ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!» ПО ФИЗИКЕ.
2019/20 учебный год, ЗАДАНИЕ ЗАОЧНОГО ТУРА. 10 и 11 классы.
ВОЗМОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ.

Часть I. Пример тестового задания.

Вопрос 1 (7 баллов):

Два небольших по размерам груза с массами 3,6 кг и 3,4 кг соединены легкой нерастяжимой нитью, перекинутой через неподвижный блок. Сначала грузы удерживают так, что нити натянуты, их части, не лежащие на блоке, вертикальны, а грузы находятся на одной горизонтали. Затем систему приводят в движение, отправляя более легкий груз вниз со скоростью 28 см/с. Грузы движутся только вертикально, нить по блоку не скользит, блок вращается без трения. Найдите величину перемещения более тяжелого груза за 2 с после начала движения. Ответ запишите в см, с точностью до целого, без единиц измерения. Ускорение свободного падения считать равным 9,8 м/с^2, сопротивление воздуха не учитывать.

ОТВЕТ: 0.

Комментарий: Ускорение грузов направлено против начальных скоростей и таково, что при заданной начальной скорости за 2 с грузы в точности возвращаются в исходное положение.

Вопрос 2 (8 баллов):

Рабочим телом тепловой машины является постоянное количество одноатомного идеального газа. Его цикл состоит из изобары, адиабаты и изотермы. При изобарном расширении газ совершает работу 400 Дж, а в процессе изотермического сжатия над газом совершают работу 630 Дж. Чему равен КПД цикла? Ответ запишите в процентах, с точностью до целого значения, без указания единиц.

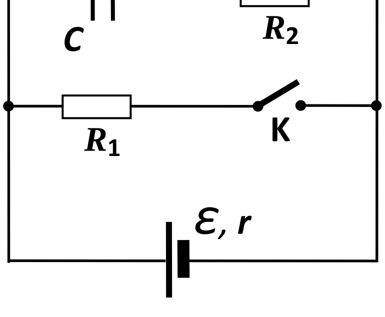
ОТВЕТ: 37.

Комментарий: Газ получает тепло только в изобарном процессе, в котором количество теплоты для одноатомного идеального газа в 2,5 раза больше произведенной работы. Поэтому количество теплоты, подведенное от нагревателя, равно 1000 Дж. Газ отдает тепло только в изотермическом процессе, в котором количество теплоты равно работе газа. Поэтому количество теплоты, переданное холодильнику, равно 630 Дж. Значит, КПД цикла

$$\eta = 1 - \frac{Q_X}{Q_H} = 37\,\%.$$

Вопрос 3 (10 баллов):

В схеме, показанной на рисунке, ключ К длительное время был разомкнут. Какое количество тепла выделится в резисторе R_2 после замыкания ключа? Известно, что $\mathcal{E} = 20$ В, $C = 1$ мкФ, а $\frac{R_1}{r} = 4$. Ответ запишите в мкДж, с точностью до целого значения, без указания единиц. Считать, что сопротивление резистора R_2 намного больше всех остальных сопротивлений в этой схеме.



ОТВЕТ: 8.

Комментарий: Пока ключ был разомкнут, конденсатор зарядился до напряжения, равного ЭДС. После замыкания ключа через параллельно соединенные сопротивления R_1 и r, а затем через резистор R_2 потек ток разрядки конденсатора. Конденсатор разрядится до нового равновесного напряжения $U = \frac{R_1}{R_1 + r}\mathcal{E} = \frac{4}{5}\mathcal{E}$. Поэтому в ходе разрядки его заряд уменьшился на $\Delta q = \frac{1}{5}C\mathcal{E}$. Поскольку сопротивление резистора R_2 намного больше всех остальных сопротивлений в этой схеме, можно считать, что практически все количество теплоты, выделившееся в схеме, приходилось именно на этот резистор. Изменение энергии конденсатора $\Delta E_C = \frac{1}{2}C(U^2 - \mathcal{E}^2) = -\frac{9}{50}C\mathcal{E}^2$. Так как внутреннее сопроивление источника в 4 раза меньше, чем сопротивление , то через источник (против его полярности) проходит общего заряда, то есть $\frac{4}{5}\Delta q = \frac{4}{25}C\mathcal{E}$. Значит, работа источника $A = -\mathcal{E}\frac{4}{5}\Delta q = \frac{4}{25}C\mathcal{E}^2$. Из закона сохранения энергии находим: $Q = A - \Delta E_C = \frac{1}{50}C\mathcal{E}^2 = 8$ мкДж.

Часть II. *«ТАЙНЫЕ РАЗРАБОТКИ КРИСТОБАЛЯ ХОЗЕВИЧА ХУНТЫ»*.

1. («**Квинтэссенция**») Еще в средние века, используя невероятные для того времени методы, Кристобаль Хозевич установил, что наша Вселенная расширяется. Это увлекло его, и он несколько столетий следил за расширением Вселенной. К середине XIX века он сделал невероятное открытие: расширение Вселенной не тормозится, а ускоряется! Для объяснения этого факта Кристобаль Хозевич разработал собственную модель устройства Вселенной (модель КХХ). В его модели наряду с обычным веществом, которое подчиняется закону всемирного тяготения Ньютона, существует еще один, весьма необычный вид материи, которому он дал, следуя Аристотелю, название «квинтэссенция». Квинтэссенция, смешиваясь с обычным веществом, дает **отрицательный** вклад в его гравитационную массу, но при этом создает еще и давление, «расталкивающее» частицы обычного вещества. Давление квинтэссенции в модели КХХ равно объемной плотности ее внутренней энергии и определяется ее плотностью массы: $p_q = A\cdot(-\rho_q)^{5/3}$, где $A = const$. Отметим, что $\rho_q = \frac{M_q}{V_q} < 0$, причем M_q – это и есть отрицательный вклад квинтэссенции в массу Вселенной. Полные массы обычного вещества $M_s > 0$ и квинтэссенции $M_q < 0$, а также полная энергия Вселенной E остаются неизменными, причем $M_s + M_q > 0$. Кроме того, в этой модели считается, что в любой момент времени Вселенная – это шар переменного радиуса $R(t)$, заполненный однородно распределенными по объему обычным веществом и квинтэссенцией. Пользуясь моделью КХХ, ответьте на вопросы:

- В каких пределах может изменяться радиус Вселенной при заданных M_s, M_q, E и A?
- Может ли Вселенная КХХ быть статичной (то есть иметь постоянный радиус)?
- Пусть полная энергия Вселенной $E = 0$, и расширение Вселенной начинается с нулевой скоростью от минимального возможного радиуса. Далее в любой момент времени

распределение скоростей обычного вещества подчиняется закону Хаббла: скорость на расстоянии $r \le R$ от центра Вселенной $v(r,t) = \frac{r}{R(t)} v(R,t)$. Квинтэссенция не дает вклада в кинетическую энергию Вселенной (убыль ее энергии при расширении переходит в кинетическую энергию обычного вещества). В течении какого времени после старта Вселенная будет расширяться с положительным ускорением?

При получении ответов Вы <u>должны</u> (как это делал и автор модели в XIX веке) использовать для описания движения Вселенной законы ньютоновской механики, а не более современных теорий.

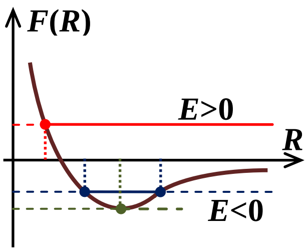
Указание: Энергия электростатического взаимодействия зарядов однородного шара с радиусом R и полным зарядом Q равна $W = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$.

Решение:

Подсчитаем полную энергию Вселенной: в рамках модели КХХ она складывается из кинетической энергии обычного вещества, потенциальной энергии гравитационного взаимодействия и внутренней энергии квинтэссенции. Текущее значение плотности обычного вещества при радиусе Вселенной $R(t)$, равно $\rho(t) = \frac{3M_s}{4\pi R^3}$. Скорость вещества на расстоянии r от центра Вселенной $v(r,t) = \frac{r}{R(t)} v(R,t) \equiv H(t) \cdot r$. Отметим, что и в современной космологии используется обозначение $H(t) \equiv \frac{v(R,t)}{R(t)}$ для коэффициента пропорциональности между $v(r,t)$ и r. Кинетическая энергия слоя вещества радиусом r с толщиной Δr равна $\frac{1}{2}\rho \cdot 4\pi r^2 \Delta r \cdot (Hr)^2$. Следовательно, кинетическая энергия всего шара $E_K = \frac{1}{2}\int_0^R dr \rho \cdot 4\pi r^2 \cdot H^2 r^2 = \frac{2\pi\rho H^2 R^5}{5}$, или $E_K = \frac{3}{10} M_s H^2(t) R^2(t) = \frac{3}{10} M_s v^2(R,t)$. Если ввести обозначение $v(R,t) = \frac{dR}{dt} \equiv V(t)$, то $E_K = \frac{3}{10} M_s V^2$. Для подсчета потенциальной энергии гравитационного взаимодействия можно использовать аналогию между электростатикой и гравитацией: закон всемирного тяготения отличается от закона Кулона только заменами $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \to G$ и зарядов на массы, а также тем, что силы тяготения всегда действуют как притяжение (энергия взаимодействия отрицательна, если за ноль принято ее значение при бесконечном удалении масс друг от друга). Значит, энергия взаимодействия для шара радиуса $R(t)$ с гравитационной массой $M_s + M_q$ равна $W = -\frac{3G(M_s + M_q)^2}{5R} \equiv -\frac{B}{R}$. Внутренняя энергия квинтэссенции, согласно условию, равна $U = p \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 = A \cdot \left(-\frac{M_q}{4\pi R^3/3}\right)^{5/3} \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 = A\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3} \frac{(-M_q)^{5/3}}{R^2} \equiv +\frac{C}{R^2}$. Итак, полная энергия Вселенной, остающаяся неизменной при ее расширении $E = \frac{3}{10} M_s V^2 - \frac{B}{R} + \frac{C}{R^2}$, где

$B=\dfrac{3}{5}G(M_s+M_q)^2$ и $C=A\cdot\left(\dfrac{9(-M_q)^5}{16\pi^2}\right)^{1/3}$ – положительные постоянные, выражающиеся через M_s, M_q и A.

Для определения пределов изменения радиуса Вселенной в модели КХХ заметим, что кинетическая энергия вещества неотрицательна: $\dfrac{3}{10}M_sV^2=E+\dfrac{B}{R}-\dfrac{C}{R^2}\geq 0$. Для анализа ситуации построим график функции $F(R)\equiv-\dfrac{B}{R}+\dfrac{C}{R^2}$. Как видно, при $E\geq 0$ радиус Вселенной изменяется от $R_{\min}=\sqrt{\dfrac{C}{E}+\dfrac{B^2}{4E^2}}-\dfrac{B}{2E}$ до



бесконечности; при $-\dfrac{B^2}{4C}<E<0$ радиус изменяется от $R_{\min}=\dfrac{B}{-2E}-\sqrt{\dfrac{B^2}{4E^2}-\dfrac{C}{-E}}$ до $R_{\max}=\dfrac{B}{-2E}+\sqrt{\dfrac{B^2}{4E^2}-\dfrac{C}{-E}}$; при $E=-\dfrac{B^2}{4C}$ радиус принимает единственное возможное значение $R=\dfrac{2C}{B}$. Энергию $E<-\dfrac{B^2}{4C}$ Вселенная КХХ иметь не может.

Как видно из проведенного анализа, Вселенная в модели КХХ может быть статична: это происходит, если $E=-\dfrac{B^2}{4C}$. В этом случае ее радиус постоянен и равен $R_{st}=\dfrac{2C}{B}$.

Если $E=0$, то кинетическая энергия $\dfrac{3}{10}M_sV^2=+\dfrac{B}{R}-\dfrac{C}{R^2}$. Тогда минимальный радиус $R_0=\dfrac{C}{B}$, и при расширении от этого радиуса $V=\dfrac{dR}{dt}=\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{10B}{3M_s}(R-R_0)}$. Ясно, что скорость растет на том же участке значения радиуса, на котором убывает $F(R)$, то есть вплоть до $R=2R_0$. Перепишем предыдущее уравнение в виде $\dfrac{RdR}{\sqrt{R-R_0}}=\sqrt{\dfrac{10B}{3M_s}}\cdot dt$. Тогда ясно, что время, в течении которого Вселенная расширяется ускоренно $t_a=\sqrt{\dfrac{3M_s}{10B}}\displaystyle\int_{R_0}^{2R_0}\dfrac{RdR}{\sqrt{R-R_0}}=\left(z=\sqrt{\dfrac{R}{R_0}-1}\right)=2\sqrt{\dfrac{3M_sR_0^3}{10B}}\int_0^1 dz(1+z^2)=\dfrac{4C}{B^2}\sqrt{\dfrac{2CM_s}{15}}$.

ОТВЕТЫ:

- При $E\geq 0$ радиус Вселенной изменяется от $R_{\min}=\sqrt{\dfrac{C}{E}+\dfrac{B^2}{4E^2}}-\dfrac{B}{2E}$ до бесконечности;

  при $-\dfrac{B^2}{4C}<E<0$ радиус изменяется от $R_{\min}=\dfrac{B}{-2E}-\sqrt{\dfrac{B^2}{4E^2}-\dfrac{C}{-E}}$ до

$R_{\max} = \dfrac{B}{-2E} + \sqrt{\dfrac{B^2}{4E^2} - \dfrac{C}{-E}}$; при $E = -\dfrac{B^2}{4C}$ радиус принимает единственное возможное значение $R = \dfrac{2C}{B}$. Здесь $B = \dfrac{3}{5}G(M_s + M_q)^2$ и $C = A \cdot \left(\dfrac{9(-M_q)^5}{16\pi^2}\right)^{1/3}$.

- Вселенная в модели КХХ может быть статична: это происходит, если $E = -\dfrac{B^2}{4C}$. В этом случае ее радиус постоянен и равен $R_{st} = \dfrac{2C}{B}$.
- $t_a = \dfrac{4C}{B^2}\sqrt{\dfrac{2CM_s}{15}}$.

Комментарии по поводу альтернативных подходов:

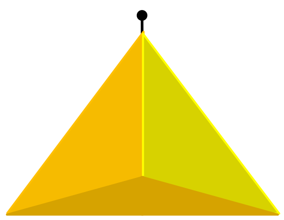
1) Многие участники при вычислении внутренней энергии квинтэссенции не использовали прямое указание из условия о том, что ее объемная плотность постоянна и описывается приведенной формулой, и вместо этого использовали уравнение $p = -\dfrac{\partial U}{\partial V}$. Такой подход без каких-либо пояснений считался <u>ошибочным</u>. Квинтэссенция названа «необычным» веществом, и совершенно неочевидна применимость к ней каких-либо уравнений термодинамики «обычного» вещества. Если же к ней применимы Начала термодинамики, то для нее должна существовать и температура, причем $\dfrac{\partial U}{\partial V} = T\dfrac{\partial p}{\partial T} - p$. Тогда указанная формула справедлива только при $T\dfrac{\partial p}{\partial T} = 0$ (например, для «холодной» материи с $T \approx 0$). Для тех, кто использовал такой подход, баллы за нахождение энергии квинтэссенции <u>не ставились</u>. В последующих формулах (в отсутствие иных ошибок) при этом возникал неправильный числовой коэффициент. Если использование уравнения $p = -\dfrac{\partial U}{\partial V}$ было объяснено (явно указано или явно присутствовало в решение использование положений термодинамики и объяснено, почему $T\dfrac{\partial p}{\partial T} = 0$), то сумма оценок за последующие пункты критерия понижалась на 2 балла, если объяснение отсутствовало – на 5 баллов.
2) Часть участников при ответе на вопрос о существовании статической Вселенной КХХ существенно расширили критерий статичности. В условии «статической» была названа Вселенная, радиус которой неизменен в рамках предположений модели КХХ. Некоторые участники считали «статической» Вселенную, в которой выполняется условие равновесие каждого отдельного слоя обычного вещества. Но такое требование <u>противоречит приближениям модели</u>: при постоянном давлении и однородной гравитирующей плотности (создающей неоднородное поле тяготения) равновесие всех слоев невозможно – в «квазистатической» Вселенной из предложенных компонент обязательно будут неоднородности (либо квинтэссенция распределится неоднородно, чтобы разность давлений компенсировала вес слоя вещества, либо вещество и квинтэссенция распределятся неоднородно). При

нарушении квазистатичности в такой Вселенной тоже не будет однородности: возникнут волны плотности и скорости частиц вещества. Поэтому баллы за пункт о статичности ставились при ответе «нет» только в следующем случае: если все же указывалось, что при вычисленной минимальной энергии (1 балл) диапазон изменения радиуса сводится к одному вычисленному значению (1 балл), и сам ответ «нет» объяснен тем, что вопрос о «статичности» выходит за рамки модели КХХ (1 балл).

Критерии оценивания задачи 1 («Квинтэссенция»).

действия	**макс. балл**
Получено выражение для кинетической энергии ВКХХ через V	**3**
Получено выражение для энергии гравитационного взаимодействия ВКХХ	**3**
Записано выражение для внутренней энергии квинтэссенции в ВКХХ	**2**
Записано выражение для закона сохранения энергии ВКХХ	**1**
Правильно найдены границы изменения радиуса ВКХХ для $E \geq 0$ и $-\frac{B^2}{4C} < E < 0$	**2×2=4**
Указан и описан (правильно найдены энергия и радиус) случай статической ВКХХ	**1+1+1=3**
Правильно записано выражение для связи скорости расширения и радиуса ВКХХ с $E = 0$	**1**
Указан диапазон значений радиуса, в котором ускорение положительно	**1**
Правильно найдено время, в течение которого ускорение положительно	**2**
ВСЕГО	**20**

2.(«**Золотой астероид**») Один из самых масштабных экспериментов доктора самых неожиданных наук К.Х.Хунты – запуск на орбиту вокруг Солнца искусственного астероида,



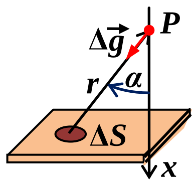
имеющего форму правильного тетраэдра с ребром длиной в несколько километров и изготовленного из практически чистого золота с плотностью 19,3 г/см^3. К одной из вершин тетраэдра прикрепили легким коротким тросом маленький передатчик. Вращение астероида вокруг оси, проходящей через его центр масс, было подобрано так, что величина силы натяжения троса оказалась в 7 раз меньше величины силы притяжения передатчика к астероиду, а сам передатчик оставался неподвижным относительно астероида на линии, проходящей через ближайшую к нему вершину и центр масс астероида. Деформациями троса можно пренебречь. Радиус орбиты золотого астероида в несколько раз превышал радиус орбиты Земли. Найдите период вращения этого астероида в системе «неподвижных звезд». В решении Вам могут пригодиться некоторые сведения:

- объем тетраэдра равен $V = \frac{L^3}{6\sqrt{2}}$, где L – длина его ребра;
- высота тетраэдра $H = \sqrt{\frac{2}{3}} L$;

- радиус описанной вокруг тетраэдра сферы $R = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} L$;
- величина телесного угла измеряется отношением площади части сферы с центром в вершине угла, вырезаемой этим телесным углом, к квадрату радиуса этой сферы, поэтому телесный угол, под которым видна плоская фигура очень малой площади ΔS из точки, направление на которую составляет угол α с нормалью (перпендикуляром) к поверхности, равен $\Delta\Omega = \frac{\Delta S \cdot \cos(\alpha)}{r^2}$, где r – расстояние от фигуры до этой точки;
- телесный угол при вершине тетраэдра $\Omega = \arccos\left(\frac{23}{27}\right) \approx 0{,}551(\textit{стерадиан})$;

Решение:

Поскольку трос, на котором прикреплен передатчик, очень короткий, то сила его гравитационного притяжения к тетраэдру $\vec{F} = m\vec{g}$, где m – масса передатчика, а $\vec{g}$ – ускорение свободного падения вблизи вершины тетраэдра. Рассмотрим плоскую фигуру «очень малой» толщины Δh, изготовленную из вещества с плотностью ρ. Выделим в этой фигуре «очень малый» элемент площадью ΔS и изучим поле тяготения в некоторой точке P, находящейся на расстоянии от выделенного элемента. Проекция на ось x, перпендикулярную поверхности фигуры, ускорения свободного падения в точке P, создаваемого этим элементом, по закону всемирного тяготения равна $\Delta g_x = \frac{G\rho\Delta S\Delta h}{r^2}\cos(\alpha)$. Как видно из выражения, приведенного в условии, Δg_x пропорциональна величине телесного угла $\Delta\Omega$, под которым этот элемент виден из точки наблюдения: $\Delta g_x = G\rho\Delta h \cdot \Delta\Omega$. Суммируя вклады разных элементов фигуры, для всей фигуры получим, что $g_x = G\rho\Delta h \cdot \Omega$. Здесь Ω – это телесный угол, под которым вся фигура видна из точки наблюдения. Теперь рассмотрим тетраэдр. Разделим его мысленно на «очень тонкие» треугольные слои, параллельные основанию. Ясно, что все такие слои видны из вершины тетраэдра под <u>одним и тем же</u> телесным углом $\Omega = \arccos\left(\frac{23}{27}\right)$. Кроме того, в силу симметрии тетраэдра, прямая, проходящая через вершину и перпендикулярная основанию – это высота тетраэдра, вдоль которой направлен и вектор $\vec{g}$. Поэтому суммирование вкладов в поле от всех слоев сведется к суммированию $\sum \Delta h = H$, то есть ускорение свободного падения вблизи вершины тетраэдра $|\vec{g}| = G\rho H \cdot \arccos\left(\frac{23}{27}\right)$. Согласно условию, передатчик при вращении находится на этой прямой, а ось вращения проходит через центр масс тетраэдра и перпендикулярна этой прямой. Сила тяжести и сила натяжения нити вместе создают центростремительное ускорение передатчика, то есть $mg + T = m\omega^2 R$, причем радиус вращения – это расстояние от центра масс до вершины, то есть радиус сферы, описанной вокруг тетраэдра. Учитывая, что $T = \frac{1}{7}mg$, находим: $\frac{8}{7}G\rho H \cdot \arccos\left(\frac{23}{27}\right) = \omega^2 R$, откуда, с



учетом выражений для H и R, получаем формулу для угловой скорости вращения $\omega = 4\sqrt{\frac{2}{21}\cdot\arccos\left(\frac{23}{27}\right)\cdot G\rho}$. Значит, период обращения $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{21}{2\arccos(23/27)}\cdot\frac{1}{G\rho}}$.

Численное значение $T \approx 6042$ с (примерно 101 минута).

ОТВЕТ: $T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{21}{2\arccos(23/27)}\cdot\frac{1}{G\rho}} \approx 101$мин.

Примечание 1: Нет необходимости учитывать вращение астероида вокруг Солнца, так как период его вращения вокруг Солнца составляет несколько лет, то есть намного больше периода вращения самого астероида вокруг своей оси. К тому же гравитационное поле Солнца в области нахождения астероида и спутника за одни оборот вокруг общего центра масс (практически совпадающего с центром масс астероида) можно считать практически однородным, и поэтому относительное ускорение спутника и астероида зависит только от их взаимодействия между собой.

Примечание 2: Вычисление $g_x = G\rho\Delta h\cdot\Omega$, создаваемой плоским треугольным слоем, можно провести альтернативным методом, используя третий закон Ньютона (через силу, действующую со стороны передатчика на элемент этого слоя) и теорему Гаусса.

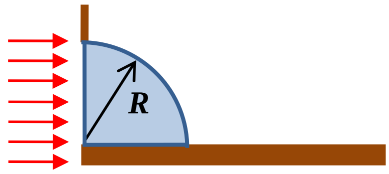
Комментарии по поводу альтернативных подходов:

1) Решение, в котором при вычислении силы гравитационного взаимодействия астероид заменялся на материальную точку с той же массой, совмещенной с его центром масс, оценивались максимум в 4 балла.
2) Решения, в которых при вычислении силы гравитационного взаимодействия тетраэдр преобразовывался в геометрическое тело иной формы оценивалось исходя из точности полученного приближенного решения, но не более чем в 15 баллов.

Критерии оценивания задачи 2 («Золотой астероид»).

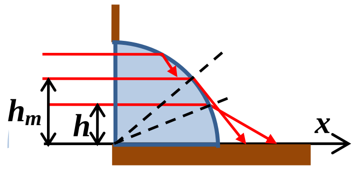
действия	**макс. балл**
Установлена или используется связь между Δg_x и $\Delta\Omega$ (либо силой, действующей на элемент поверхности со стороны передатчика и $\Delta\Omega$)	**4**
Получено правильное выражение для g_x, создаваемой плоским слоем, через Ω (либо для силы, действующей на плоский слой, через поток поля)	**4**
Правильно указано направление вблизи вершины, которое связано с симметрией системы	**1**
Правильно вычислен $\lvert\vec{g}\rvert = G\rho H\cdot\arccos\left(\frac{23}{27}\right)$ вблизи вершины (любым способом)	**5**
Правильно описано геометрические характеристики орбиты передатчика (радиус, расположение оси вращения и плоскости орбиты)	**2**
Правильно записано уравнение для центростремительного ускорения передатчика	**1**
Получена правильная формула для периода обращения	**2**
Найдено правильное (с ошибкой не более 5 минут) численное значение периода обращения	**1**
ВСЕГО	**20**

3.(«**Светлая полоса**») В кабинете Кристобаля Хозевича в НИИЧАВО стоял стол с оригинальной окантовкой: над краем стола возвышался бортик, в который была вставлена четверть стеклянного цилиндра, и при освещении стола сбоку вдоль края на поверхности стола появлялась светлая полоса. Найдите ширину этой полосы при освещении бортика пучком лучей, параллельных поверхности стола (см. рисунок). Известно, что радиус цилиндрической поверхности R = 3,9 см, а показатель преломления стекла, из которого изготовлена вставка, n = 2,4.



Решение:

Рассмотрим луч, падающий на стеклянную поверхность бортика на высоте h над поверхностью стола. Угол падения для этого луча на цилиндрическую поверхность равен $\alpha = \arcsin(h/R)$, а угол преломления $\beta = \arcsin(nh/R)$. Поэтому координата x точки падения луча на поверхность стола за бортиком (будем отсчитывать ее от «левого» края бортика) $x(h) = \sqrt{R^2 - h^2} + h \cdot \mathrm{ctg}(\beta - \alpha)$. Заметим, что $x(h)$ убывает с ростом h. Поэтому ближний к бортику край светлой полосы имеет координату x_L, соответствующую точке падения луча, у которого угол падения равен углу полного внутреннего отражения для стекла вставки (а угол преломления равен 90°): $\sin(\alpha_m) = \frac{1}{n}$, поэтому $h_m = \frac{R}{n}$, а $x_L = x(h_m) = \frac{R}{n}\sqrt{n^2 - 1} + \frac{R}{n\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{nR}{\sqrt{n^2 - 1}}$. Лучи, идущие выше h_m, испытывают полное внутреннее отражение и в итоге не выходят из стекла в сторону поверхности стола за бортиком. Дальний от бортика край светлой полосы (с координатой x_R) образован лучами, идущими вблизи поверхности ($h << R$). Для такого случая $\beta - \alpha \approx (n-1)\frac{h}{R}$, и поэтому $x_R = x(h)|_{h<<R} = R + \frac{R}{n-1} = \frac{nR}{n-1}$. Впрочем, к этому результату можно прийти и другим способом – для лучей с $h << R$ можно считать, что они проходят через плоскопараллельную пластину (на которую они падают под прямым углом, и поэтому пластина не отклоняет и не смещает лучи) и плосковыпуклую тонкую линзу. Фокусное расстояние такой линзы в воздухе $F = \frac{R}{n-1}$, и пучок «параксиальных» лучей собирается в фокусе. Значит, $x_R = R + F = \frac{nR}{n-1}$. Итак, приходим к выводу, что ширина светлой полосы



$$D = \frac{nR}{n-1} - \frac{nR}{\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})}{(n-1)\sqrt{n+1}} R \approx 2{,}4\,\text{см}.$$

ОТВЕТ: $D = \frac{nR}{n-1} - \frac{nR}{\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})}{(n-1)\sqrt{n+1}} R \approx 2{,}4\,\text{см}.$

Комментарии по поводу альтернативных подходов:

1) Использование формулы линзы для нахождения расстояния до дальнего края светлой полосы без объяснения, что она применяется к «параксиальным» лучам (то есть для малых h) считалось ошибкой.

2) Некоторые участники рассматривали еще одну «светлую полосу» – возникающую из-за падения лучей, испытавших полное внутреннее отражение (одно или несколько), на поверхность под «бортиком». На самом деле при правильном рассмотрении этой полосы нужно знать характер отражения света от поверхности: разумно предположить, что оно диффузное (полоса «за бортиком» – на поверхности стола – видна с разных направлений). Тогда ясно, что часть рассеянных поверхностью лучей не попадут в «бортик». К тому же нужно учесть преломление лучей на выходе из бортика. В результате, скорее всего будет наблюдаться неоднородная засветка всего участка под бортиком. Однако, из-за модельной зависимости этого результата, правильность исследования этой «дополнительной» полосы не учитывалась при оценке решений. Если в решении исследовалась только эта полоса, то оценка зависела от четкости формулировки модели и правильности ее реализации, но максимальная оценка в этом случае равнялась 5 баллам.

Критерии оценивания задачи 3 («Светлая полоса»).

действия	**макс. балл**
Сделан правильный рисунок хода лучей	**1**
Правильно записан закон преломления луча на цилиндрической поверхности	**1**
Сделан вывод (или используется в решении утверждение) о том, что координата точки падения луча на стол $x(h)$ убывает с ростом высоты луча h	**1**
Явно записана формула для $x(h)$ или записана система уравнений, достаточная для вычисления x при заданном h	**2**
Указано, что ближний край светлой полосы соответствует лучам, угол преломления которых равен 90° («на грани» полного внутреннего отражения)	**2**
Получена правильная формула для x_L или другой величины, характеризующей положение ближнего края	**2**
Для дальнего края используется приближение малых высот или разбиение на плоскопараллельную пластину и тонкую линзу	**1**
Получена правильная формула для x_R или другой величины, характеризующей положение дальнего края	**3**
Найдено правильное (с ошибкой не более 0,2 см) численное значение ширины светлой полосы	**2**
ВСЕГО	**15**

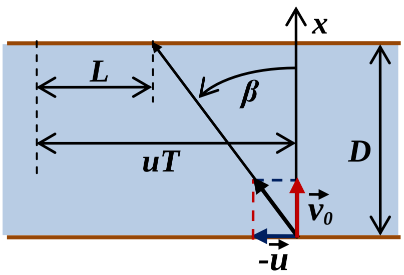
4.(«**Переправа**») Однажды, еще в бытность Великим Инквизитором, Кристобаль Хунта соорудил «пусковую установку», которая с заданной скоростью запускала плот массой $m = 100$ кг в прямолинейный канал с довольно быстрым течением (скорость воды в канале была практически постоянна и равна $u = 5$ м/с) в направлении, перпендикулярном берегу. Далее плот плыл по инерции, и при достаточной скорости запуска достигал другого берега. Ширина канала составляла $D = 10$ м. При каждом запуске фиксировались величина начальной скорости, время достижения противоположного берега и величина сноса плота вдоль течения за время переправы. Все собранные данные отражены в таблице. Кристобаль Хозевич решил проверить, с какой точностью выполняется предположение, что сила сопротивления воды, действующая на плот, прямо пропорциональна скорости плота относительно воды ($\vec{F}_c = -\alpha \cdot \vec{V}$). Выясните это и Вы. Для этого получите соотношение между измеренными величинами, следующее из этого предположения, и проверьте его выполнение. Кроме того, найдите величину коэффициента пропорциональности α и в рамках этого предположения определите максимальную величину стартовой скорости плота, при которой плот не достигает противоположного берега.

Таблица:

V_0, м/с ± 0,05 м/с	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0
T, с ± 0,01 с	5,49	3,46	2,55	2,03	1,69	1,45
L, м ± 0,01 м	10,80	4,83	2,77	1,81	1,27	0,95

Решение:

Уравнение движения в данной задаче проще анализировать в системе отсчета, связанной с водой (то есть движущейся со скоростью течения u относительно берега). Оно имеет вид



$m\vec{a} = -\alpha \cdot \vec{v}$, то есть ускорение в любой момент времени направлено вдоль одной прямой со скоростью. Это означает, что в этой системе отсчета плот движется по прямой, направленной вдоль вектора начальной скорости. Ясно, что начальная скорость плота в этой системе отсчета $\vec{v}_0' = \vec{v}_0 - \vec{u}$ направлена под углом $\beta = arctg(u/v_0)$ к перпендикуляру к течению и равна по величине $v_0' = \sqrt{v_0^2 + u^2}$. Далее выведем из нашей модели три необходимых следствия, с помощью которой и будем строить ее проверку. Во-первых, отметим, что (см. рисунок) величина сноса в этой системе отсчета определяется как расстояние между конечным положением точки, которая в момент старта была напротив плота и конечным положением плота: $uT - L = D\,tg(\beta) = \dfrac{uD}{v_0} \Rightarrow L = u\left(T - \dfrac{D}{v_0}\right)$. Проверка этого соотношения является проверкой того, что сила, действующая на плот со стороны воды, направлена против скорости плота относительно воды. Результат сравнения:

$u\left(T - \dfrac{D}{v_0}\right)$, м	10,78	4,80	2,75	1,82	1,31	1,00
L, м ± 0,01 м	10,80	4,83	2,77	1,81	1,27	0,95

Ошибка в первой строке около 1%, отклонения при малых скоростях (не более 6 м/с) того же порядка, но при больших скоростях (7-8 м/с) они увеличиваются, достигая 4-5%.

Второе соображение состоит в том, что, анализируя перемещение плота вдоль оси x (см. рисунок), и учитывая, что $a_x = \dfrac{\Delta v_x}{\Delta t}$, получаем из уравнения движения: $m\dfrac{\Delta v_x}{\Delta t} = -\alpha v_x \Rightarrow \Delta v_x = -\dfrac{\alpha}{m}\Delta x$. Суммируя малые изменения скорости и координаты за все время переправы, приходим к соотношению для x-компоненты конечной скорости $v_{кон} = v_0 - \dfrac{\alpha}{m}D$. Наконец, соотношение $\dfrac{dv_x}{dt} = -\dfrac{\alpha}{m}v_x$ говорит о том, что производная функции $v_x(t)$ пропорциональна самой функции. Таким свойством обладает только экспонента, и поэтому $v_x(t) = v_0 \cdot e^{-\frac{\alpha}{m}t}$. Следовательно, $v_{кон} = v_0 \cdot e^{-\frac{\alpha}{m}T}$. Объединяя второй и третий результаты, приходим к соотношению $\frac{m}{\alpha}\left[1-\exp\left(-\frac{\alpha}{m}T\right)\right]=\frac{D}{v_0}$. Его можно использовать для проверки модели и вычисления α. Можно, например, поступить следующим образом: введем переменную $z\equiv\frac{\alpha}{m}T$, и для каждой точки найдем ее значение из уравнения $\frac{1}{z}[1-e^{-z}]=\frac{D}{v_0T}$.(можно, например, воспользоваться функциями таблицы Excel), а затем найдем $\alpha=\frac{mz}{T}$:

V_0, м/с $\pm$ 0,05 м/с	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0
z	1,0973	0,6894	0,5073	0,40834	0,3461	0,30455
α, кг/с	19,99	19,92	19,89	20,12	20,48	21,00

(вычисления производились с «завышенной» точностью – в промежуточных результатах сохранялись два «лишних» порядка). Как видно, и здесь при больших скоростях отклонение от постоянства α увеличиваются. Если подбирать значение для всего диапазона, то получим, что $\alpha=20{,}2\pm0{,}6$кг/с, то есть отклонения от линейности порядка около 3%. С учетом погрешностей начальных данных ошибку следует оценить в 4% : $\alpha=20{,}2\pm0{,}8$кг/с. Однако если рассмотреть диапазон скоростей не более 6 м/с, то получится, что $\alpha=20{,}0\pm0{,}1$кг/с. Здесь отклонения менее погрешностей данных (примерно 1%). Таким образом, здесь реальная точность соответствует точности данных: $\alpha=20{,}0\pm0{,}2$ кг/с.

Для определения максимальной стартовой скорости, при которой плот еще не достигает противоположного берега, рассмотрим движение плота перпендикулярно берегу, в рамках модели $\vec{F}_c=-\alpha\cdot\vec{V}$. Вычислив проекцию конечной скорости на это направление аналогично тому, как вычислялась общая конечная скорость, получим: $m\frac{\Delta v_\perp}{\Delta t}=-\alpha v_\perp \Rightarrow \Delta v_\perp=-\frac{\alpha}{m}\Delta s_\perp$., и после суммирования изменений находим, что $v_{\perp кон}=v_0-\frac{\alpha}{m}D$. Плот не достигает противоположного берега, если $v_{\perp кон}<0$, то есть $v_0<\frac{\alpha}{m}D\approx 2$ м/с. Здесь логично использовать более точное значение α, полученное для области малых скоростей. Тогда точность этого результата не хуже 1%.

ОТВЕТЫ: для всего исследованного диапазона скоростей предположение выполняется с ошибкой не более 4% при $\alpha=20{,}2\pm0{,}8$кг/с, но для скоростей, не превышающих 6 м/с, ошибки около 1% при $\alpha=20{,}0\pm0{,}2$ кг/с; максимальная стартовая скорость, при которой плот не достигает противоположного берега чуть менее (2,00 ± 0,02) м/с.

Критерии оценивания задачи 4 («Переправа»).

действия	**макс. балл**
В выбранной системе отсчета правильно записаны уравнения движения	**1**
Предложен и реализован метод решения (переход в удобную систему отсчета, нахождение постоянных отношений скоростей, суммирование малых приращений, решение системы дифференциальных уравнений), приводящий не менее чем к двум независимым соотношениям, связывающим α и данные задачи	**2**

Получены два правильные независимые соотношения, связывающие α и данные задачи	**2×3=6**
Корректно проведен анализ выполнения соотношения между данными задачи	**3**
Определено значение α : • В «широком» и «узком» диапазоне с соответствующей точностью • Только в «широком» диапазоне • Попадание только в интервал от 19,4 до 20,6 кг/с либо точность в три-четыре раза отличается от корректной • Оба недостатка, либо нет анализа точности, либо он некорректен	 **5** **4** **2** **1**
Получен правильный ответ для критической скорости	**3**
ВСЕГО	**20**