

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!» ПО ФИЗИКЕ.

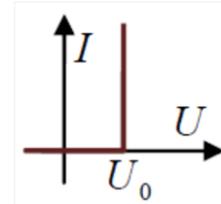
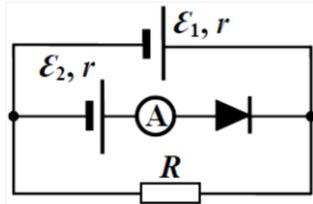
2024/25 учебный год, ЗАДАНИЕ ЗАОЧНОГО ТУРА. 10 классы.

**ВОЗМОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ.**

**Часть I: проверялись только ответы. Пример варианта:**

**Вопрос 1 (7 баллов):**

В схеме, показанной на рисунке слева, диод открывается при ненулевом напряжении  $U_0 = 1$  В (его вольт-амперная характеристика показана на рисунке справа). Значения параметров схемы:  $\mathcal{E}_1 = 6$  В,  $\mathcal{E}_2 = 7$  В,  $r = 0,5$  Ом,  $R = 3,5$  Ом. Каковы показания амперметра? Ответ запишите в амперах, с точностью до десятых.



Ответ: **0,8**.

**Комментарий:** Предположим, что диод открыт, и вычислим силу тока через него. Из закона Ома для трех ветвей нашей схемы с учетом непрерывности тока следует:

$$(I_1 + I_2)R = \mathcal{E}_1 - I_1 r = \mathcal{E}_2 - I_2 r - U_0.$$

Решая эту систему относительно  $I_2$  (это и есть искомая сила тока), получаем, что

$$I_2 = \frac{(\mathcal{E}_2 - U_0)(R + r) - \mathcal{E}_1 R}{r(2R + r)} = +0,8 \text{ А.}$$

Значит, предположение оправдалось, и диод действительно открыт.

**Вопрос 2 (8 баллов):**

У трубки постоянного сечения длиной  $L = 1600$  мм один из концов – запаянный, а второй открыт в атмосферу. Трубку расположили вертикально, открытым концом вверх и налили в нее ртуть таким образом, что столбик ртути, составляющий 12 % от длины трубки, располагался внизу (начинаясь от запаянного конца). Открытый конец трубки закрыли крышкой, аккуратно ее перевернули и так же аккуратно убрали крышку. Часть ртути вылилась, и в новом положении равновесия при прежней температуре длина оставшегося столбика ртути составляла уже 4 % от длины трубки. При каком атмосферном давлении проводился опыт (считайте, что оно оставалось неизменным)? Ответ запишите в мм.рт.ст., с точностью до целого значения.

Ответ: **768**.

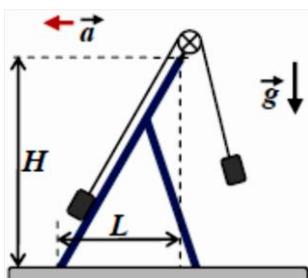
**Комментарий:** Перед переворотом давление воздуха в трубке сечением  $S$  равнялось  $p_A$ , и он занимал объем  $S \cdot L(1 - x)$ . В конечном состоянии воздух занимал объем  $S \cdot L(1 - y)$ , а его давление определялось из условия равновесия столбика ртути:  $p = p_A - \rho g L y$ . Поскольку температура воздуха не изменилась, то

$$(p_A - \rho g L y) S \cdot L(1 - y) = p_A S \cdot L(1 - x) \Rightarrow p_A = \rho g L \frac{y(1 - y)}{x - y} = 768 \text{ мм.рт.ст.}$$

**Вопрос 3 (10 баллов):**

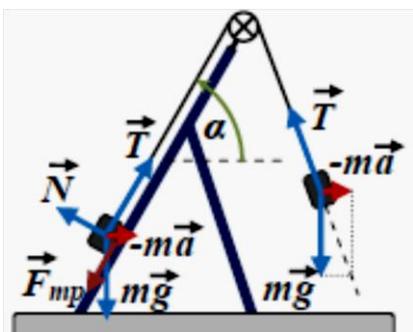
Допустим, что нам нужен механический датчик контроля ускорения, который «срабатывает» при превышении некоторого критического его значения. Датчик нужно установить на скоростной модели электромобиля, который будет ездить по прямой горизонтальной трассе в тоннеле, в котором почти полностью откачан воздух. Предлагается

установить на электромобиле наклонную поверхность с двумя тяжелыми грузами одинаковой массы, соединенными легким и почти нерастяжимым тросом. Один груз помещается на наклонную поверхность, трос перекидывается через легкий блок, закрепленный на конце поверхности (участок троса при этом параллелен поверхности), а второй груз висит свободно (см. рисунок). Высота наклонной поверхности  $H = 35$  см, ее горизонтальная проекция  $L = 15$  см, поверхность понижается вперед по ходу электромобиля. Известно, что коэффициент трения между первым грузом и поверхностью  $\mu = 3/7$ . Найдите критическое значение ускорения, на которое рассчитан этот датчик. Ускорение свободного падения примите равным  $g \approx 9,8$  м/с<sup>2</sup>. Ответ запишите в м/с<sup>2</sup>, с точностью до десятых.



Ответ: 4,2.

**Комментарий:** Понятно, что датчик «срабатывает», когда первый груз начинает скользить вверх по наклонной поверхности. Проведем анализ равновесия груза в неинерциальной



системе отсчета, двигающийся с постоянным ускорением, равным ускорению автомобиля. В НИСО к реальным силам добавляются силы инерции, и участок троса, к которому прикреплен второй груз, отклоняется от вертикали, и сила натяжения троса  $T = m\sqrt{g^2 + a^2}$ . Для обеспечения равновесия первого груза действующая на него сила трения должна быть равна  $F_{mp} = T + ma \cdot \cos(\alpha) - mg \cdot \sin(\alpha)$ . При критическом значении ускорения эта сила достигает

максимального значения силы трения покоя, которое мы считаем равным  $\mu N = \mu m[a \cdot \sin(\alpha) + g \cdot \cos(\alpha)]$ . Таким образом, критическое значение ускорения определяется из уравнения

$$\begin{aligned} \sqrt{g^2 + a^2} + a \cdot \cos(\alpha) - g \cdot \sin(\alpha) &= \mu[a \cdot \sin(\alpha) + g \cdot \cos(\alpha)] \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{g^2 + a^2} &= g[\mu \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha)] + a[\mu \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha)]. \end{aligned}$$

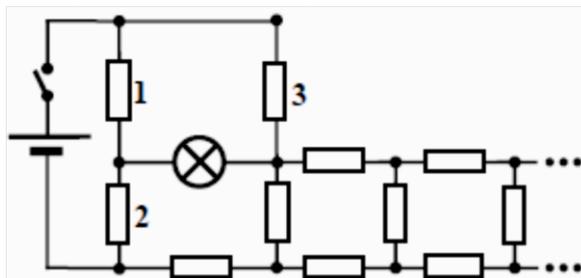
Значения тригонометрических функций угла наклона поверхности  $\sin(\alpha) = \frac{H}{\sqrt{H^2+L^2}} = \frac{7}{\sqrt{58}}$  и

$\cos(\alpha) = \frac{L}{\sqrt{H^2+L^2}} = \frac{3}{\sqrt{58}}$ , и поэтому при заданном значении  $\mu$

$$\begin{cases} \mu \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{58}}{7} \\ \mu \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha) = 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{g^2 + a^2} = \frac{\sqrt{58}}{7} g \Rightarrow a = \frac{3}{7} g \approx 4,2 \text{ м/с}^2.$$

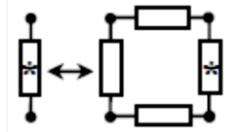
## Часть II (проверялись РЕШЕНИЯ)..

**1. («Разные мощности», 14 баллов)** В школьной лаборатории ученики собрали цепь, схема которой показана на рисунке, из аккумулятора, ключа, лампочки накаливания и 2024 одинаковых резисторов. Ключ замкнули, и лампа «загорелась». Найдите отношение суммарной мощности, потребляемой всеми «незанумерованными» резисторами схемы, и мощности, потребляемой резистором с номером 1.

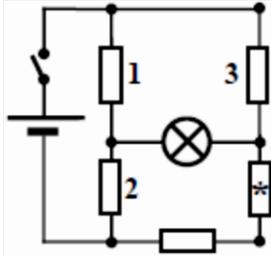


**Возможное решение:**

Пусть  $R$  – сопротивление одного из наших резисторов. В первую очередь отметим, что всю длинную цепочку из 2020 резисторов (кроме трех занумерованных и одного, включенного последовательно с цепочкой) можно заменить на один резистор  $R^*$ , и при этом для расчета его сопротивления можно воспользоваться тем соображением, что при отсечении от такой цепочки одного звена ее сопротивление практически не изменится. Поэтому



$$R^* = \frac{R(2R + R^*)}{3R + R^*} \Rightarrow R^{*2} + 2RR^* - 2R^2 = 0 \Rightarrow R^* = (\sqrt{3} - 1)R.$$



Значит, общее сопротивление в «правой нижней» ветви схемы равно  $R_n = \sqrt{3}R$ , причем это именно общее сопротивление всех «незанумерованных» резисторов схемы. Общее напряжение, создаваемое источником, на всей «мостовой» схеме, равно

$$U = I_1R + I_2R = I_3R + I_nR_n \Rightarrow I_1 + I_2 = I_3 + \sqrt{3}I_n.$$

С другой стороны, условие непрерывности тока дает

$$I_1 + I_3 = I_2 + I_n.$$

Складывая эти два уравнения почленно и сокращая одинаковые слагаемые, получаем, что

$$2I_1 = (\sqrt{3} + 1)I_n,$$

и теперь искомое отношение мощностей легко находится:

$$\frac{P_n}{P_1} = \left(\frac{I_n}{I_1}\right)^2 \frac{R_n}{R} = \left(\frac{2}{\sqrt{3} + 1}\right)^2 \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2} = 4\sqrt{3} - 6 \approx 0,9282.$$

**ОТВЕТ:**  $\frac{P_n}{P_1} = 4\sqrt{3} - 6 \approx 0,9282.$

**КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:**

№	действие	макс. балл
1	Правильно определено эквивалентное сопротивление «длинной» цепочки	5
	1.1 Указано (используется в решении), что при отсечении от такой цепочки одного звена ее сопротивление практически не изменится	1
	1.2 Записанное правильное уравнение для $R^*$	2
	1.3 Получено правильное выражение $R^*$ через $R$	2
2	Правильно определено соотношение сил токов	7
	2.1 Общее напряжение «моста» записано через силы токов в «плечах»	2
	2.2 Правильно записано условие непрерывности тока	2
	2.3 Правильно вычислено отношение $I_n/I_1$	3
3	Получение ответа	2
	3.1 Для мощностей использован закон Джоуля-Ленца	1
	3.2 Получен правильный численный ответ	1
<b>ВСЕГО</b>		<b>14</b>

**2. («Из области фантастики», 16 баллов)** В кубическом сосуде с ребром  $a = 1$  м находится  $\nu = 25,07$  моля криптона в равновесном состоянии с температурой  $T = 168$  К. В некоторый момент времени неким фантастическим способом изменяются законы соударения молекул криптона с внутренними стенками сосуда: теперь эти соударения с вероятностью 98% являются упругими, а с вероятностью 2% - абсолютно неупругими. Оцените время после воздействия, за которое давление на стенки сосуда уменьшится на 2 %

по сравнению с тем, что было до воздействия. За какое время это давление уменьшится в два раза? Какая масса криптона «оседет» на стенках сосуда к этому моменту времени? Молярная масса криптона  $\mu \approx 83,8$  г/моль, универсальная газовая постоянная  $R \approx 8,31$  Дж/(моль·К).

### Возможное решение:

При абсолютно неупругих соударениях передача импульса от азота к стенке в 2 раза меньше, чем при упругом. Средняя передача импульса после воздействия  $\langle \Delta p \rangle = 0,98 \cdot \Delta p + 0,02 \cdot \frac{\Delta p}{2} = 0,99 \cdot \Delta p$  (здесь  $\Delta p$  – передача импульса при упругих соударениях). Следовательно, при той же концентрации и скорости молекул давление газа на наши «необычные» стенки будет на 1 % меньше, чем для «обычных» стенок. Значит, сразу после воздействия давление «мгновенно» падает на 1 %. Ясно, что для уменьшения давления на 2 % оно должно упасть еще примерно на 1 % от начального (при оценочном вычислении пренебрежем отличием  $\frac{1}{0,99}$  от 1).

Второй эффект, который повлияет на давление, связан с тем, что при абсолютно неупругом соударении молекулы «прилипают» к стенкам, и масса газа в сосуде (а вместе с ней и концентрация молекул газа) уменьшается. При этом средняя кинетическая энергия поступательного движения у оставшихся молекул практически не изменяется. Таким образом, после воздействия давление в сосуде будет уменьшаться примерно пропорционально массе газа. Количество молекул, прилипающих к стенкам общей площадью  $S = 6a^2$  за малое время  $\Delta t$ , можно оценить как  $\Delta N \approx 0,02 \cdot \frac{1}{6} n \cdot 6a^2 v \Delta t$ , где  $v$  –

средняя скорость молекул с массой  $m_0$ , которую можно считать примерно равной  $v \approx \sqrt{\frac{2 \cdot (3kT/2)}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$ . Поэтому скорость убыли массы

$\frac{\Delta m}{\Delta t} = -m_0 \frac{\Delta N}{\Delta t} \approx -0,02 \cdot m_0 n a^2 \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = -\frac{m}{50a} \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$ . Значит,  $\frac{\Delta m}{m} \approx -\frac{1}{50a} \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \Delta t$ . Таким

образом, время уменьшения массы (и, как мы поняли, давления) еще на 1% равно

$t_1 \approx 0,5a \sqrt{\frac{\mu}{3RT}} \approx 2,2$  мс. Это и есть требуемая оценка. Как видно, это происходит очень

быстро с макроскопической точки зрения, но достаточно медленно с микроскопической (если умножить это время на скорость теплового движения молекул криптона при этой температуре, получается 0,5 м, что меньше размеров сосуда, но велико по сравнению с длиной свободного пробега молекулы при этих условиях). При этом на стенках оседет примерно 1% от начальной массы криптона:  $\Delta m_1 \approx 0,01 \cdot \mu v \approx 21$  г.

Для больших изменений давления нам нужно учесть зависимость скорости изменения массы от массы, то есть решить уравнение

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{m}{50a} \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \Rightarrow \frac{dm}{m} = d(\ln(m)) = -\frac{m}{50a} \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} dt = -d\left(\frac{t}{\tau}\right).$$

Суммирование приращений приводит к зависимости  $m(t) = m(0) \cdot e^{-t/\tau}$ , в которой

$\tau \approx 50a \sqrt{\frac{\mu}{3RT}} \approx 0,22$  с. Зависимость давления от времени  $p(t) = 0,99 \cdot p_0 \cdot e^{-t/\tau}$ , и снижение

давления в два раза происходит к моменту времени  $t_2 = 50a\sqrt{\frac{\mu}{3RT}} \cdot \ln(1,98) \approx 0,15$  с. Масса «захваченного» стенками криптона  $\Delta m_2 = \left(1 - \frac{0,5}{0,99}\right)\mu\nu \approx 0,495 \cdot \mu\nu \approx 1039$  г, то есть немного меньше половины общей массы .

**ОТВЕТЫ:** Давление в сосуде упадет на 2 % примерно спустя время  $t_1 \approx 0,5a\sqrt{\frac{\mu}{3RT}} \approx 2,2$  мс после воздействия, в два раза – примерно спустя  $t_2 = 50a\sqrt{\frac{\mu}{3RT}} \cdot \ln(1,98) \approx 0,15$  с, за это время на стенках «осядет»  $\Delta m_2 = \frac{49}{99}\mu\nu \approx 1039$  г криптона.

**КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:**

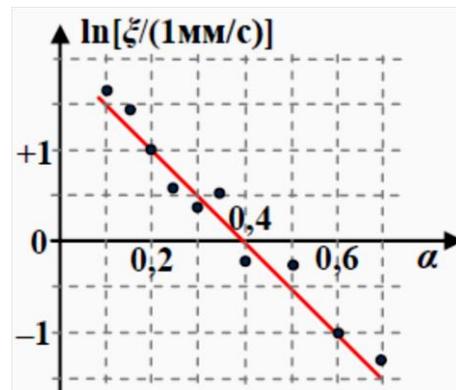
№	действие	макс. балл
<b>1</b>	Изучено влияние поглощения молекул стенками на давление	<b>4</b>
	1.1 Показано, что средний передаваемый импульс при ударе о стенку с поглощением составляет 99% от среднего передаваемого импульса для упругой стенки	1
	1.2 Указано, что давление сразу после воздействия падает на 1%	2
	1.3 Указано, что для понижения давления на 2% оно должно уменьшиться еще примерно на 1% от первоначального.	1
<b>2</b>	Изучено уменьшение массы газа и его влияние на давление	<b>6</b>
	2.1 Правильно вычислена скорость убыли массы газа через температуру и концентрацию молекул (массу газа).	2
	2.2 Корректно доказано, что давление падает пропорционально массе газа	1
	2.3 Получен правильный закон убыли массы газа для конечных времен	3
<b>3</b>	Получение ответов.	<b>6</b>
	3.1 Получена правильная оценка $t_1 \approx \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\mu}{3RT}} \approx (2,1 \pm 0,2)$ мс	1
	3.2 Получена правильная оценка $t_2 = 50a\sqrt{\frac{\mu}{3RT}} \cdot \ln(1,98) \approx (0,15 \pm 0,01)$ с	2
	3.3 Получена правильная оценка $\Delta m_2 = \frac{49}{99}\mu\nu \approx (1039 \pm 5)$ г; если ответ попадает только в интервал $\Delta m_2 \approx (1045 \pm 10)$ г - оценка <b>2 балла</b> ; ответ $\Delta m_2 \approx 0,5 \cdot \mu\nu$ без указания численного значения или с неправильным численным ответом – <b>1 балл</b> .	2+1=3
<b>ВСЕГО</b>		<b>16</b>

**3. («Пороховой ракетный двигатель», 20 баллов):** В качестве стартовых силовых установок и ускорителей используются **пороховые ракетные двигатели** (твердотопливные реактивные двигатели, в которых в качестве топлива используется бездымный порох). Самые ранние сведения об использовании твердотопливных ракет (китайских пороховых ракет) относятся к XIII веку. Вплоть до XX века все ракеты использовали ту или иную форму твёрдого топлива. Важной характеристикой таких двигателей является *скорость*

истечения продуктов сгорания пороха из сопла двигателя. Конечно, точный расчет этой скорости – очень сложная задача, и скорость истечения зависит и от сорта пороха, и от конструкции камеры сгорания и сопла, и даже от способа и условий запуска горения. На практике для расчета скорости истечения чаще всего используют эмпирические зависимости, получаемые на основании опытных данных. Пусть, например, для некоторого типа двигателей, и конкретного сорта пороха была подобрана зависимость скорости истечения  $u$  от давления в камере сгорания  $p$ :

$$u = \xi \cdot (p/1 \text{ Па})^\alpha,$$

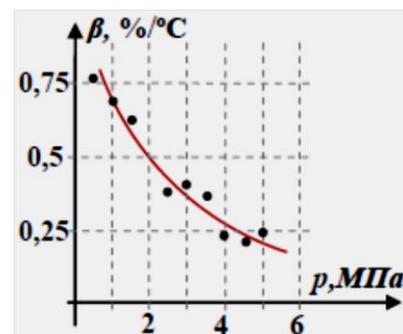
где  $\xi$  и  $\alpha$  – подобранные коэффициенты, связанные с характеристиками пороха и зависящие от параметров двигателя (например, от площади сопла). Впрочем, измерения показали, что для изучаемых двигателей эти величины не являются независимыми: на графике приведены их значения для нескольких двигателей этого типа при использовании одинакового сорта пороха. Как видно, связь  $\ln(\xi)$  с  $\alpha$  с удовлетворительной для оценочных вычислений



точностью может быть описана линейной зависимостью (на графике показана соответствующая прямая):  $\ln[\xi/(1\text{мм/с})] = b - k \cdot \alpha$ , где  $b$  и  $k$  — постоянные для данного типа двигателей и этого топлива параметры. Кроме того, известно, что на скорость истечения оказывает влияние и температура в камере сгорания. Известно, что с увеличением этой температуры увеличивается и скорость истечения. Характер этой зависимости также сложно получить теоретически, и поэтому здесь тоже используют эмпирические зависимости. Для этого измеряют скорость истечения при различных температурах, а затем подбирают подходящую зависимость. Исследования показали, что влияние температуры можно учесть, вводя «корректирующий» множитель, который показывает, как отличается скорость истечения при температуре  $T$  от скорости при «номинальной» температуре  $T_N = +20^\circ\text{C}$ .

$$u(T) = u_N \cdot \exp\{\beta(T - T_N)\},$$

где величина  $\beta$  – это *коэффициент температурной чувствительности* топлива. Было установлено, что для изучаемых двигателей он зависит в основном от величины давления в камере сгорания. На графике показаны экспериментальные значения температурной чувствительности для наших сортов пороха, измеренные при различных давлениях, а также *степенная аппроксимация* этой зависимости  $\beta(p) = \beta_0 \cdot p^\chi$ , где  $\beta_0$  и  $\chi$  – постоянные.



В результате мы получили эмпирическую формулу для расчета скорости истечения:

$$u(p, T) = \xi \cdot (p/1 \text{ Па})^\alpha \cdot \exp\{\beta(T - T_N)\},$$

в которой  $\xi = \xi(\alpha)$  и  $\beta = \beta(p)$ .

Определите скорость истечения газа из сопла в установившемся режиме, при котором температура в камере сгорания  $T = 1730^\circ\text{C}$ , а давление  $p = 2 \text{ МПа}$ . Известно, что изменение площади сопла, при котором скорость истечения уменьшится в два раза при тех же температуре и давлении, соответствует уменьшению коэффициента  $\alpha$  в  $k = 1,175$  раза.

### Возможное решение:

В первую очередь определим постоянные  $b$  и  $k$  в эмпирической зависимости скорости истечения от  $\alpha$ . Выберем на графике удобные точки *интерполирующей* прямой:

$$\begin{cases} 1 = b - 0,2 \cdot k \\ -1 = b - 0,6 \cdot k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ k = 5 \end{cases} \Rightarrow \ln[\xi/(1 \text{ мм/с})] = 2 - 5 \cdot \alpha,$$

Теперь используем информацию из условия: для значения скорости истечения  $u' = \frac{1}{2}u$

$$\frac{u}{u'} = 2 = \frac{\xi}{\xi'} \cdot \left(\frac{p}{1 \text{ Па}}\right)^{\alpha - \alpha'} = e^{-5(\alpha - \alpha')} \left(\frac{p}{1 \text{ Па}}\right)^{\alpha - \alpha'} = \left(\frac{p}{e^5 \text{ Па}}\right)^{\alpha - \alpha'} \Rightarrow \alpha - \alpha' = \frac{\ln(2)}{\ln(p/e^5 \text{ Па})} \approx 0,073.$$

Нам также известно, что  $\alpha' = \alpha/1,175$ , и из полученных уравнений находим  $\alpha \approx 0,49$ . Это позволяет нам определить  $\xi$  для исследуемого режима:

$$\xi \approx 1 \frac{\text{мм}}{\text{с}} \cdot e^{2-5 \cdot 0,49} \approx 0,64 \frac{\text{мм}}{\text{с}}.$$

По второму графику определяем  $\beta$  для заданного давления:  $\beta \approx 0,5 \frac{\%}{\text{с}}$ . Теперь мы можем определить скорость истечения по рекомендованной эмпирической формуле:

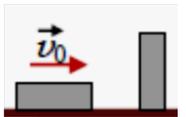
$$u \approx 0,64 \frac{\text{мм}}{\text{с}} \cdot (2 \cdot 10^6)^{0,49} \cdot \exp\left[\frac{17,1}{2}\right] \approx 4,04 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

**ОТВЕТ:** скорость истечения в этом режиме  $u \approx 4 \text{ км/с}$ .

### КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

№	действие	макс. балл	
1	Определение $\alpha$ и $\xi$ для исследуемого режима	12	
	1.1	Правильно определены постоянные $b$ и $k$ для интерполирующей прямой	2+2=4
	1.2	Записано уравнение на $\alpha$ и $\xi$ , следующее из заданного отношения скоростей	2
	1.3	Получено правильное уравнение на $\alpha$	2
	1.4	Найдено $\alpha$ в диапазоне 0,47 – 0,51	2
	1.5	Найдено $\xi$ в диапазоне 0,58 – 0,70	2
2	Определение $\beta$ для исследуемого режима и правильной схемы вычисления $u$	4	
	2.1	По графику правильно найдено $\beta$ для заданного давления	2
	2.2	Все полученные константы подставлены в эмпирическую формулу для нахождения скорости истечения	2
3	Получен правильный ответ $u \approx (4,0 \pm 0,4) \text{ км/с}$ ; для ответа в более широком диапазоне $(4,0 \pm 0,8) \text{ км/с}$ – <b>2 балла</b> , для $(4,0 \pm 1,5) \text{ км/с}$ – <b>1 балл</b> .	4	
	<b>ВСЕГО</b>	<b>20</b>	

**4. («Стержневой удар», 24 балла)** Гладкий однородный стержень длины  $L$  с квадратным поперечным сечением  $a \times a$  установлен вертикально на гладкой горизонтальной поверхности. Второй такой же стержень скользит по этой поверхности со скоростью  $v_0$ , направленной перпендикулярно одной из боковых граней первого, и сталкивается с первым так, что наносит своим торцом удар по этой грани (см. рисунок). В каких направлениях и с какими угловыми скоростями будут вращаться стержни после удара? Известно, что  $a = L/3$ , деформации всех тел считайте упругими, причем деформации стержней очень малы, и при этом намного больше деформаций поверхности.



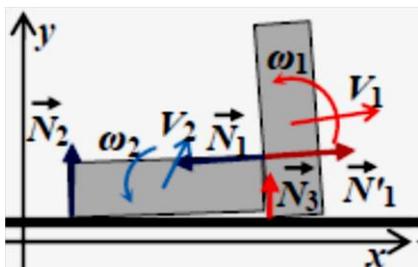
**Указание:** При описании вращательного движения твердого тела удобно использовать характеристику, называемую *моментом инерции*. Если разбить тело на материальные точки, то момент инерции относительно заданной оси вращения вычисляется как сумма вкладов от отдельных точек:  $I \equiv \sum_i m_i l_i^2$ , где  $l_i$  – расстояние до  $i$ -й точки от оси. Эта величина используется при записи уравнения вращательного движения тела  $I \frac{d\omega}{dt} = M_{ex}$  (в котором  $\omega$  – угловая скорость, а  $M_{ex}$  – момент внешних сил), и в выражении для кинетической энергии вращения  $E_{вр} = \frac{1}{2} I \omega^2$ . Момент инерции однородного параллелепипеда массой  $m$  с размерами  $a \times b \times c$  относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно грани  $b \times c$ , равен  $I_0 = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ .

### Возможное решение:

Данная задача является задачей с «частично открытой» моделью, что традиционно для олимпиады «ПВГ!» по физике.

При анализе удара мы должны понимать, что «малость» деформаций означает и малость времени соударений, что позволяет пренебрегать действием на тела в процессе удара всех «конечных» сил. Таким образом, нам нужно учитывать только «очень большие» силы (то есть те, которые стремятся к бесконечности в пределе нулевого времени соударения) – силы реакции. Учитывая условия гладкости все тел, приходим к выводу, что это силы нормальной реакции – между стержнями ( $N_1$ ) и между ними и поверхностью ( $N_2$  и  $N_3$ ). Силы нормальной реакции всегда перпендикулярны поверхностям соприкосновения тел, но их распределение по этим поверхностям могут изменяться в процессе удара для выполнения условий связи, возникающих при движении соприкасающихся тел. Конкретный вид условий связи сил реакции зависит от упругих свойств тел, а в предложенной задаче есть разные тела. Упругие свойства стержней, разумеется, одинаковы, а упругие свойства поверхности могут от них отличаться: единственная информация в условии, которая позволяет нам делать выводы о соотношении упругих свойств, содержится во фразе «деформации стержней очень малы, и при этом намного больше деформаций поверхности». С точки зрения методической комиссии олимпиады, это позволяет считать, что жесткость материала поверхности намного больше жесткости материала стержней, и поэтому процессы изменения сил  $N_{2,3}$  намного быстрее, чем у  $N_1$ . Тогда мы приходим к выводу, что в ходе удара изменение  $N_2$  и  $N_3$  «подстраиваются» под изменение  $N_1$  таким образом, чтобы смещения точек поверхности можно было пренебрегать по сравнению с очень малыми смещениями точек стержней. Поэтому в рамках нашей модели мы будем считать, что перед отрывом стержней от поверхности вертикальная составляющая точки касания стержня и поверхности должна остаться равной нулю (хотя вертикальная составляющая скорости ЦМ обоих стержней должна иметь вертикальную составляющую благодаря действию сил  $N_2$  и  $N_3$ ). Договоримся конечные скорости центров масс стержней записывать в проекциях на горизонтальную ось  $x$  и вертикальную  $y$ , а положительным направлением вращения считать вращение против часовой стрелки (см. рисунок, на котором «пренебрежимо малые» смещения стержней в ходе удара для наглядности показаны конечными).

Начнем с вертикального стержня. Из геометрии удара сразу становится ясно, что этот стержень после удара начнет вращаться против часовой стрелки (видно, что при противоположном направлении вращения он бы не нагружал поверхность, сила  $N_3$  не появилась бы, а момент силы нормальной реакции со стороны горизонтального стержня  $N'_1$  относительно центра



масс вертикального явно положителен). В процессе старта такого вращения (перед началом поворота) силы нормальной реакции между стержнями должны перераспределиться по поверхности их соприкосновения таким образом, чтобы они были сосредоточены в точке контакта «верхнего» ребра горизонтального стержня с вертикальным. Точно так же точки приложений сил реакции  $N_2$  и  $N_3$  должны во время удара стать сосредоточенными в точках контакта – там, где каждый из брусков должен «надавить» на поверхность в ходе движения, возникающего без учета этих сил). Поэтому, если  $N_{1,2,3}$  – средние величины сил реакции за время удара  $\Delta t$ , то скорость центра масс и угловая скорость вращения вертикального стержня после удара удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} mV_{1x} = N_1 \cdot \Delta t \\ mV_{1y} = N_3 \cdot \Delta t \\ I\omega_1 = l \cdot N_1 \cdot \Delta t - \frac{a}{2} \cdot N_3 \cdot \Delta t \end{cases}.$$

Здесь  $m$  – масса каждого стержня, момент инерции каждого стержня относительно горизонтальной оси вращения, проходящей через ЦМ,  $I = \frac{1}{12}m(a^2 + L^2) = \frac{5}{6}ma^2$ , а плечо силы реакции  $N'_1$  равно  $l = \frac{L}{2} - a = \frac{1}{2}a$ . Для горизонтального стержня

$$\begin{cases} mV_{2x} = mv_0 - N_1 \cdot \Delta t \\ mV_{2y} = N_2 \cdot \Delta t \\ I\omega_2 = \frac{a}{2} \cdot N_1 \cdot \Delta t - \frac{L}{2} \cdot N_2 \cdot \Delta t \end{cases}.$$

Как видно, условия связи для точек касания стержней с поверхностью

$$\begin{aligned} V_{1y} - \omega_1 \frac{a}{2} &= \left[ \frac{N_3}{m} - \frac{a}{2I} \left( l \cdot N_1 - \frac{a}{2} \cdot N_3 \right) \right] \cdot \Delta t = 0, \\ V_{2y} - \omega_2 \frac{L}{2} &= \left[ \frac{N_2}{m} - \frac{L}{2I} \left( \frac{a}{2} \cdot N_1 - \frac{L}{2} \cdot N_2 \right) \right] \cdot \Delta t = 0 \end{aligned}$$

дают нам связь «очень больших» сил реакции:

$$\begin{aligned} N_2 \left( 1 + \frac{mL^2}{4I} \right) - N_1 \frac{maL}{4I} &= 0 \Rightarrow N_2 = \frac{maL}{4I + mL^2} N_1 = \frac{3aL}{a^2 + 4L^2} N_1 \equiv \varepsilon N_1, \\ N_3 \left( 1 + \frac{ma^2}{4I} \right) - N_1 \frac{ma(L - 2a)}{4I} &= 0 \Rightarrow N_3 = \frac{ma(L - 2a)}{4I + ma^2} N_1 = \frac{3a(L - 2a)}{4a^2 + L^2} N_1 \equiv \eta N_1. \end{aligned}$$

Подсчет дает, что  $\varepsilon \equiv \frac{3aL}{a^2 + 4L^2} = \frac{9}{37}$ ,  $\eta \equiv \frac{3a(L - 2a)}{4a^2 + L^2} = \frac{3}{13}$ . С учетом этих условий связи мы можем выразить все конечные скорости и угловые скорости через  $V_{1x} \equiv V$ :

$$V_{1y} = \frac{3}{13}V, \quad V_{2x} = v_0 - V, \quad V_{2y} = \frac{9}{37}V, \quad \omega_1 = \frac{6}{13a}V, \quad \omega_2 = \frac{6}{37a}V.$$

Подставляя эти соотношения в закон сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2}(V_1^2 + V_{2x}^2 + V_{2y}^2) + \frac{I}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2)$$

находим, что  $V = V_{1x} = \frac{481}{556}v_0 \approx 0,8651 \cdot v_0$ .

Таким образом, угловые скорости вращения стержней после удара

$$\omega_1 = \frac{111}{278} \frac{v_0}{a} \approx 0,399 \frac{v_0}{a}, \quad \omega_2 = \frac{39}{278} \frac{v_0}{a} \approx 0,140 \frac{v_0}{a}.$$

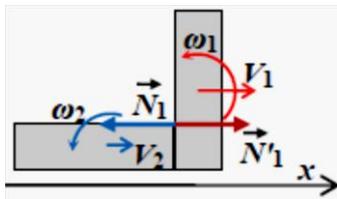
Как видно, оба стержня после удара вращаются против часовой стрелки ( $\omega_{1,2} > 0$ ).

**ОТВЕТЫ:** оба стержня после удара вращаются против часовой стрелки, величины угловых скоростей  $\omega_1 = \frac{111}{278} \frac{v_0}{a}$  и  $\omega_2 = \frac{39}{278} \frac{v_0}{a}$ . Допускались вычисления с разумными округлениями в промежуточных результатах.

**Примечание:** Если ввести другие предположения об упругих свойствах тел, можно построить и другие модели удара, приводящие к другим связям между силами реакции. Жюри олимпиады при оценке альтернативных моделей будет исходить из оценки их корректности и «разумности» с точки зрения физики. В первую очередь могут считаться «разумными» модели, в которых явно указано, какие модельные предположения использованы, как они обоснованы в рамках условия задачи, и как они порождают соотношения между силами реакции. Модели, не удовлетворяющие этим требованиям, рассматриваются как «грубые», и максимальная оценка решения, построенная на основе таких моделей, не может превышать **12 баллов** (см. критерии).

Приведем некоторые примеры альтернативных моделей.

**Пример 1:** *Корректная модель, не согласующаяся с предложенным приближением.* Введем предположение, противоположное заданному в условии. Пусть деформации поверхности очень малы, но намного больше, чем деформации стержней. Теперь стержни значительно «жестче» поверхности, и их соударение происходит намного быстрее. Таким образом, в ходе соударения стержней поверхность только начала деформироваться, и сила реакции  $N_2$

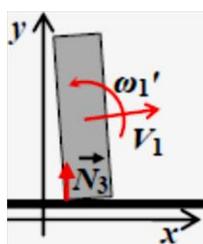


осталась «конечной». Тогда при ударе стержней ее можно не учитывать, и в результате тройное соударение стержней и поверхности можно рассматривать как три последовательных парных: сначала, пренебрегая влиянием поверхности, мы рассматриваем удар стержней, а затем – соударение стержней с

поверхностью. Первый удар описывается теми же соотношениями с  $N_{2,3} = 0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} mV_{1x} \equiv mV = N_1 \cdot \Delta t \\ I\omega_1 = \frac{a}{2} \cdot N_1 \cdot \Delta t \\ mV_{2x} = mv_0 - N_1 \cdot \Delta t \\ I\omega_2 = \frac{a}{2} \cdot N_1 \cdot \Delta t \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \frac{3V}{5a} \\ V_{2x} = v_0 - V \\ \omega_2 = \frac{3V}{5a} \end{array} \right.$$

и при этом  $V_{1y} = V_{2y} = 0$ . В этом случае ЗСЭ дает  $V_{1x} = \frac{5}{13}v_0$ , и  $V_{2x} = \frac{8}{13}v_0$ , а угловые скорости  $\omega_1 = \omega_2 = \frac{3}{13} \frac{v_0}{a}$ . При «вторых» ударах на стержни действуют силы  $N_2$  и  $N_3$ , направленные вертикально. Значит,  $V_{1x}$   $V_{2x}$  больше изменяться не будут. Изучим теперь второй удар вертикального стержня. Для него изменения  $V_{1y}$  и  $\omega_1$  удовлетворяют соотношениям



$$\left\{ \begin{array}{l} mV_{1y} = N_3 \cdot \Delta t' \\ I\omega'_1 = I\omega_1 - \frac{a}{2} \cdot N_3 \cdot \Delta t' \end{array} \right\} \Rightarrow \omega'_1 = \omega_1 - \frac{3}{5} \frac{V_{1y}}{a}.$$

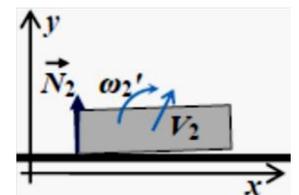
Закон сохранения энергии для этого удара  $\frac{I}{2}\omega_1^2 = \frac{I}{2}\omega'^2_1 + \frac{m}{2}V_{1y}^2$  дает

$$V_{1y} = \frac{30}{169}v_0, \text{ и } \omega'_1 = \frac{21}{169} \frac{v_0}{a} \approx 0,124 \frac{v_0}{a}.$$

Для второго удара горизонтального стержня:

$$\left\{ \begin{array}{l} mV_{2y} = N_2 \cdot \Delta t' \\ I\omega'_2 = I\omega_2 - \frac{L}{2} \cdot N_2 \cdot \Delta t' \end{array} \right\} \Rightarrow \omega'_2 = \omega_2 - \frac{9}{5} \frac{V_{2y}}{a}.$$

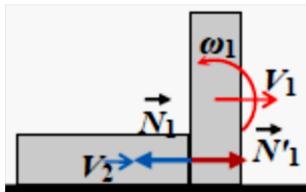
Аналогично  $\frac{I}{2}\omega_2^2 = \frac{I}{2}\omega'^2_2 + \frac{m}{2}V_{2y}^2$  дает  $V_{2y} = \frac{90}{481}v_0$ , и  $\omega'_2 = -\frac{51}{481} \frac{v_0}{a} \approx -0,106 \frac{v_0}{a}$ . Как видно, изменились не только величины угловых скоростей, но и направление вращения горизонтального бруска после удара!



**ОТВЕТЫ'**: вертикальный стержень после удара вращается против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega_1 = \frac{21}{169} \frac{v_0}{a}$ , горизонтальный – по часовой стрелке с угловой скоростью  $\omega_2 = \frac{51}{481} \frac{v_0}{a}$ . При таком решении не засчитывается только пп. 1.2, а остальные пункты при правильном решении оцениваются полностью, так что за такое решение жюри выставило **21 балл**.

Сопоставление полученных ответов приводит нас к важному выводу. Мы обнаружили, что характер вращения вертикального стержня слабо зависит от модели – изменение предположения о соотношении характеристик, описывающих упругие свойства тел, на прямо противоположные изменяет лишь величину его скорости и угловой скорости, и в целом не очень существенно. Зато характер вращения горизонтального стержня после окончания удара очень существенно зависит от этого соотношения – вплоть до изменения направления. Интуитивно понятно, что при произвольном соотношении этих характеристик ответ для  $\omega_2$  должен быть «где-то между» этими «крайними» случаями. А это означает, что он может отличаться очень значительно для разных материалов. На самом деле ситуация еще более сложная: как мы видели, деформации тел в процессе нашего удара – это комбинация деформаций разного типа (то есть это не только деформации сжатия, но и деформации сдвига), для которых характеристики упругих свойств материалов (модули Юнга и модули сдвига) могут быть разными. Так что при произвольных упругих свойствах материалов стержней и поверхности решение задачи становится очень сложным: нам нужно иметь полную информацию о структуре материалов и провести сложный (и явно «нешкольный») расчет динамики деформаций. Можно сделать вывод: без предположений о соотношении деформаций тел решение задачи в предложенном виде невозможно. Поэтому в условие задачи такое предположение было включено, и методическая комиссия и жюри олимпиады считают очень важным при оценке решений участников исходить из того, как участник его использовал.

Пример 2: «Грубая» модель. Будем считать, что перераспределения сил реакции в процессе удара не происходит, и точкой приложения равнодействующей сил нормальной реакции



брусков в ходе удара является центр площади соприкосновения. Сразу отметим: «грубость» этой модели по сравнению с разобранными выше состоит в том, что мы принимаем это предположение без какого-либо обоснования, то есть не анализируя его связь с упругими свойствами тел. Мы фактически предполагаем, что эти свойства таковы, чтобы обеспечить нам возможность максимально простого анализа удара. Действительно, в этом случае горизонтальный брусок не начинает вращаться, и сила реакции  $N_2$  осталась «конечной» в течение всего соударения. Если мы еще и пренебрежем тем, что вертикальный брусок после начала такого движения «зацепляется» за поверхность, то и  $N_3$  останется «конечной». В этом случае нам даже не нужно анализировать геометрию и динамику соударения – достаточно системы законов сохранения, в которой к законам сохранения импульса и энергии добавляется закон сохранения момента импульса:

$$\left\{ \begin{array}{l} mV_1 + mV_2 = mv_0 \\ I\omega_1 + mV_2 \cdot a = mv_0 \cdot a \\ \frac{m}{2}v_0^2 = \frac{m}{2}(V_1^2 + V_2^2) + \frac{I}{2}\omega_1^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_2 = \frac{3}{8}v_0 \\ V_1 = \frac{5}{8}v_0 \\ \omega_1 = \frac{3}{4} \frac{v_0}{a} = 0,75 \frac{v_0}{a} \end{array} \right.$$

Ясно, что расчет на базе законов сохранения был возможен и в примере 1, только там их нужно было бы записать последовательно для «первого» и «вторых» ударов.

Полезно обратить внимание, что в таком решении влияние поверхности на ответ вообще исчезло, что явно указывает нам на некоторую «нефизичность» модели.

**ОТВЕТЫ''**: вертикальный стержень после удара вращается против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega_1 = \frac{3v_0}{4a}$ , горизонтальный – не вращается.

Отметим, что для  $\omega_1$  и здесь получается ответ, не слишком сильно отличающийся от ответа «авторской» модели, а ответ для  $\omega_2$  отличается радикально. Это решение, согласно критериям, при полностью правильном выполнении оценивалось в **10 баллов**.

**КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:**

№	действие	макс. балл
<b>1</b>	Формулировка используемой в решении модели.	<b>6</b>
	1.1   Описано (используется в решении) ограничение на движение стержней после удара, следующее из малости деформаций	1
	1.2   Явно описано, как используется в построении модели информация из условия о соотношении деформаций	3*
	1.3   Указано, как в рамках предложенной модели определяются направления и точки приложения сил реакции	1+1=2*
<b>2</b>	Запись полной системы уравнений, необходимой для нахождения угловых скоростей вращения.	<b>12</b>
	2.1   Правильно записаны <u>все</u> независимые уравнения, следующие из законов сохранения и (или) изменения импульса	3
	2.2   Записано (в рамках используемой корректной модели) условие связи на движение стержней	3*
	2.3   Условие приведено к виду, позволяющему использовать его при решении возникшей системы уравнений	2*
	2.4   Правильно записан закон сохранения энергии, включающий в себя энергии вращения обоих стержней	2
	2.5   Полученная система сведена к одному или двум правильным уравнениям, с помощью которых находятся угловые скорости	2
<b>3</b>	Получение ответов.	<b>6**</b>
	2.1   Правильно (в рамках используемой корректной модели) определены направления вращения стержней.	1+1=2
	2.2   Получен правильный (в рамках используемой корректной модели) ответ для $\omega_1 = (0,40 \pm 0,03) \frac{v_0}{a}$	2
	2.3   Получен правильный (в рамках используемой корректной модели) ответ для $\omega_2 = (0,14 \pm 0,02) \frac{v_0}{a}$	2
<b>ВСЕГО</b>		<b>24</b>

\*Не ставится в «грубых» моделях.

\*\*В «грубых» моделях выставляется не более половины баллов.