IBd = 5,4$ Н.

Часть II (проверялись РЕШЕНИЯ). «ОДНАЖДЫ В ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ВСЕЛЕННОЙ».

Действие происходит в параллельной Вселенной, открытой для нас Айзеком Азимовым (см. серию рассказов «Я, робот»). Там тоже идет 2024 год, но там еще в XX веке был создан позитронный мозг, по своим возможностям не уступающий человеческому, создатель которого заложил в его физическую конструкцию три Закона Робототехники. Впрочем, это не имеет прямого отношения к нашим задачам. Итак, приступим...

Сьюзен Кэлвин сидела в кабинете доктора Альфреда Лэннинга, когда туда зашел Грегори Пауэлл.

– В информационной ленте мира, из которого выходил на контакт этот астрофизик... – начал он.

– Азимов. – терпеливо подсказал ему доктор Лэннинг.

– Да! – торопливо проговорил Пауэлл – Там дали Нобелевскую премию по физике за машинное обучение!

– Машинное обучение? – оживилась Сьюзен Кэлвин, – Быть может, это похоже на наш эксперимент, когда мы на начальном этапе обучаем группу роботов так, как когда-то обучали детей в школе, и только потом используем прямую загрузку информации?

– Вряд ли – сказал доктор Лэннинг, – Не забывайте, их машины снабжены электронными мозгами, работающими в основном по классическим принципам: максимум – туннельные переходы и спинтроника. Но я и сам когда-то начинал с попыток смоделировать нейронную сеть системой взаимодействующих квантовых частиц, и один из их лауреатов делал то же самое, только у него была модель спиновой решетки.

– Спиновая решетка? – переспросил Пауэлл, – Что это за штука?

– Но Вы должны знать: это система закрепленных частиц, каждая из которых – элементарный магнетик с моментом $\vec{\mu} = -\mu_0 \vec{s}$, где *атомный магнетон* (константа, записываемая через элементарный заряд, постоянную Планка и массу электрона) $\mu_0 = \frac{eh}{4\pi m}$, знак «минус» связан с тем, что в атомном магнетизме основную роль играют отрицательно заряженные электроны, а безразмерный вектор \vec{s} характеризует состояние частицы. В простом случае в магнитном поле с индукцией \vec{B} квантовая частица может находиться всего в двух состояниях с проекциями \vec{s} на направление магнитного поля +1 и -1, а взаимодействиями частиц между собой можно пренебречь.

– Тогда у половины частиц этот вектор будет направлен по полю, а у другой половины – против поля, и магнитный момент всей решетки будет равен нулю с точностью до флуктуаций, – важно заметил Пауэлл.

– Не торопитесь, – предостерег его доктор Лэннинг. – Если решетка находится при температуре T , то вероятности реализации разных микросостояний описываются статистикой Больцмана: вероятности иметь каждую из двух проекций s_B равны $w(s_B) = C \cdot \exp\left[-\frac{E(s_B)}{kT}\right]$, где C не зависит от s_B . Кстати, хотя второй из лауреатов, по-моему, не физик, но в одной из его работ тоже использовалась статистика Больцмана.

– Но ведь сумма двух вероятностей равна 1? – уточнила Сьюзен Кэлвин.

– Да, конечно, – ответил доктор Лэннинг и продолжил, – А энергия этих состояний $E(s_B) = -(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = \mu_0 B \cdot s_B$. Так что они вовсе не равновероятны. Кстати, Сьюзен, это может быть неплохой задачей для Ваших «школьников». Это важно – ведь при производстве позитронного мозга мы используем охлаждение некоторых элементов до низких температур за счет *адиабатического размагничивания* решеток магнитных кристаллов, а они в чем-то похожи на спиновые решетки. Только расскажите им про *энтропию*: им для начала достаточно будет знать, что в термодинамике это функция состояния системы микрочастиц S , бесконечно малое изменение которой связано с количеством теплоты, которое получила система при температуре T : $dS = \frac{1}{T} \delta Q$. И сообщите, что для спиновой решетки из N частиц в магнитном поле \vec{B} эта самая энтропия равна

$$S(T, B) = S_0(T) - \frac{kN}{2} \left[\frac{e^{\mu_0 B/kT} - e^{-\mu_0 B/kT}}{e^{\mu_0 B/kT} + e^{-\mu_0 B/kT}} \right]^2$$

– А $S_0(T)$?

– Это энтропия решетки без учета магнитных свойств – она им, в сущности, не понадобится. Пусть считают, что в нужных им процессах ее изменение пренебрежимо мало.

1. («Охлаждение намагниченной спиновой решетки», 18 баллов) Определите величину C и найдите вероятности реализации значений $s_B = \pm 1$ при температуре жидкого гелия $T_0 \approx 1,9$ К в магнитном поле $B = 10$ Тл. Вычислите среднее значение магнитного момента спиновой решетки из N частиц при этих значениях температуры и индукции поля. Рассмотрите процесс, в котором эту решетку сначала при постоянной температуре $T_0 \approx 1,9$ К намагнитили до создания магнитного поля $B = 10$ Тл, а затем адиабатически размагнитили до магнитного поля «остаточной» намагниченности, которая для этой решетки равна $B_0 = 5$ мТл. Какой примерно будет конечная температура решетки? Используйте данные:

- Атомный магнетон $\mu_0 = \frac{eh}{4\pi m} \approx 9,27 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл;
- Постоянная Больцмана $k \approx 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Возможное решение:

В соответствии с «подсказкой» Сьюзен Кэлвин, сумма $C \cdot \exp[+z] + C \cdot \exp[-z] = 1$, где $z \equiv \frac{\mu_0 B}{kT} \approx 3,535$. Следовательно:

$$C = \frac{1}{\exp[+z] + \exp[-z]} \approx 0,0291 \Rightarrow \begin{cases} w(+1) = \frac{\exp[-z]}{\exp[+z] + \exp[-z]} \approx 0,00085 \\ w(-1) = \frac{\exp[+z]}{\exp[+z] + \exp[-z]} \approx 0,99915 \end{cases}$$

Среднее значение проекции магнитного момента частицы на направление внешнего поля

$$\mu_{ср B} = \mu_0 [(+1) \cdot w(+1) + (-1) \cdot w(-1)] \approx -0,9983 \cdot \mu_0 \approx -9,25 \cdot 10^{-24} \text{ Дж/Тл.}$$

Так что среднее значение магнитного момента спиновой решетки из N частиц равно

$$M \approx 0,9983 \cdot \mu_0 N \approx 9,25 \cdot 10^{-24} \cdot N \text{ Дж/Тл.}$$

При анализе процесса адиабатического размагничивания достаточно заметить, что в соответствии с общенными свойствами энтропии она остается постоянной в адиабатическом

процессе ($\delta Q \Rightarrow dS = 0$), а из формулы для энтропии решетки следует, что при заданных приближениях постоянство энтропии означает постоянство B/T . Таким образом:

$$\frac{B}{T_0} = \frac{B_0}{T} \Rightarrow T = \frac{B_0}{B} T_0 \approx 0,95 \cdot 10^{-3} \text{К} \approx 1 \text{мК}.$$

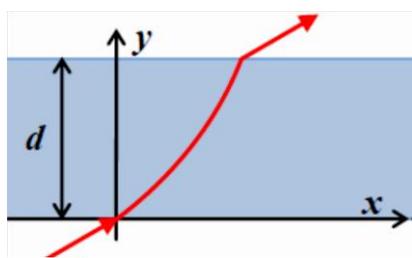
ОТВЕТЫ: $C = \frac{1}{\exp[+z] + \exp[-z]} \approx 0,0291$, вероятности $w(+1) = \frac{\exp[-z]}{\exp[+z] + \exp[-z]} \approx 0,00085$,
 $w(-1) = \frac{\exp[+z]}{\exp[+z] + \exp[-z]} \approx 0,99915$, $M \approx 0,9983 \cdot \mu_0 N \approx 9,25 \cdot 10^{-24} \cdot N$ Дж/Тл. Конечная температура решетки при размагничивании $T = \frac{B_0}{B} T_0 \approx 1 \text{мК}$.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

№	действие	макс. балл
1	Правильный анализ распределения частиц по значениям момента	8
	1.1 Указано (используется в решении), что сумма двух вероятностей реализации равна 1.	1
	1.2 Записано правильное выражение и получено правильное значение для C	1+1=2
	1.3 Правильно (с ошибкой менее 1 %) найдены вероятности реализации	1+1=2
	1.4 Правильно (с ошибкой менее 5 %, в долях μ_0 либо в Дж/Тл) вычислен момент решетки (допустимо указание проекции – со знаком «минус»); при «потере» N – минус один балл.	3
2	Правильно определена конечная температура адиабатического размагничивания	10
	2.1 Указано (используется в решении), что энтропия остается постоянной в адиабатическом процессе	2
	2.2 Явно указано, что в этом процессе постоянно B/T	3
	2.3 Получена правильная формула и правильное численное значение $T = \frac{B_0}{B} T_0 \approx 1 \text{мК}$.	2+2=4
ВСЕГО		18

– Кстати, а чем они у Вас сегодня занимаются? – спросил доктор Лэннинг.

– У них была лабораторная работа, - сообщила Сьюзен. – Они синтезировали прозрачные плоскопараллельные пластины, в которых показатель преломления изменяется в зависимости от



координаты y , отсчитываемой поперек пластины так, что узкий световой пучок идет по заданной кривой $y(x)$. Например, ученик S-401 синтезировал пластину, у которой луч, упавший из воздуха в начале координат под углом $\alpha_0 = 60^\circ$, «прочерчивает» внутри пластины толщиной d график функции $y(x) = x + \frac{x^2}{2d}$ (см. рисунок).

– И как же у этой пластины показатель преломления зависит от y ?

2. («Световая парабола», 15 баллов) Ответьте на вопрос доктора Лэннинга. Показатель преломления воздуха считайте равным 1.

Возможное решение:

При движении луча внутри пластины, в соответствии с законом Снелла:

$$n(y) \cdot \sin[\alpha(y)] = n_0 \cdot \sin(\alpha_0) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

где α – угол отклонения луча от оси y . С другой стороны,

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{x}{d} = \operatorname{ctg}(\alpha) = \sqrt{\frac{1 - \sin^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2(\alpha)} = 2 + 2\frac{x}{d} + \frac{x^2}{d^2} = 2\left(1 + \frac{y}{d}\right).$$

Следовательно,

$$n(y) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\left(1 + \frac{y}{d}\right)}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow n(y) = \sqrt{\frac{3}{2}\left(1 + \frac{y}{d}\right)}.$$

ОТВЕТ: $n(y) = \sqrt{\frac{3}{2}\left(1 + \frac{y}{d}\right)}$.

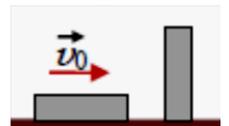
КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

№	действие	макс. балл
1	Правильно записаны исходные уравнения	6
	1.1 Закон Снелла правильно записан в форме связи угла отклонения от нормали к поверхностям $n = \operatorname{const}$ и показателя преломления.	3
	1.2 Записана правильная формула связи угла отклонения от нормали и производной уравнения луча.	3
2	Получение уравнения для зависимости показателя преломления от координаты.	9
	2.1 Записано правильное уравнение, связывающее угол отклонения от любой из осей с любой координатой	2
	2.2 Получена правильная связь угла α с y	3
	2.3 Получена правильная зависимость $n(y)$	4
ВСЕГО		15

– А еще двое экспериментировали с упругими нецентрными ударами.

– Это более сложная задача! – согласился доктор Лэннинг.

3. («Стержневой удар», 20 баллов) Гладкий однородный стержень длины L с квадратным поперечным сечением $a \times a$ установлен вертикально на гладкой горизонтальной поверхности. Второй такой же стержень скользит по этой поверхности со скоростью v_0 , направленной перпендикулярно одной из боковых граней первого, и сталкивается с первым так, что наносит своим торцом удар по этой грани. В каких направлениях и с какими угловыми скоростями будут вращаться стержни после удара?



Известно, что $a = 2L/7$, деформации всех тел считайте упругими, причем деформации стержней очень малы, и при этом намного больше деформаций поверхности.

Указание: Момент инерции однородного параллелепипеда массой m с размерами $a \times b \times c$ относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно грани $b \times c$, равен $I_0 = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$.

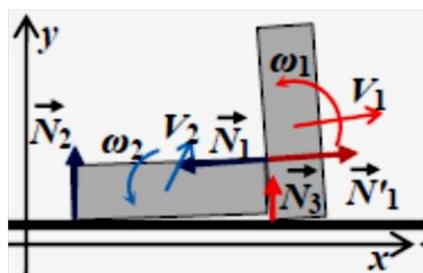
Возможное решение:

Данная задача является задачей с «частично открытой» моделью, что традиционно для олимпиады «ПВГ!» по физике.

При анализе удара мы должны понимать, что «малость» деформаций означает и малость времени соударений, что позволяет пренебрегать действием на тела в процессе удара всех «конечных» сил. Таким образом, нам нужно учитывать только «очень большие» силы (то есть те, которые стремятся к бесконечности в пределе нулевого времени соударения) – силы реакции. Учитывая условия гладкости все тел, приходим к выводу, что это силы нормальной реакции – между стержнями (N_1) и между ними и поверхностью (N_2 и N_3). Силы нормальной реакции всегда перпендикулярны поверхностям соприкосновения тел, но их распределение по

этим поверхностям могут изменяться в процессе удара для выполнения условий связи, возникающих при движении соприкасающихся тел. Конкретный вид условий связи сил реакции зависит от упругих свойств тел, а в предложенной задаче есть разные тела. Упругие свойства стержней, разумеется, одинаковы, а упругие свойства поверхности могут от них отличаться: единственная информация в условии, которая позволяет нам делать выводы о соотношении упругих свойств, содержится во фразе «деформации стержней очень малы, и при этом намного больше деформаций поверхности». С точки зрения методической комиссии олимпиады, это позволяет считать, что жесткость материала поверхности намного больше жесткости материала стержней, и поэтому процессы изменения сил $N_{2,3}$ намного быстрее, чем у N_1 . Тогда мы приходим к выводу, что в ходе удара изменение N_2 и N_3 «подстраиваются» под изменение N_1 таким образом, чтобы смещения точек поверхности можно было пренебрегать по сравнению с очень малыми смещениями точек стержней. Поэтому в рамках нашей модели мы будем считать, что перед отрывом стержней от поверхности вертикальная составляющая точки касания стержня и поверхности должна остаться равной нулю (хотя вертикальная составляющая скорости ЦМ обоих стержней должна иметь вертикальную составляющую благодаря действию сил N_2 и N_3). Договоримся конечные скорости центров масс стержней записывать в проекциях на горизонтальную ось x и вертикальную y , а положительным направлением вращения считать вращение против часовой стрелки (см. рисунок, на котором «пренебрежимо малые» смещения стержней в ходе удара для наглядности показаны конечными).

Начнем с вертикального стержня. Из геометрии удара сразу становится ясно, что этот стержень



после удара начнет вращаться против часовой стрелки (видно, что при противоположном направлении вращения он бы не нагружал поверхность, сила N_3 не появилась бы, а момент силы нормальной реакции со стороны горизонтального стержня N'_1 относительно центра масс вертикального явно положителен). В процессе старта такого вращения (перед началом поворота) силы нормальной реакции между стержнями должны

перераспределиться по поверхности их соприкосновения таким образом, чтобы они были сосредоточены в точке контакта «верхнего» ребра горизонтального стержня с вертикальным. Точно так же точки приложений сил реакции N_2 и N_3 должны во время удара стать сосредоточенными в точках контакта – там, где каждый из брусков должен «надавить» на поверхность в ходе движения, возникающего без учета этих сил). Поэтому, если $N_{1,2,3}$ – средние величины сил реакции за время удара Δt , то скорость центра масс и угловая скорость вращения вертикального стержня после удара удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} mV_{1x} = N_1 \cdot \Delta t \\ mV_{1y} = N_3 \cdot \Delta t \\ I\omega_1 = l \cdot N_1 \cdot \Delta t - \frac{a}{2} \cdot N_3 \cdot \Delta t \end{cases}$$

Здесь m – масса каждого стержня, момент инерции каждого стержня относительно горизонтальной оси вращения, проходящей через ЦМ, $I = \frac{1}{12}m(a^2 + L^2) = \frac{53}{48}ma^2$, а плечо силы реакции N'_1 равно $l = \frac{L}{2} - a = \frac{3}{4}a$. Для горизонтального стержня

$$\begin{cases} mV_{2x} = mv_0 - N_1 \cdot \Delta t \\ mV_{2y} = N_2 \cdot \Delta t \\ I\omega_2 = \frac{a}{2} \cdot N_1 \cdot \Delta t - \frac{L}{2} \cdot N_2 \cdot \Delta t \end{cases}$$

Как видно, условия связи для точек касания стержней с поверхностью

$$\begin{aligned} V_{1y} - \omega_1 \frac{a}{2} &= \left[\frac{N_3}{m} - \frac{a}{2I} \left(l \cdot N_1 - \frac{a}{2} \cdot N_3 \right) \right] \cdot \Delta t = 0, \\ V_{2y} - \omega_2 \frac{L}{2} &= \left[\frac{N_2}{m} - \frac{L}{2I} \left(\frac{a}{2} \cdot N_1 - \frac{L}{2} \cdot N_2 \right) \right] \cdot \Delta t = 0 \end{aligned}$$

дают нам связь «очень больших» сил реакции:

$$N_2 \left(1 + \frac{mL^2}{4I} \right) - N_1 \frac{maL}{4I} = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{maL}{4I + mL^2} N_1 = \frac{3aL}{a^2 + 4L^2} N_1 \equiv \varepsilon N_1,$$

$$N_3 \left(1 + \frac{ma^2}{4I} \right) - N_1 \frac{ma(L-2a)}{4I} = 0 \Rightarrow N_3 = \frac{ma(L-2a)}{4I + ma^2} N_1 = \frac{3a(L-2a)}{4a^2 + L^2} N_1 \equiv \eta N_1.$$

Подсчет дает, что $\varepsilon \equiv \frac{3aL}{a^2+4L^2} = \frac{21}{100}$, $\eta \equiv \frac{3a(L-2a)}{4a^2+L^2} = \frac{18}{65}$. С учетом этих условий связи мы можем выразить все конечные скорости и угловые скорости через $V_{1x} \equiv V$:

$$V_{1y} = \frac{18}{65}V, V_{2x} = v_0 - V, V_{2y} = \frac{21}{100}V, \omega_1 = \frac{36}{65a}V, \omega_2 = \frac{564}{1325a}V.$$

Подставляя эти соотношения в закон сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2}(V_1^2 + V_{2x}^2 + V_{2y}^2) + \frac{I}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2)$$

находим, что $V = V_{1x} = \frac{2756000}{3664853}v_0 \approx 0,752 \cdot v_0$.

Таким образом, угловые скорости вращения стержней после удара

$$\omega_1 = \frac{1526400}{3664853} \frac{v_0}{a} \approx 0,4165 \frac{v_0}{a}, \quad \omega_2 = \frac{117312}{3664853} \frac{v_0}{a} \approx 0,0320 \frac{v_0}{a}.$$

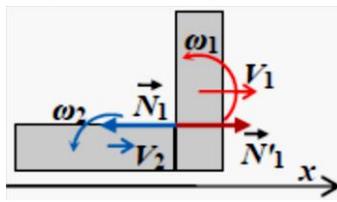
Как видно, оба стержня после удара вращаются против часовой стрелки ($\omega_{1,2} > 0$).

ОТВЕТЫ: оба стержня после удара вращаются против часовой стрелки, величины угловых скоростей $\omega_1 = \frac{1526400}{3664853} \frac{v_0}{a}$ и $\omega_2 = \frac{117312}{3664853} \frac{v_0}{a}$. Допускались вычисления с разумными округлениями в промежуточных результатах.

Примечание: Если ввести другие предположения об упругих свойствах тел, можно построить и другие модели удара, приводящие к другим связям между силами реакции. Жюри олимпиады при оценке альтернативных моделей будет исходить из оценки их корректности и «разумности» с точки зрения физики. В первую очередь могут считаться «разумными» модели, в которых явно указано, какие модельные предположения использованы, как они обоснованы в рамках условия задачи, и как они порождают соотношения между силами реакции. Модели, не удовлетворяющие этим требованиям, рассматриваются как «грубые», и максимальная оценка решения, построенная на основе таких моделей, не может превышать **9 баллов** (см. критерии).

Приведем некоторые примеры альтернативных моделей.

Пример 1: *Корректная модель, не согласующаяся с предложенным приближением.* Введем предположение, противоположное заданному в условии. Пусть деформации поверхности очень малы, но намного больше, чем деформации стержней. Теперь стержни значительно «жестче» поверхности, и их соударение происходит намного быстрее. Таким образом, в ходе соударения стержней поверхность только начала деформироваться, и сила реакции N_2 осталась «конечной».



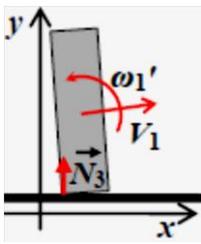
Тогда при ударе стержней ее можно не учитывать, и в результате тройное соударение стержней и поверхности можно рассматривать как два последовательных парных: сначала, пренебрегая влиянием поверхности, мы рассматриваем удар стержней, а затем – соударение стержней с поверхностью. Первый удар описывается теми же

соотношениями с $N_{2,3} = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} mV_1 = N_1 \cdot \Delta t \\ I\omega_1 = \frac{3}{4}a \cdot N_1 \cdot \Delta t \\ mV_{2x} = mv_0 - N_1 \cdot \Delta t \\ I\omega_2 = \frac{a}{2} \cdot N_1 \cdot \Delta t \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \frac{36}{53} \frac{V_1}{a} \\ V_{2x} = v_0 - V_1 \\ \omega_2 = \frac{24}{53} \frac{V_1}{a} \end{array} \right.$$

и при этом $V_{2y} = 0$. В этом случае ЗСЭ дает $V_1 = \frac{106}{145}v_0$, и $\omega_1 = \frac{72}{145} \frac{v_0}{a}$, $V_{2x} = \frac{39}{145}v_0$, $\omega_2 = \frac{48}{145} \frac{v_0}{a}$.

При «вторых» ударах на стержни действуют силы N_2 и N_3 , направленные вертикально. Значит, V_{1x} V_{2x} больше изменяться не будут. Изучим теперь второй удар вертикального стержня. Для него изменения V_{1y} и ω_1 удовлетворяют соотношениям

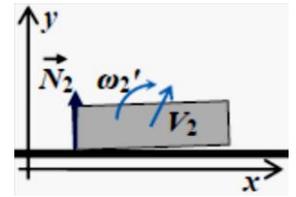


$$\left\{ \begin{array}{l} mV_{1y} = N_3 \cdot \Delta t' \\ I\omega'_1 = I\omega_1 - \frac{a}{2} \cdot N_3 \cdot \Delta t' \end{array} \right\} \Rightarrow \omega'_1 = \omega_1 - \frac{24}{53} \frac{V_{1y}}{a}$$

Закон сохранения энергии для этого удара $\frac{I}{2} \omega_1^2 = \frac{I}{2} \omega'^2_1 + \frac{m}{2} V_{1y}^2$ дает $V_{1y} = \frac{3816}{9425} v_0$,
и $\omega'_1 = \frac{2952}{9425} \frac{v_0}{a} \approx 0,313 \frac{v_0}{a}$.

Для второго удара горизонтального стержня:

$$\left\{ \begin{array}{l} mV_{2y} = N_2 \cdot \Delta t' \\ I\omega'_2 = I\omega_2 - \frac{L}{2} \cdot N_2 \cdot \Delta t' \end{array} \right\} \Rightarrow \omega'_2 = \omega_2 - \frac{84}{53} \frac{V_{2y}}{a}$$

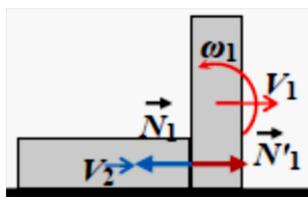


Аналогично $\frac{I}{2} \omega_2^2 = \frac{I}{2} \omega'^2_2 + \frac{m}{2} V_{2y}^2$ дает $V_{2y} = \frac{1113}{3625} v_0$, и $\omega'_2 = -\frac{564}{3625} \frac{v_0}{a} \approx -0,156 \frac{v_0}{a}$. Как видно, изменились не только величины угловых скоростей, но и направление вращения горизонтального бруска после удара!

ОТВЕТЫ': вертикальный стержень после удара вращается против часовой стрелки с угловой скоростью $\omega_1 = \frac{2952}{9425} \frac{v_0}{a} \approx 0,313 \frac{v_0}{a}$, горизонтальный – по часовой стрелке с угловой скоростью $\omega_2 = \frac{564}{3625} \frac{v_0}{a} \approx 0,156 \frac{v_0}{a}$. При таком решении не засчитывается только пп. 1.2, а остальные пункты при правильном решении оцениваются полностью, так что за такое решение жюри выставило **18 баллов**.

Сопоставление полученных ответов приводит нас к важному выводу. Мы обнаружили, что характер вращения вертикального стержня слабо зависит от модели – изменение предположения о соотношении характеристик, описывающих упругие свойства тел, на прямо противоположные изменяет лишь величину его скорости и угловой скорости, и в целом не очень существенно. Зато характер вращения горизонтального стержня после окончания удара очень существенно зависит от этого соотношения – вплоть до изменения направления. Интуитивно понятно, что при произвольном соотношении этих характеристик ответ для ω_2 должен быть «где-то между» этими «крайними» случаями. А это означает, что он может отличаться очень значительно для разных материалов. На самом деле ситуация еще более сложная: как мы видели, деформации тел в процессе нашего удара – это комбинация деформаций разного типа (то есть это не только деформации сжатия, но и деформации сдвига), для которых характеристики упругих свойств материалов (модули Юнга и модули сдвига) могут быть разными. Так что при произвольных упругих свойствах материалов стержней и поверхности решение задачи становится очень сложным: нам нужно иметь полную информацию о структуре материалов и провести сложный (и явно «нешкольный») расчет динамики деформаций. Можно сделать вывод: без предположений о соотношении деформаций тел решение задачи в предложенном виде невозможно. Поэтому в условие задачи такое предположение было включено, и методическая комиссия и жюри олимпиады считают очень важным при оценке решений участников исходить из того, как участник его использовал.

Пример 2: «Грубая» модель. Будем считать, что перераспределения сил реакции в процессе удара не происходит, и точкой приложения равнодействующей сил нормальной реакции



брусков в ходе удара является центр площади соприкосновения. Сразу отметим: «грубость» этой модели по сравнению с разобранными выше состоит в том, что мы принимаем это предположение без какого-либо обоснования, то есть не анализируя его связь с упругими свойствами тел. Мы фактически предполагаем, что эти свойства таковы, чтобы обеспечить нам возможность максимально простого анализа удара. Действительно, в этом случае горизонтальный брусок не начинает вращаться, и сила реакции N_2 осталась «конечной» в течение всего соударения. Если мы еще и пренебрежем тем, что вертикальный брусок после начала такого движения «зацепляется» за поверхность, то и N_3 останется «конечной». В этом случае нам даже не нужно анализировать геометрию и динамику соударения – достаточно

системы законов сохранения, в которой к законам сохранения импульса и энергии добавляется закон сохранения момента импульса:

$$\left\{ \begin{array}{l} mV_1 + mV_2 = mv_0 \\ I\omega_1 + mV_2 \cdot \frac{5}{4}a = mv_0 \cdot \frac{5}{4}a \\ \frac{m}{2}v_0^2 = \frac{m}{2}(V_1^2 + V_2^2) + \frac{I}{2}\omega_1^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_2 = \frac{75}{181}v_0 \\ V_1 = \frac{106}{181}v_0 \\ \omega_1 = \frac{120}{181} \frac{v_0}{a} \approx 0,663 \frac{v_0}{a} \end{array} \right.$$

Ясно, что расчет на базе законов сохранения был возможен и в примере 1, только там их нужно было бы записать последовательно для «первого» и «вторых» ударов.

Полезно обратить внимание, что в таком решении влияние поверхности на ответ вообще исчезло, что явно указывает нам на некоторую «нефизичность» модели.

ОТВЕТЫ'': вертикальный стержень после удара вращается против часовой стрелки с угловой скоростью $\omega_1 = \frac{120}{181} \frac{v_0}{a} \approx 0,663 \frac{v_0}{a}$, горизонтальный – не вращается.

Отметим, что для ω_1 и здесь получается ответ, не слишком сильно отличающийся от ответа «авторской» модели, а ответ для ω_2 отличается радикально. Это решение, согласно критериям, при полностью правильном выполнении оценивалось в **8 баллов**.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

№	действие	макс. балл
1	Формулировка используемой в решении модели.	5
	1.1 Описано (используется в решении) ограничение на движение стержней после удара, следующее из малости деформаций	1
	1.2 Явно описано, как используется в построении модели информация из условия о соотношении деформаций	2*
	1.3 Указано, как в рамках предложенной модели определяются направления и точки приложения сил реакции	1+1=2*
2	Запись полной системы уравнений, необходимой для нахождения угловых скоростей вращения.	9
	2.1 Правильно записаны <u>все</u> независимые уравнения, следующие из законов сохранения и (или) изменения импульса	2
	2.2 Записаны (в рамках используемой корректной модели) условия связи на движение стержней	1+1=2*
	2.3 Условие приведено к виду, позволяющему использовать его при решении возникшей системы уравнений	2*
	2.4 Правильно записан закон сохранения энергии, включающий в себя энергии вращения обоих стержней	1
	2.5 Полученная система сведена к одному или двум правильным уравнениям, с помощью которых находятся угловые скорости	2
3	Получение ответов.	6**
	3.1 Правильно (в рамках используемой корректной модели) определены направления вращения стержней.	1+1=2
	3.2 Получен правильный (в рамках используемой корректной модели) ответ для $\omega_1 \approx (0,42 \pm 0,03) \frac{v_0}{a}$	2
	3.3 Получен правильный (в рамках используемой корректной модели) ответ для $\omega_2 \approx (0,032 \pm 0,003) \frac{v_0}{a}$	2
	ВСЕГО	20

*Не ставится в «грубых» моделях.

**В «грубых» моделях выставляется не более половины баллов.

В кабинет вернулся ушедший было Грегори Пауэлл. Он обратился к Сьюзен Кэлвин:

– Ну вот, два Ваших «школьника» собрались на экскурсию в заповедник Истории. Они хотят облететь его за один день, а дирекция заповедника строго запрещает использование гипердвигателя! Они требуют использовать средство передвижения на реактивной тяге!

– Но это же очень шумно! – поморщилась та.

– А они говорят, что это поможет созданию правильной атмосферы. Хуже другое: таких уже давно не делают, и придется им срочно изготовить парочку двигателей.

– Ничего, справитесь! – улыбнулся доктор Лэннинг. – Пусть сами ученики Вам помогут.

4. («Скорость истечения», 22 балла) В реактивном двигателе в камеру сгорания поступают топливо и окислитель (пусть в нашем случае в качестве окислителя используется кислород воздуха), а потом продукты горения через сопло вырываются наружу, формируя реактивную струю. Одной из важных характеристик реактивного двигателя является *скорость истечения* реактивной струи из сопла. На самом деле она довольно сложным образом зависит от характеристик топлива, геометрии камеры сгорания и сопла, и даже от условий запуска двигателя. Но мы постараемся построить *полуэмпирическую модель* для ее вычисления для конкретного типа топлива и конкретной конструкции двигателя, работающего в определенных режимах. Вам предлагается в рамках этой модели использовать следующие предположения:

- Горение топлива происходит на определенной поверхности и является квазиравновесным процессом, и поэтому на этой *поверхности горения топлива* температура T и давление p будут связаны *уравнением Клапейрона – Клаузиуса*: $\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T\Delta v}$, в котором L – молярная теплота испарения топлива, а Δv – изменение молярного объема при фазовом переходе, причем объемом жидкого топлива можно пренебрегать по сравнению с объемом образовавшихся газообразных продуктов горения. При этом для описания изучаемых нами режимов горения с удовлетворительной точностью можно вместо переменной молярной теплоты испарения использовать некоторое среднее значение $L \approx 8,2$ кДж/моль.
- Зависимость массового расхода топлива $\frac{dm}{dt} \equiv \dot{m}$ на поверхности горения от температуры определяется *уравнением Аррениуса*, которое в нашем случае удобно записать в дифференциальной форме: $\frac{d\dot{m}}{dT} = \dot{m} \frac{E_a}{RT^2}$, и при этом *энергию активации* для используемого топлива можно считать примерно постоянной и равной $E_a \approx 20,5$ кДж/моль.
- Скорость истечения примерно равна скорости удаления газообразных продуктов реакции от поверхности горения. Эмпирическая «подгонка» модели осуществляется подбором зависимости *эффективной площади* поверхности горения от давления – мы будем моделировать эту зависимость линейной во всем интересующем нас диапазоне.

Пусть тестовые эксперименты показали, что в режиме, в котором давление вблизи поверхности горения равно $p_1 = 1,6$ МПа, скорость истечения $u_1 \approx 1,6$ км/с, а при $p_2 = 2,0$ МПа скорость истечения $u_2 \approx 3,1$ км/с.

Рабочее давление вблизи поверхности горения для этого двигателя равно $p = 2,3$ МПа. В рамках предлагаемой модели установите характер зависимости скорости истечения от давления и рассчитайте скорость истечения реактивной струи в рабочем режиме. Возможно ли в рамках этой модели провести анализ работы двигателя в режиме с давлением $p' = 3,75$ МПа на поверхности горения (ответ объяснить)?

Возможное решение:

В соответствии с условием, изменение молярного объема при испарении топлива на поверхности горения примерно равно молярному объему газообразных продуктов горения, для которых можно использовать уравнение Менделеева-Клапейрона, и поэтому

$$\Delta v \approx v_g = \frac{V}{\nu} = \frac{RT}{p} \Rightarrow \frac{dp}{dT} = \frac{L}{RT^2} p.$$

Комбинируя это соотношение с уравнением Аррениуса из условия, мы можем найти связь массового расхода топлива с давлением вблизи поверхности горения. Действительно, разделив их друг на друга, получаем после интегрирования:

$$\frac{d\dot{m}}{dp} = \frac{E_a}{L} \frac{\dot{m}}{p} \Rightarrow \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = k \frac{dp}{p} \Rightarrow \ln(\dot{m}) = \text{const} + \ln(p) \Rightarrow \dot{m} = \dot{m}_0 \cdot \left(\frac{p}{p_0}\right)^k.$$

Показатель степени в этом уравнении $k \equiv \frac{E_a}{L} \approx 2,5$. С другой стороны, в рамках предложенных приближений массовый расход можно связать с увеличением объема, скоростью истечения u и эффективной площадью поверхности горения S :

$$u \cdot S = \frac{\dot{m}}{\rho_r} = \frac{RT}{\mu p} \dot{m}.$$

Используем рекомендованное приближение, согласно которому эффективная площадь может быть записана как линейная функция давления $S = S_0 \left[1 + \gamma \frac{p-p_0}{p_0}\right]$ (зависимость выбрана так, что содержит параметр γ , который нужно подобрать из данных эксперимента, и дает значение S_0 в некоторой «начальной» точке – при $p = p_0$). Кроме того, проинтегрируем уравнение Клапейрона-Клаузиуса, используя постоянство молярной теплоты испарения:

$$\frac{dp}{p} = \frac{L}{R} \frac{dT}{T^2} \Rightarrow \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{L}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right) \Rightarrow T(p) = \frac{T_0}{1 - \frac{RT_0}{L} \ln\left(\frac{p}{p_0}\right)}.$$

Объединяя полученные результаты, получаем **модельную зависимость** скорости истечения от давления:

$$u(p) = \frac{1}{S_0(1 + \gamma x)} \frac{RT}{\mu p} \dot{m} \equiv \frac{u_0}{(1 + \gamma x)[1 - \beta \cdot \ln(1 + x)]} (1 + x)^{\frac{3}{2}},$$

в которой введена безразмерная переменная $x \equiv \frac{p-p_0}{p_0}$ и введено обозначение $\beta \equiv \frac{RT_0}{L}$. Как видно, эта формула содержит три параметра, которые следует подбирать из экспериментальных данных (u_0 , β и γ), а в нашем распоряжении есть только два экспериментальных значения скорости истечения. Так что «прямолинейное» выполнение программы построения полуэмпирической формулы для нас оказалась недоступно. В такой ситуации возможны как минимум три пути дальнейших действий:

- 1) Из физических соображений выбрать еще одно значение давления, при котором нам будет известно разумное значение скорости истечения или одного из параметров.
- 2) Упростить модельную зависимость так, что она будет содержать только два параметра.
- 3) Выразить два параметра через третий и выбрать его так, чтобы ошибки в двух заданных точках были минимальны (например, минимизируя сумму квадратов отклонений – такой метод называют «методом наименьших квадратов»).

Продемонстрируем возможное использование первого пути. При низких температурах (в отсутствии горения) давление в камере должно быть равно атмосферному. Логарифмическая зависимость $T = \frac{T_0}{1 - \frac{RT_0}{L} \ln\left(\frac{p}{p_0}\right)}$, связывающая температуру с давлением, изменяется довольно медленно, так что при оценочных вычислениях не так важно, какую конкретно «низкую» температуру мы сопоставим давлению 1 Атм. Например, если принять $T_0 \approx 273$ К при $p_0 \approx 101$ кПа, то $\beta \equiv \frac{RT_0}{L} \approx 0,277$. Используя два известных значения скорости истечения, находим содержащиеся в этой формуле параметры u_0 и γ .

$$\frac{u_2}{u_1} \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{3/2} \left[\frac{1 - \beta \cdot \ln(1 + x_2)}{1 - \beta \cdot \ln(1 + x_1)}\right] = \frac{1 + \gamma x_1}{1 + \gamma x_2} \approx 1,02186 \Rightarrow \gamma \approx -0,005$$

(здесь $x_1 \approx 14,84$ и $x_2 \approx 18,80$, и в промежуточных выкладках оставлено существенно больше знаков, чем должна обеспечивать точность приближения). После этого по любому из значений находим $u_0 \approx 5,55$ м/с. Таким образом, наша формула имеет вид

$$u(p) \approx \frac{5,55 \text{ м/с}}{(1 - 0,005 \cdot x)[1 - 0,277 \cdot \ln(1 + x)]} (1 + x)^{\frac{3}{2}}.$$

Для рабочего режима $x \approx 21,77$ и поэтому $u \approx 5,0$ км/с. При этом небольшие «разумные» вариации выбранной «реперной точки» (например, если положить $T_0 \approx 300$ К) не очень существенно изменяют ответ.

Отметим, что $\beta \cdot \ln(1 + x_1) \approx 0,765$, а $\beta \cdot \ln(1 + x_2) \approx 0,827$, и даже $\beta \cdot \ln(1 + x) \approx 0,866$. Как мы видим, множитель, содержащий логарифм, в исследованном интервале давлений действительно изменяется довольно медленно. Это означает, что в принципе можно было пойти и по пути 2: упростить модель, пренебрегая изменением этого множителя (то есть пренебрегая изменением температуры при заданном измерении давления, ссылаясь на медленность ее изменения). В таком подходе мы обошлись бы без предположения о том, что давление в камере равно атмосферному примерно при 0°C . В этом случае, как нетрудно заметить, мы должны были использовать модельную зависимость вида (здесь сразу учтено, что коэффициент при степенном множителе должен расти при росте x)

$$u(p) = \frac{\tilde{u}_0}{(1 - \alpha x)} (1 + x)^{\frac{3}{2}},$$

и тогда подбор по двум точкам дает $\alpha \approx 0,0344$ и $\tilde{u}_0 \approx 12,4$ м/с. В этом случае ответ для скорости истечения в рабочем режиме

$$u(p) = \frac{12,4 \text{ м/с}}{(1 - 0,0344 \cdot x)} (1 + x)^{\frac{3}{2}} \approx 5,365 \text{ км/с.}$$

Как видно, итоговое значение скорости истечения в рабочем режиме изменилось, но не очень существенно (примерно на 7%). Третий путь технически более сложен, но его корректное использование приводит к похожим ответам – в районе $u(p) \approx 6$ км/с.

Для значения давления $p' = 3,75$ МПа $x' \approx 36,13$ и в обеих формулах – более точной (с учетом изменения температуры на поверхности горения) и в более простой (без учета) – в знаменателе появляются отрицательные значения (то есть еще при меньших давлениях знаменатель обращался в ноль), что явно «нефизично» и указывает на то, что мы вышли за пределы применимости обеих моделей, так что ни одну из них использовать для просчета этого режима нельзя.

ОТВЕТЫ: зависимость скорости истечения от давления для этого типа топлива и конструкции двигателя описывается выражением $u(p) \approx \frac{5,55 \text{ м/с}}{(1 - 0,005 \cdot x)[1 - 0,277 \cdot \ln(1 + x)]} (1 + x)^{\frac{3}{2}}$, где $x \equiv \frac{p - p_0}{p_0}$, а $p_0 \approx 101$ кПа. Скорость истечения в рабочем режиме $u \approx 5,0$ км/с. Для анализа работы двигателя в режиме с давлением $p' = 3,75$ МПа на поверхности горения эту модель использовать нельзя.

Примечание: Эта задача в основном – задача на построение и анализ модели физического процесса. Следует обратить внимание, что в условии было предложено построить *полуэмпирическую модель*, а не эмпирическую (такое задание было у 7-9 и 10 классов). Более того, были заданы физические законы и приближения, которые на приемлемом уровне точности описывают конкретный двигатель с конкретным типом топлива. Поскольку в условии нет другой информации о двигателе и топливе, то использование других соображений и других предположений (кроме самых естественных – типа использования уравнения Менделеева-Клапейрона для газообразных продуктов горения; кроме того, косвенно об этой возможности в условии тоже сообщалось во фразе «объемом жидкого топлива можно пренебрегать по сравнению с объемом образовавшихся газообразных продуктов горения») означало изменение условия задачи. Поэтому при проверке приоритет отдавался решениям, в которых использовался именно заданный в условии набор предположений. Например, в условии была рекомендована линейная связь эффективной площади поверхности горения с давлением. Даже при скудном наборе экспериментальных данных (две точки) видно, что при степенной аппроксимации мы получаем степень роста скорости истечения при росте давления явно выше 2,5. С учетом медленного изменения логарифмического множителя, по мнению методической комиссии, это указывало на то, что в предложенном двигателе с заданным топливом в

интересующем нас интервале значений давления эффективная площадь убывает с ростом давления, так что замена общей линейной зависимости на прямую пропорциональность качественно изменяет модель. Нам приходится «вытягивать» степень роста за счет увеличения роли множителя, содержащего логарифм. Как можно заметить, с точки зрения заданной модели процесса это означает предположение, что давление вблизи поверхности горения равно атмосферному при температуре заметно выше «комнатных». Это выглядит не очень естественно, и жюри считало это недостатком такой «альтернативной» модели, хотя и не очень значительным, ибо численные значения скорости истечения в рабочем режиме и границы применимости модели получаются не слишком отличающимися от того, что получается в более корректных моделях. В зависимости от наличия обоснования и качества исполнения за правильное решение в рамках такого подхода жюри выставяло **от 14 до 17 баллов**. В основном в этом же диапазоне получались (в соответствии с критериями – здесь члены жюри в основном тоже ориентировались на корректность обоснования для «упрощения» модели и на отсутствие неточностей) оценки работ, в которых использовались другие способы «упрощения» модели (второй путь в приведенном решении). В части работ заданные приближения использовались в небольшой степени или даже не использовались вовсе. Такие модели считались некорректными, и в этом случае баллы за критерии части 1 (построение модели) не начислялись, и даже при «удачном» (но необоснованном с точки зрения физики) выборе аппроксимирующей формулы и получении разумных результатов за такое решение выставялось не более **8 баллов**.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

№	действие	макс. балл
1	Построение модельной формулы для скорости истечения газа.	11
	1.1 В рамках модели получена степенная связь массового расхода с давлением вида $\dot{m} = \dot{m}_0 \cdot \left(\frac{p}{p_0}\right)^{5/2}$	2
	1.2 Записана связь скорости истечения с массовым расходом, эквивалентная $u \cdot S = \frac{\dot{m}}{\rho_r} = \frac{RT}{\mu p} \dot{m}$	1+1=2
	1.3 Записано используемое выражение для эффективной площади поверхности горения в виде линейной функции давления	1
	1.4 Из уравнения Клапейрона-Клаузиуса найдена связь температуры на поверхности горения с давлением.	2
	1.5 Используется разумная «реперная точка» зависимости температуры от давления – например, температура в районе 0°C – 30 °C для 1 Атм.	1
	1.6 Получена аналитическая модельная формула для $u(p)$ с <u>двумя</u> «эмпирическими» параметрами	3*
2	Подбор численных параметров формулы.	5
	2.1 Записаны соотношения для определения параметров формулы	1
	2.2 Корректно найден один параметр в модельной формуле	2
	2.3 Корректно найден второй параметр в модельной формуле.	2
3	Определение скорости истечения и анализ применимости.	6
	3.1 Получено численное значение скорости истечения в рабочем режиме в интервале от 4,8 км/с до 5,5 км/с (для интервала (4,6-6,0) км/с – 2 балла , для интервала (4,2-6,5) км/с – 1 балл).	3
	3.2 Есть вывод о неприменимости модели для описания режима с давлением p'	1
	3.3 Этот вывод обоснован	2
ВСЕГО		22

*Для «простой» модели – 2 балла.