Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заочного этапа 2023/2024 учебного года для 9 класса

1. Незнайка забыл пин-код от своего смартфона, он помнил только, что:
   1) Пин-код состоит из 4 цифр, образующих 4-значное число, являющееся точным квадратом (квадратом целого числа).
   2) Если каждую из цифр пин-кода увеличить на одно и то же значение, то получится снова 4-значное число, также являющееся точным квадратом.

   Услышав это, Знайка, немного подумал и сказал «Существует всего два 4-значных числа с такими свойствами».

   Найдите эти числа. В ответе укажите их подряд без пробела, сначала меньшее, потом большее. Например, если это числа 9876 и 1234, то в ответе следует указать «12349876».

Ответ: 11562025.

Решение:

Допустим, пин-код равен a^2, тогда $a^2 + k \cdot 1111 = b^2, b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) \vdots 1111 = 101 \cdot 11$. Заметим, что, поскольку $b < 100$, то $(b-a)$ не может быть кратно 101. Следовательно, $(a+b) \vdots 101$. Но $a < b < 100$, следовательно $a + b = 101$. Поэтому b – a = 11k. Так как $a > \sqrt{1000} > 30$, то $b - a < 70$ и нечетно. Разбираем варианты: $b - a = 11, 33, 55$. Первые два дают $b = 56, a = 45$ и $b = 67, a = 34$. Последний дает $b = 78, a = 23 < 30$ – не подходит. Таким образом, пин-код равен $34^2 = 1156$ или $45^2 = 2025$.

2. Коля играет в стратегическую игру, в его войске 31 воин. Крестьян больше, чем лучников; лучников больше, чем копейщиков; копейщиков больше, чем мечников; мечников больше, чем рыцарей. Найдите, сколько у него лучников, если известно, что крестьян ровно в 3 раза больше, чем рыцарей.

Ответ: 8.

Решение: Обозначим $a_1, \dots, a_5$ количество крестьян, лучников, копейщиков, мечников и рыцарей, соответственно, из условий задачи $a_1 + \dots + a_5 = 31, a_1 = 3a_5, a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$.

Заметим, что $a_4 \geq a_5 + 1, a_3 \geq a_5 + 2, a_2 \geq a_5 + 3$. Т.е. $31 = a_1 + \dots + a_5 \geq 7a_5 + 6$, откуда $a_5 \leq 3$. С другой стороны $a_1 = 3a_5, a_2 \leq 3a_5 - 1, a_3 \leq 3a_5 - 2, a_4 \leq 3a_5 - 3$, сложим, получим $31 \leq 13a_5 - 6$, значит $a_5 > 2$.

Следовательно, $a_5 = 3, a_1 = 9, a_2 + a_3 + a_4 = 19$. Это может быть только при $a_2 = 8$, иначе сумма не превосходит 7+6+5=18.

3. Коле на день рождения подарили набор из 12 фломастеров разных цветов. Коля начал рисовать одинаковые по размеру правильные треугольники и раскрашивать их стороны новыми фломастерами, каждую сторону треугольника он раскрашивает одним из 12 цветов. Коля хочет, чтобы у него не оказалось одинаково раскрашенных треугольников. Одинаково раскрашенными Коля считает треугольники, составленные из одинаковых по цвету отрезков. Например, треугольники на рис. 1 являются одинаковыми (они составлены из зеленого, красного и синего отрезков), а треугольники на рис. 2 не одинаковы (в одном из них две синих стороны и одна красная, а в другом две красных и одна синяя). Какое максимальное количество разных треугольников Коля сможет раскрасить таким образом?

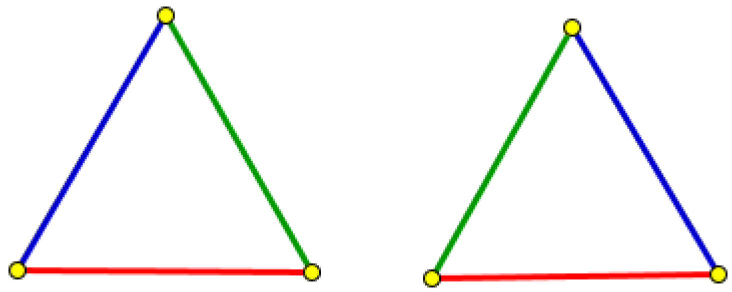


Рис 1. Треугольники раскрашены одинаково

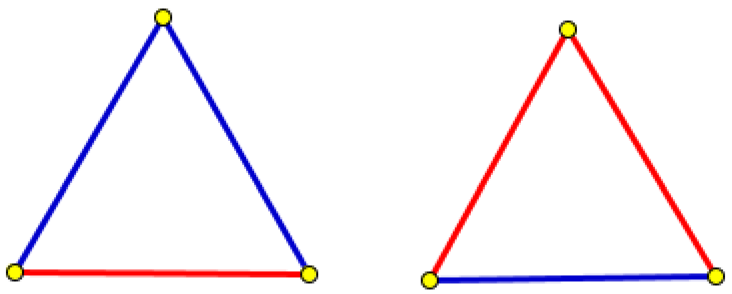


Рис 2. Треугольники раскрашены по-разному

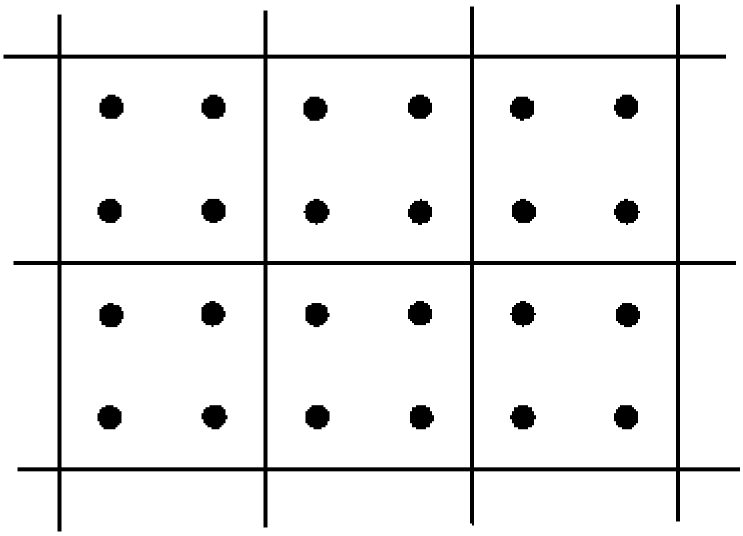
Ответ: 364

Решение: Треугольников, покрашенных в один цвет, будет 12. Треугольников, покрашенных в 2 цвета $12 \cdot 11 = 132$ (первый цвет будет у двух сторон, второй – у третьей стороны). Треугольников, покрашенных в 3 цвета, будет $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} = 220$ (выбираем три цвета и учитываем, что для каждого выбора цветов треугольник повторяется 6 раз). Поэтому уникальных треугольников будет 12+132+220 = 364.

4. На плоскости покрашены в черный цвет точки с целыми координатами (x, y), где x,y принимают целые значения от 1 до 2024 (т.е. всего 2024^2 точек). Найдите максимальное число точек, которые можно перекрасить в красный цвет с соблюдением условия: каждый отрезок, концы которого окрашены в красный цвет содержит по крайней мере одну точку, покрашенную в черный.

Ответ: $\mathbf{1024144}$.

Решение: Разобьем точки на квадраты 2*2 (см. рис.) их будет $1012^2 = 1024144$, очевидно , что по условию нельзя ставить две красные точки в один квадрат. Значит можно покрасить не более $1012^2 = (1000 + 12)^2 = 1000000 + 24000 + 144 = 1024144$



Покажем, как покрасить 1012^2. – покрасим точки с координатами вида $(2m, 2n)$, где m,n – целые. Докажем, что каждый отрезок с красными концами содержит черную точку. Доказываем индукцией по квадрату длины отрезка, которая может принимать только целые значения.

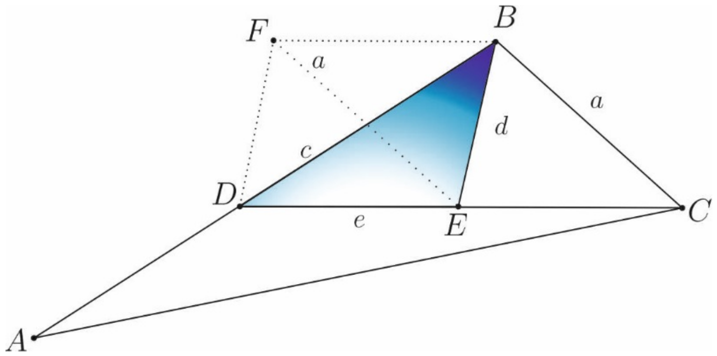
База – квадрат длины равен 4 (меньше не может быть). Для него утверждение очевидно: отрезок $(2m, 2n) - (2m + 2{,}2n)$ содержит черную точку$(2m + 1{,}2n)$, аналогично $(2m, 2n) - (2m, 2n + 2)$ и $(2m, 2n) - (2m + 2{,}2n + 2)$.

Шаг индукции. Соединим отрезком точки $(2m, 2n)$ и $(2m', 2n')$. Рассмотрим середину отрезка $(m + m', n + n')$. Если она черная, то все доказано. Если же она красная, то отрезок $(2m, 2n) - (m + m', n + n')$ в два раза короче и на нем, по предположению индукции, есть черная точка.

5. Точка D лежит на стороне AB треугольника ABC, причём $BD : DA = (\sqrt{3} + 1) : 2$. Точка *E* – середина отрезка *DC*. Найдите минимально возможное значение выражения $AB^2 + BC^2$, если известно, что произведение всех медиан в треугольнике DBE не менее 1728. При необходимости округлите ответ до сотых.

   Ответ: 1152.

   Решение. Обозначим $c = |BD|$, $a = |BC|$, $d = |BE|$, $e = |DE|$, медианы в треугольнике DBE обозначим через m_c, m_d, m_e. Тогда из условия вытекает, что $AB = \sqrt{3}c$. Если достроить параллелограмм (см рис. 1) $DFBE$, то из равенства $DE = EC$ вытекает, что $EFBC$ — тоже параллелограм. Откуда $EF = a$ и $a^2 + c^2 = 2(d^2 + e^2)$.



Используя то, что сумма всех квадратов сторон в произвольном треугольнике равна 4/3 от суммы всех квадратов медиан, получаем

$$AB^2+BC^2=a^2+3c^2=2c^2+(a^2+c^2)=2c^2+2(e^2+d^2)=2(c^2+e^2+d^2)=\frac{8}{3}(m_c^2+m_d^2+m_e^2)\geqslant$$

$$8(m_c\cdot m_d\cdot m_e)^{2/3}\geqslant 8\cdot(1728)^{2/3}=8\cdot 144=1152.$$

Знак равенства в данной оценке достигается в случае, когда треугольник DBE равносторонний.

6. Найдите наибольшее значение выражения

$$M(x,y,z)=\frac{|100(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)|}{((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2+(x+y+z)^2)^2}$$

при условии, что x, y, z не обращаются одновременно в ноль. При необходимости округлите ответ до сотых

Ответ: 4,42.

Решение: Не ограничивая общности можно считать $z\geq y\geq x$ (иначе переставим переменные). Также заметим, что при умножении x, y, z на одно и то же число величина $M(x,y,z)$не меняется. В силу однородности числителя и знаменателя, за счёт умножения на одно и тоже число как числителя, так и знаменателя можно добиться, чтобы $|x+y+z|=1$. Обозначим $z-x=2d$, Тогда $(z-y)(y-x)\leq d^2$, т.е. $P=|(z-x)(z-y)(y-x)(x+y+z)|\leq 2d^3$. С другой стороны $Q=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2+(x+y+z)^2=(x-y)^2+(y-z)^2+4d^2+1\geq 6d^2+1$. Запишем правую часть как $4\cdot\frac{1}{4}(2d^2+2d^2+2d^2+1)$ и воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$4\cdot\frac{1}{4}(2d^2+2d^2+2d^2+1)\geq 4\sqrt[4]{8d^6}.$$

Таким образом $Q^2\geq 32\sqrt{2}\ d^3$, следовательно, $\frac{P}{Q^2}\leq\frac{2d^3}{32\sqrt{2}\ d^3}=\frac{\sqrt{2}}{32}$, и максимальное значение равно $\frac{100\sqrt{2}}{32}=\frac{25\sqrt{2}}{8}=4{,}419417\ldots\approx 4{,}42$.

Подберем теперь (x,y,z) так, чтобы все неравенства превратились в равенства.

Тогда $2d^2=1\Rightarrow d=\frac{1}{\sqrt{2}}, y=x+d, z=x+2d, x+y+z=1\ \ \Rightarrow 3(x+d)=1$.

Видим, что при $x=\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{2}}, y=\frac{1}{3}, z=\ \frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}$ равенство выполняется.

Замечание. Знаменатель в условии можно было упростить до вида $9(x^2+y^2+z^2)^2$, а далее провести похожие рассуждения.