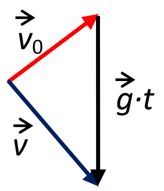
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!» ПО ФИЗИКЕ.
2018/19 учебный год, ЗАДАНИЕ ЗАОЧНОГО ТУРА. 10 и 11 классы.

Задание отборочного этапа состояло из тестовой части I (компьютерная проверка, задачи с изменяющимися параметрами) и части II, которая проверялась жюри олимпиады.

Часть I . Тестовое задание (пример варианта).

Вопрос 1 (7 баллов):
Цилиндрический медный стержень длиной 2 м вносят в область, где было создано электрическое поле с напряженностью 50 В/м и располагают так, что его ось составляет угол в 60° с направлением напряженности этого поля (каким оно было до внесения стержня). Найти разность потенциалов между концами стержня. Ответ запишите в Вольтах, без указания единиц измерения.
Ответ: 0.
Комментарий: Разность потенциалов между двумя точками покоящегося проводника в статическом поле всегда равна нулю.

Вопрос 2 (8 баллов):
Маленький тяжелый шарик бросили с балкона под углом к горизонту со скоростью 9 м/с. Спустя время t, когда его скорость стала перпендикулярна исходной, она стала равна 12 м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите t. Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2. Ответ запищите в секундах, без указания единиц измерения, с точностью до десятых.
Ответ: 1,5.
Комментарий: Достаточно записать в векторной форме равенство $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$, а затем «изобразить» его на векторной диаграмме. Поскольку по условию этот треугольник – прямоугольный, то $g^2t^2 = v_0^2 + v^2$, а из этого соотношения сразу получаем: $t = \dfrac{\sqrt{v_0^2 + v^2}}{g} \approx 1{,}5$ с.



Вопрос 3 (10 баллов):
Постоянное количество гелия участвует в процессе, в котором гелий сначала расширяется адиабатически, а затем в изобарном процессе возвращается к исходной температуре. Во всем процессе гелий совершил работу 735 Дж. Найдите работу, совершенную гелием в адиабатическом процессе. Ответ запишите в Дж, без указания единиц измерения, при необходимости округлив до ближайшего целого значения.
Ответ: 441.
Комментарий: Так как гелий вернулся к исходной температуре, то изменение его внутренней энергии равно нулю, и поэтому его работа во всем процессе равна полученному гелием количеству тепла. В адиабатическом процессе тепло не поступает, поэтому все 735 Дж получены гелием в изобарном процессе. Работа в изобарном процессе для одноатомного идеального газа составляет 2/5 от количества теплоты. Значит, остальные 3/5 общей работы совершены в адиабатическом процессе: 0,6×735 Дж = 441 Дж.

Часть II. *«НЕИЗВЕСТНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ Д-РА Ф.Д.Ч.УИЛЛАРДА».*
Возможные решения и критерии оценивания.

1. («**Тени на орбите**») В одном из проектов Ф.Д.Ч.Улларда, известного специалиста по криогенике, потребовалось разместить его установку на геостационарном спутнике. Так

называют спутники, вращающиеся в плоскости земного экватора таким образом, что они все время находятся «над» одной точкой земной поверхности. Оборудование на спутнике работает от солнечных батарей, но поступление энергии от Солнца, конечно же, неравномерное. Энергопотребление установки было очень небольшим, поэтому ее нужно было снабдить аккумулятором, рассчитанным только на те периоды времени, когда свет от Солнца не достигает спутника. Какова может быть максимальная длительность такого периода? Какова может быть максимальная длительность периода «бесперебойного» освещения? При необходимости используйте следующие данные:

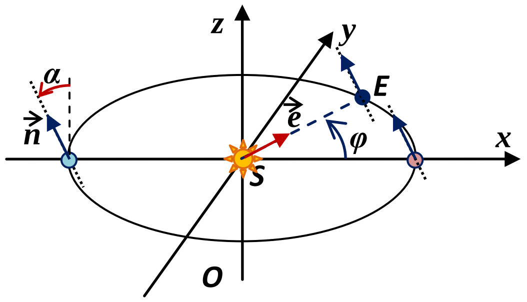
- Расстояние от Земли до Солнца меняется от $r_A \approx 152$ млн. км (от Афелия, который Земля проходит в июле) до $r_P \approx$ 147 млн. км (до Перигелия, который Земля проходит - в январе).
- Угловой размер Солнца при наблюдении с Земли $\beta \approx 32'$.
- Период обращения Земли вокруг Солнца $T_0 \approx 365{,}25$ суток.
- Радиус Земли $R_E \approx 6380$ км.
- Длительность земных суток $T = 24$ часа.
- Ускорение свободного падения на поверхности Земли $g \approx 9{,}8$ м/с^2.
- Угол между осью собственного вращения Земли и перпендикуляром к плоскости орбиты движения Земли вокруг Солнца $\alpha \approx 23{,}44^\circ$.

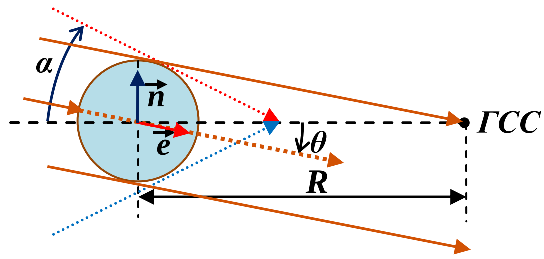
Решение:

Определим R – радиус орбиты ГСС. Период его обращения должен равняться земным суткам, то есть $\frac{2\pi R}{v} = T$ (v – скорость ГСС). С другой стороны, из уравнения для центростремительной компоненты ускорения спутника, которое создается силой притяжения к Земле (ее массу обозначим M) $m\frac{v^2}{R} = \frac{GMm}{R^2}$ следует, что $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$.

Следовательно, $R = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$. С учетом того, что $\frac{GM}{R_E^2} = g$, это выражение приводится к виду $R = R_E \cdot \sqrt[3]{\frac{gT^2}{4\pi^2 R_E}} \approx 6{,}62\, R_E \approx 42200$ км. Скорость спутника на этой орбите $v = \sqrt{\frac{gR_E^2}{R}} \approx 3{,}07$ км/с. За Землей существует область полной тени, в которую солнечные лучи не попадают. Из-за конечного размера Солнца эта область ограничена: ее длина

$L_{\max} = \dfrac{2R_E}{\beta} \approx 1{,}4 \cdot 10^6$ км, что значительно больше R. Таким образом, сходимостью области земной тени в задаче о ГСС можно пренебречь (на самом деле те лучи, которые проходят у самого края Земли, испытывают преломление в земной атмосфере, что значительно сокращает размеры области полной тени, но она все равно остается достаточно велика). Но ГСС далеко не всегда проходит через эту область – ведь его орбита лежит в экваториальной плоскости Земли, которая наклонена по отношению к плоскости земной орбиты. Этот угол, как видно из рисунка слева, постоянно изменяется: ось вращения Земли сохраняет





постоянное направление в пространстве (вдоль этой оси направлен вектор $\vec{n}$ с единичной длиной), и в процессе движения Земли по орбите Солнце оказывается то «выше», то «ниже» экваториальной плоскости по отношению к $\vec{n}$. Например, вблизи положения летнего солнцестояния солнечные лучи падают «сверху» под углом α к экваториальной плоскости. Тогда область тени закрывает точки экваториальной плоскости на расстоянии не более $R_1 = \dfrac{R_E}{\sin(\alpha)} \approx 2{,}51 R_E \approx 16000$ км от центра Земли. Значит, в этот период ГСС при движении по своей орбите не проходит через область полной тени. Аналогично обстоит дело вблизи положения зимнего солнцестояния. Однако есть моменты, когда Солнце оказывается вблизи экваториальной плоскости, и тогда на ГСС происходят солнечные затмения, создаваемые Землей. Понятно, что длительность затмений максимальна, когда Солнце попадает точно в экваториальную плоскость. Тогда ГСС преодолевает область полной тени, ширина которой практически равна земному диаметру. Если пренебречь кривизной орбиты ГСС на этом участке (длина орбиты ГСС больше диаметра Земли более чем в 20 раз), то максимальное время затмения $\tau_{\max} \approx \dfrac{2R_E}{v} \approx 69{,}2$ мин. Учет кривизны орбиты незначительно изменяет результат ($\tau_{\max} \approx \dfrac{2R}{v} \arcsin\left(\dfrac{R_E}{R}\right) \approx 69{,}4$ мин). Теперь определим периоды, когда затмений не бывает. Как видно из правого рисунка, ГСС проходит через область полной тени, если угол между солнечными лучами и экваториальной плоскостью $|\theta| < \gamma = \arcsin\left(\dfrac{R_E}{R}\right) \approx 8{,}7°$. Введем в Солнечной Системе декартовы координаты: плоскость (xy) – плоскость земной орбиты, причем ось x проходит через положения солнцестояний. Тогда единичный вектор, направленный вдоль оси вращения Земли, имеет координаты $\vec{n} = (-\sin(\alpha), 0, \cos(\alpha))$. Введем еще один вектор с единичной длиной ($\vec{e}$, см. левый рисунок) – направленный вдоль радиуса орбиты Земли. Нетрудно заметить, что его координаты $\vec{e} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0)$, где φ – угол поворота Земли от положения летнего солнцестояния.

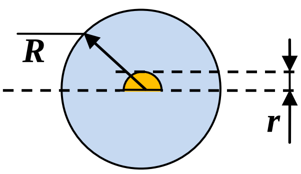
Как видно из правого рисунка, угол между этими векторами равен $90° + \theta$. Значит, $\sin(\theta) = -\cos(90° + \theta) = -\vec{n} \cdot \vec{e} = \sin(\alpha)\cos(\varphi)$. Поэтому условием прохождения через область полной тени является требование $\sin(\alpha)|\cos(\varphi)| < \frac{R_E}{R}$, то есть $|\cos(\varphi)| < \frac{R_E}{R\sin(\alpha)} \approx 0{,}380$. Значит, в течении года есть два «периода без затмений», длительность которых $t \approx \frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{R_E}{R\sin(\alpha)}\right) \cdot T_0 \approx 137$ суток. Изменение расстояния между Солнцем и Землей и изменение ориентации орбиты ГСС по отношению к Солнцу в течении года, конечно же, влияют на поток солнечной энергии, падающей на спутник, однако для нашего исследования (в котором нас интересует только то, попадает ли в принципе солнечный свет на спутник или нет) эти факторы оказались несущественными.

Ответы: 69 минут, 137 суток.

Критерии оценивания задачи 1 («тени на орбите»).

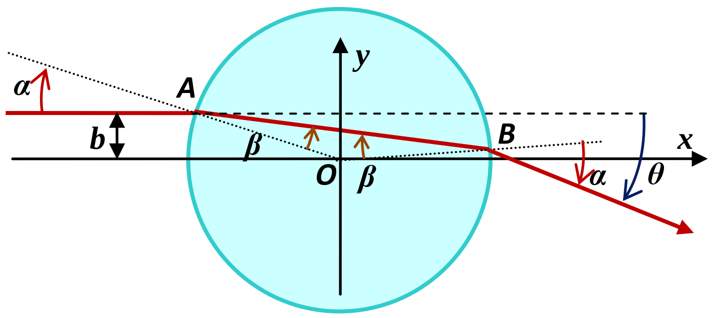
действия	макс. балл
Найден радиус орбиты ГСС и скорость на этой орбите	**2**
Проведен анализ размеров о формы области полной тени за Землей	**1**
Используется утверждение о постоянстве ориентации земной оси	**1**
Отмечено, что область тени перемещается по отношению к экваториальной плоскости Земли	**3**
Указано, что длительность затмения максимальна, когда Солнце попадает в экваториальную плоскость Земли	**2**
Правильно найдена максимальная длительность затмения (диапазон 68-71 мин)	**3**
Правильно записано условия прохождения орбиты ГСС через область тени	**2**
Правильно описано изменение угла между солнечными лучами и экваториальной плоскостью	**4**
Правильно найдена длительность периода без затмений (137 ± 3 сут)	**2**
ВСЕГО	**20**

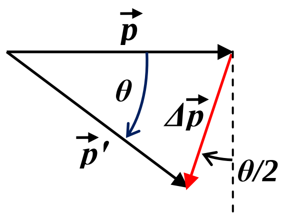
2.(«**Лазерный пинцет**») Однажды в ходе эксперимента д-ру Уилларду было необходимо «подвесить» прозрачный шарик радиусом $R = 1{,}2$ мкм с массой $m = 10^{-12}$ г. Для этого он решил использовать два встречных лазерных пучка специального сечения – в виде полукруга радиусом $r = 0{,}2$ мкм (см. рисунок). Они направлялись на шарик с двух сторон по центру шарика точно над его горизонтальным сечением. Показатель преломления вещества шарика $n = 2{,}5$, отражением света от его поверхности и поглощением света внутри можно пренебречь. Какой должна быть мощность пучков для удержания шарика? Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10$ м/с^2, скорость света $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с. В квантовой теории свет можно рассматривать как поток фотонов – частиц, у которых энергия и импульс связаны соотношением $E = c \cdot |\vec{p}|$.



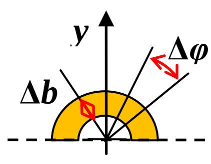
Решение:

Рассмотрим прохождение лучей через шарик. Пусть луч, падающий на поверхность шарика в точке A (см. рисунок), идет на расстоянии b от параллельной ему прямой, идущей через





центр шарика, в плоскости (xy). Тогда угол падения равен $\alpha = \arcsin\left(\dfrac{b}{R}\right)$, а угол преломления $\beta = \arcsin\left(\dfrac{b}{nR}\right)$. Поскольку треугольник AOB равнобедренный, то угол падения луча на поверхность шара изнутри равен β, а угол преломления (то есть выхода по отношению к радиусу в точке B) равен α. Нетрудно заметить, что общий угол поворота луча от исходного направления равен $\theta = 2(\alpha - \beta) = 2\left[\arcsin\left(\dfrac{b}{R}\right) - \arcsin\left(\dfrac{b}{nR}\right)\right]$. Если рассматривать свет как поток фотонов, то следует сделать вывод, что их энергия не изменяется (в веществе шара нет поглощения). Следовательно, не изменяется и модуль импульса. Но тогда изменение импульса каждого фотона, прошедшего через шарик, будет равно $|\Delta\vec{p}| = 2|\vec{p}|\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = 2\dfrac{E}{c}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$. Проекция этого импульса на ось y, перпендикулярную первоначальному направлению движению, равна $\Delta p_y = -|\Delta\vec{p}|\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = -\dfrac{E}{c}\sin(\theta)$, и поэтому шарик при прохождении одного фотона получит импульс отдачи, проекция которого на ось y $\Delta p'_y = +\dfrac{E}{c}\sin(\theta)$. Отметим, что при $b << R$ эти выражения упрощаются: $\theta \approx \dfrac{2(n-1)}{nR}b$ и $\Delta p'_y \approx +\dfrac{E}{c}\cdot\dfrac{2(n-1)}{nR}b$. Теперь обратим



внимание, что энергия светового потока в пучке равномерно распределена по площади полукруга , то есть на единицу площади в единицу времени приходится энергия $\dfrac{2P}{\pi r^2}$, где P – мощность светового пучка. Рассмотрим малую часть площади пучка, ограниченную интервалом значений расстояния от оси $(b, b+\Delta b)$ и интервалом значений угла φ, отсчитываемого от оси y, $(\varphi, \varphi+\Delta\varphi)$. Энергия, приходящаяся на эту часть в единицу времени, равна $\dfrac{2P}{\pi r^2}\cdot b\Delta\varphi\cdot\Delta b$. Ясно также, что проекция импульса отдачи, переданного от этой части светового пучка шарику в единицу времени, на ось , равна $\Delta F_y = \dfrac{1}{c}\dfrac{2(n-1)}{nR}b\dfrac{2P}{\pi r^2}\cdot b\Delta\varphi\cdot\Delta b\cdot\cos(\varphi)$.(сила как раз и равна импульсу, передаваемому в единицу времени). Осталось понять, что у двух встречных пучков x–компоненты сил сократятся (как и компоненты вдоль направления, перпендикулярного x и y), а y– компоненты удвоятся. Тогда ясно, что вклад в общую силу, действующую на шарик по оси y, от этой части площади пучков, равен $\Delta F_y = \frac{8(n-1)P}{\pi cnR}\frac{b^2}{r^2}\cdot\Delta b\cdot\cos(\varphi)\Delta\varphi$. Сумма по всем возможным значениям $0 \le b \le r$ и $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le +\frac{\pi}{2}$ дает: $\sum b^2\Delta b = \frac{1}{3}\sum\Delta(b^3) = \frac{r^3}{3}$ и $\sum\cos(\varphi)\Delta\varphi = \sum\Delta[\sin(\varphi)] = 2$ (участники, знакомые с интегрированием, могут выполнить эту часть с помощью него). Итак, результирующая сила направлена перпендикулярно пучкам и равна $F_y = \frac{16(n-1)r}{3\pi cnR}P$. Чтобы она уравновесила вес шарика, должно выполняться равенство $mg = \frac{16(n-1)r}{3\pi cnR}P$, откуда находим: $P = \frac{3\pi cnR}{16(n-1)r}mg \approx 18$ мкВт.

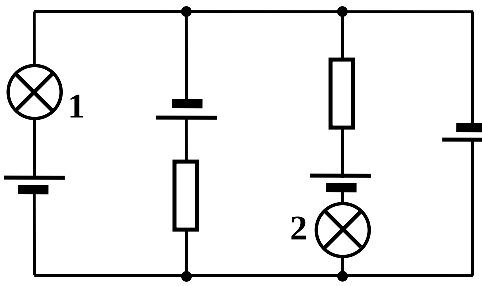
Ответ: $P = \frac{3\pi cnR}{16(n-1)r}mg \approx 18$ мкВт.

Критерии оценивания задачи 2 («лазерный пинцет»).

действия	**макс. балл**
Идея о том, что сила появляется из-за поворота потока импульса пуска при преломлении	**3**
Используется правильная связь мощности с плотностью потока импульса (есть формула типа «поток импульса=P/площаль/c»)	**3**
Правильно описан ход лучей в шаре	**2**
Правильно вычислен угол отклонения луча	**2**
Получена правильная формула изменения импульса (модуль, вектор, проекция)	**2**
Правильно вычислена сила (если ошибка в интегрировании, или в проецировании, или сила вычислена по «среднему значению, без суммирования вкладов от разных участков – **2** балла)	**5**
Получена правильная формула для мощности (если те же недостатки – **1** балл)	**2**
Правильный численный ответ (от 17 до 19 мкВт)	**1**
ВСЕГО	**20**

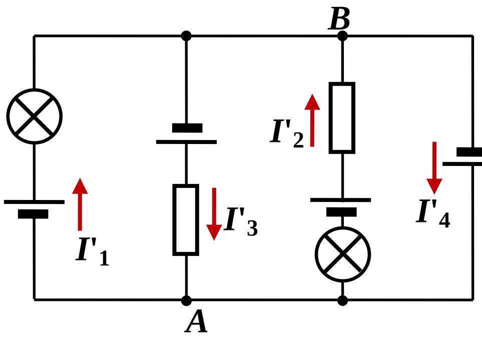
Комментарий: Данные этой задачи не совсем реалистичны: создание пучков с таким сечением в области расположения шарика технически проблематично. Для этого как минимум нужно использовать лазер с длиной волны, намного меньше 0,2 мкм (за пределами оптического диапазона). Само вещество имеет низкую плотность и высокий для такого излучения коэффициент преломления. На самом деле подбор параметров был осуществлен таким образом, чтобы у участников была возможность воспользоваться параксиальным приближением с высокой точностью, и избежать вычисления сложного интеграла (некоторые участники, впрочем, сумели справиться с интегрированием и без использования условия малости углов). В реальности анализ работы лазерного пинцета проводится несколько сложнее, но сама идея его реалистична – такие установки действительно используются и в научном эксперименте, и в прикладных разработках, особенно в медикобиологической области. В 2018 году за создание лазерного пинцета Артур Ашкин получил Нобелевскую премию по физике.

3.(«**Нелинейный светильник**») Как-то на досуге Ф.Д.Ч.Уиллард решил собрать светильник из двух одинаковых ламп, двух одинаковых резисторов и четырех одинаковых аккумуляторов. У него был довольно точный амперметр, и он измерил силу тока в цепи при подключении одной лампы к одному аккумулятору. Она оказалась равной $I_1 = 1{,}50$ А. Затем он измерил силу тока аккумулятора при подключении к нему двух ламп, соединенных параллельно. Теперь сила тока оказалась равна $I_2 = 2{,}40$ А. Наконец, он измерил силу тока в цепи из одного аккумулятора и одного резистора: она была равна $I_0 = 0{,}40$ А. Тогда исследователь собрал светильник по схеме, показанной на рисунке. Во сколько раз отличались в нем мощности потребления ламп 1 и 2? Известно, что у этих ламп сила тока пропорциональна корню квадратному из приложенного напряжения. Получите в ответе численное значение, добившись максимальной возможной точности (ошибка показаний амперметра – половина единицы последнего указанного разряда).



Решение:

Начнем с того, как нужно использовать данные задачи. Пусть $\mathcal{E}$ и r – ЭДС и внутреннее сопротивление аккумулятора, а R – сопротивление резистора. Согласно условию, напряжение на лампе можно связать с протекающим через нее током соотношением $U = \alpha \cdot I^2$, где α – постоянный коэффициент. Тогда при подключении одной лампы $\mathcal{E} - I_1 r = \alpha \cdot I_1^2$, а при подключении двух $\mathcal{E} - I_2 r = \alpha \cdot \left(\frac{I_2}{2}\right)^2$. Разделив эти уравнения одно на другое, найдем, что $\mathcal{E} = \frac{I_1 I_2 (4I_1 - I_2)}{(2I_1 - I_2)(2I_1 + I_2)} r \equiv \bar{I}\, r$. Подставив значения I_1 и I_2, найдем, что $\bar{I} = 4{,}00$ А. Тогда для подключения резистора: $\mathcal{E} = I_0 (r + R) = \bar{I} r$, то есть $R = \frac{\bar{I} - I_0}{I_0} r = 9r$. Теперь, используя найденные отношения, запишем уравнения закона Ома для схемы светильника вместе с уравнением непрерывности тока. При этом обозначим токи в ветвях так, как показано на рисунке, и обозначим разность потенциалов точек A и B $\varphi_A - \varphi_B \equiv U$. Тогда:



$$\begin{cases} U = -\bar{I} \cdot r + I_1' \cdot r + \alpha \cdot I_1'^2 \\ U = -\bar{I} \cdot r + I_2' \cdot 10r + \alpha \cdot I_2'^2 \\ U = \bar{I} \cdot r - I_3' \cdot 10r \\ U = \bar{I} \cdot r - I_4' \cdot r \\ I_1' + I_2' = I_3' + I_4' \end{cases}$$

Эта система уравнений позволяет найти все неизвестные, но при аналитическом решении она приводит к уравнению высокой степени, поэтому лучше ее решать именно «в числах».

Для этого введем безразмерные переменные $x_i \equiv \dfrac{I'_i}{\bar{I}}$, $i = 1,2,3,4$ и $u \equiv \dfrac{U}{\mathcal{E}} = \dfrac{U}{\bar{I} r}$. Учтем также, что $\alpha = \dfrac{\bar{I} - I_1}{I_1^2} r = \dfrac{\bar{I}(\bar{I} - I_1)}{I_1^2} \dfrac{r}{\bar{I}} = \dfrac{40}{9} \dfrac{r}{\bar{I}}$. Тогда наша система преобразуется к виду:

$$\begin{cases} x_1^2 + \dfrac{9}{40} x_1 - \dfrac{9}{40}(1+u) = 0 \\ x_2^2 + \dfrac{9}{4} x_2 - \dfrac{9}{40}(1+u) = 0 \\ x_3 = 0{,}1 - 0{,}1u \\ x_4 = 1 - u \\ x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{8}{9}[-0{,}1 + \sqrt{0{,}01 + z}] \\ x_2 = \dfrac{8}{9}[-1 + \sqrt{1+z}] \\ z = \dfrac{8}{45}(1+u) \\ \sqrt{1+z} + \sqrt{0{,}01+z} = \dfrac{55}{18} - \dfrac{11}{2} z \end{cases}.$$

Теперь все свелось к решению последнего уравнения для переменной z, а затем через нее выражаются токи через обе лампы. Его можно решить графически, но проще решить его численно – например, с помощью программы Excel, вычислив в соседних колонках значения правой и левой частей уравнения. Тогда найдем, что $z \approx 0{,}25760 \pm 0{,}00001$. Сам по себе корень можно найти и с большей точностью, но это не имеет особого смысла – токи измерены с точностью около 1%, так что мы и так сохранили два «запасных» порядка для промежуточных вычислений. Теперь легко можно найти, что $x_1 \approx 0{,}46947 \pm 0{,}00001$ и $x_2 \approx 0{,}13661 \pm 0{,}00001$ (и здесь указаны ошибки <u>вычислений</u> при решении уравнений). Как видно, точность результатов при таком подходе определяется в основном точностью данных измерений. Поэтому для величин токов через лампы (в этих выражениях будем указывать реальную точность) следует принять $I'_1 \approx (1{,}878 \pm 0{,}005)$ А и $I'_2 \approx (0{,}546 \pm 0{,}005)$ А. Мощность, потребляемая лампой $P = U(I) \cdot I = \alpha \cdot I^3$, и поэтому $\dfrac{P_1}{P_2} = \left(\dfrac{I'_1}{I'_2}\right)^3 = \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^3 \approx 40{,}6 \pm 1{,}1$. Здесь важно понимать, что относительная ошибка в этом результате увеличивается: как видно, само отношение мы находим с точностью чуть лучше 1%, поэтому его куб мы получаем с точностью чуть лучше 3%, поскольку при малых отклонениях $\dfrac{\Delta(a^3)}{a^3} \approx 3\dfrac{\Delta a}{a}$.

Ответ: $\dfrac{P_1}{P_2} \approx 40{,}6 \pm 1{,}1$.

Критерии оценивания задачи 3 («нелинейный светильник»).

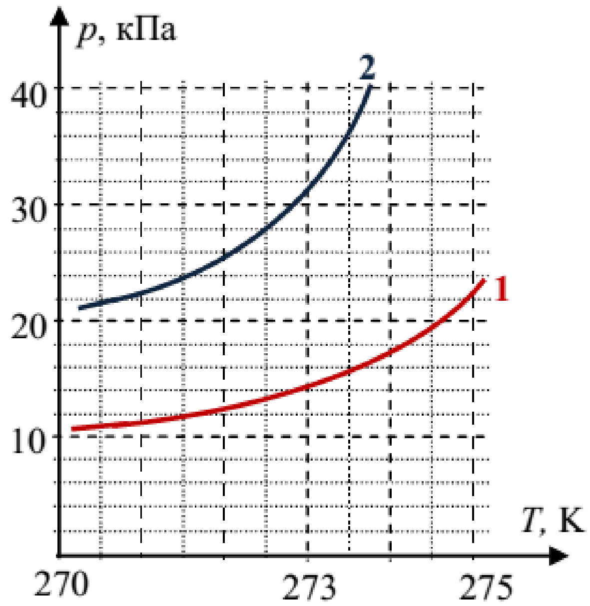
действия	**макс. балл**
Правильно записаны соотношения, позволяющие использовать заданные результаты измерений (по **1** баллу за каждое)	**3**
Правильно записана ПОЛНАЯ система уравнений, из которых токи через лампы могут быть выражены через заданные токи: уравнения Кирхгофа, закона Ома и т.д. (при неполной системе за каждое недостающее уравнение **– 1** балл)*	**4**
Система сведена к одному (двум) уравнению(-ям), которое(-ые) может(-гут) быть решено(-ы) графически или численно**	**2**
Предложен и реализован путь решения, приведший к правильному решению этого уравнения (уравнений)**	**2**

Установлено, что отношение мощностей равно кубу отношения токов	**1**
Получен правильный численный ответ (от 40 до 41, если попадание только в интервал от 39,5 до 41,5 – **1** балл)	**2**
Предложена разумная оценка точности результата	**1**
ВСЕГО	**15**

*в целом предполагается, что полная система содержит 5 уравнений для 5 неизвестных: например (как в приведенном варианте) это 4 тока в ветвях и напряжение $\varphi_A - \varphi_B \equiv U$, или это может быть система 4 уравнений Кирхгофа для 4 контурных токов, в которой 5-е засчитывается, хотя и явно не написано (уравнение непрерывности тока в этом случае выполняется автоматически); таким образом за **одно** правильное уравнение, не включенное ни в какую систему (и «автоматически» выполненные требования отсутствуют), баллы не ставились.

**участник мог не сводить явно систему к одному уравнению, а свести ее к двум или даже трем, которые он будет решать графически или численно, и если на своем (пусть, возможно, и менее удобном для вычислений) пути он достиг цели (нашел правильное решение), то баллы за эти пункты ставятся полностью; однако в случае, когда построить правильное решение не удалось, баллы за первый из этих пунктов ставятся только, если получено одно уравнение или два, которые могут быть решены совместно; если правильное численное решение построенной системы приведено, но не указан метод его получения (нет ни графика, ни ссылки на численный метод или использованную программу), то баллы за второй из этих пунктов не ставились!

4.(«**Смесь паров**») В лабораторных журналах Ф.Д.Ч. Уилларда был найден отчет об одном интересном эксперименте. В нем исследовалось поведение давления смеси сухого воздуха и паров двух довольно необычных синтезированных исследователем веществ при изменении объема смеси. На рисунке показаны зависимости давлений насыщенных паров этих веществ от температуры (в той области значений температуры, в которой проводились исследования). В качестве примера ниже приведена таблица значений давления смеси в сосуде под поршнем при разных объемах для некоторой постоянной температуры. В журнале отмечено, что «полученная в этом опыте изотерма обладает интересной особенностью – на ней заметен только один излом, положение которого отмечено в таблице "звездочкой"». Определите температуру изотермы и вычислите количества веществ 1 и 2 в смеси.



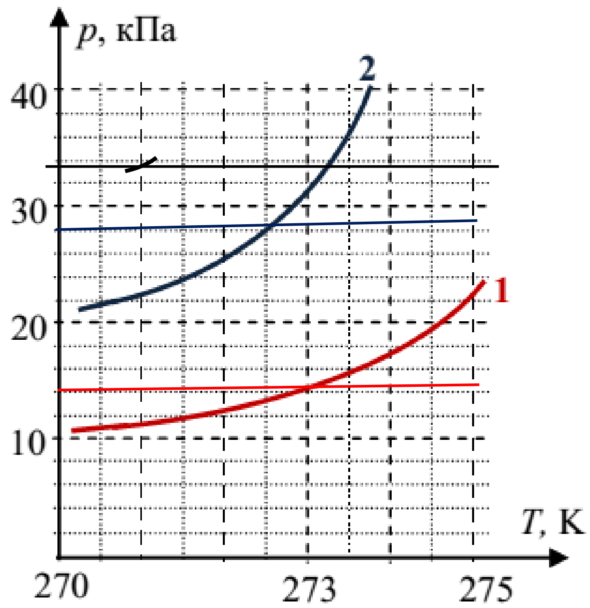
Найдите, до какой температуры нужно нагреть смесь при объеме 40 л, чтобы в ней не осталось жидких компонент. Известно, что в жидком состоянии эти вещества не смешиваются. Опыт проводился в невесомости, и никакие из компонент смеси не покидали сосуда.

Таблица:

V, л	30,0	40,0	50,0*	60,0	70,0
p, кПа	127,61	104,16	90,08	75,07	64,34

Решение:

Давление смеси создается суммой парциальных давлений сухого воздуха и паров веществ. Обозначим ν – количество сухого воздуха в смеси, ν_1 и ν_2 – количества веществ 1 и 2. Тогда, пока оба вещества находятся только в газообразном состоянии, давление равно $p = (\nu + \nu_1 + \nu_2)\dfrac{RT}{V}$. Точка излома на изотерме паровоздушной смеси появляется, когда пар начинает конденсироваться (до этого изотерма – гладкая гипербола). Единственность излома означает, что оба вещества начинают конденсироваться одновременно, то есть парциальное давление каждого из них становится равным давлению насыщенного пара при одном и том же значении объема. Значит, в точке излома $p_0V_0 = (\nu + \nu_1 + \nu_2)RT = \nu RT + p_1 + p_2$, где p_1 и p_2 – давления насыщенных паров 1 и 2 при температуре T. Кроме того, $\dfrac{RT}{V_0} = \dfrac{p_1}{\nu_1} = \dfrac{p_2}{\nu_2} \Rightarrow \dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{\nu_2}{\nu_1}$. Запишем выражение для давления при значении объема $V_A < V_0$: $p_A = p_1 + p_2 + \dfrac{\nu RT}{V_A}$. Исключая из этого выражения и уравнения $p_0 = p_1 + p_2 + \dfrac{\nu RT}{V_0}$ значение νRT, получим: $p_1 + p_2 = \dfrac{p_0V_0 - p_AV_A}{V_0 - V_A}$. Например, для $V_A = 30$ л найдем, что $p_1 + p_2 = \dfrac{p_0V_0 - p_AV_A}{V_0 - V_A} \approx 33{,}785$ кПа. Аналогично для $V_B = 40$ л $p_1 + p_2 \approx 33{,}76$ кПа, и для большей точности возьмем среднее этих значений: $p_1 + p_2 \approx 33{,}77$ кПа. Теперь мы можем воспользоваться графиком давлений насыщенных паров: температура изотермы соответствует температуре, при которой сумма этих давлений равна найденному значению. Кривую зависимости $p_1 + p_2$ от температуры можно строить «поточечным» суммирований значений давлений. Тогда можно заметить, что с неплохой точностью нам подходит $T \approx 271{,}0$ К. Отметим, что при этом значении температуры $p_1 \approx 11{,}26$ кПа и $p_2 \approx 22{,}51$ кПа (конечно, последний разряд здесь указан «про запас» – реальная точность позволяет уверенно находить значения с точностью не выше $\pm 0{,}2$ кПа). Как видно, $\dfrac{p_2}{p_1} \approx 2{,}0$. Значит,



$\dfrac{\nu_2}{\nu_1} \approx 2{,}0$. Это значение при аккуратной работе может быть определено с точностью около 3%. Кроме того, теперь мы можем определить $\nu_1 = \dfrac{p_1V_0}{RT} \approx 0{,}25$ моля и $\nu_2 \approx 0{,}50$ моля. При температуре изотермы и объеме $V_B = 40$ л оба вещества частично сконденсированы, и для их полного испарения температуру нужно повысить, чтобы давление каждой компоненты стало меньше или равно давлению насыщенного пара. Значит, для определения минимальной необходимой температуры нам нужно решить уравнение $\frac{\nu RT}{V_B} = p_H(T)$. Это можно сделать графически (построив на графике для каждого вещества прямую $p = \frac{\nu RT}{V_B}$ и найдя ее пересечение с $p_H(T)$ – см. построение на графике) или численно, сняв зависимость $p_H(T)$ и вычислив величину $\frac{p_H(T)}{T}$, а затем найти точку, где она равна $\frac{\nu R}{V_B}$. Как видно, в ходе изохорического нагревания при объеме $V_B = 40$ л вещество 2 полностью испарится при температуре $T_2 \approx 272{,}6$ К, а вещество 1 – при $T_1 \approx 273{,}0$ К. Значит, для полного испарения обеих компонент нужно нагреть смесь до 273 К.

Ответы: температура изотермы $T \approx 271$К, количества веществ $\nu_1 \approx 0{,}25$ моля и $\nu_2 \approx 0{,}50$ моля, для полного испарения обеих жидких компонент в объеме 40л нужно нагреть смесь до температуры $T_1 \approx 273$К.

Критерии оценивания задачи 4 («смесь паров»).

действия	**макс. балл**
Записаны уравнения Менделеева-Клапейрона для точки излома и при меньшем объеме	**2**
Используется идея о том, что конденсация двух паров началась одновременно	**4**
Правильно вычислена p_1+p_2	**2**
Правильно определена температура изотермы (271±0,1)К (если попадание только в (271±0,3)К – **1** балл)	**4**
Правильно найдено ν_1 (0,25±0,05)моля	**2**
Правильно найдено ν_2 (0,50±0,05)моля	**2**
Записано правильное уравнение (выполнено правильное построение) для определения температуры полного испарения	**2**
Найдена температура полного испарения (273±0,2)К (если попадание только в (273±0,4)К – **1** балл)	**2**
ВСЕГО	**20**