Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заочного этапа 2023/2024 учебного года для 7-8 класса

1. Кто-то разбил окно в классе. Подозрение пало на трех хулиганов: Андрея, Бориса и Василия. Когда их вызвали к директору, каждый из них сказал следующее:

Андрей:

1) Я не разбивал окно
2) Меня вообще в тот день в школе не было
3) Окно разбил Вася

Борис:

1) Окно разбил Вася
2) Даже если бы я разбил, то все равно бы не сознался
3) У меня и так уже два раза родителей вызывали в этом месяце

Василий:

1) Это не я разбил окно
2) Я люблю бить стекла
3) Андрея действительно не было в школе этот день

Как потом оказалось, каждый из них два раза сказал правду и один раз солгал. Кто разбил окно?

Ответ: Борис.

Решение: Допустим, что окно разбил Андрей, тогда у него все три утверждения ложны.

Допустим, что окно разбил Вася. Тогда 1 и 3 утверждения Андрея верны, следовательно, второе неверно, т.е. он был в школе. Тогда у Василия 1 и 3 утверждения ложные – противоречие.

Остается Борис. Тогда у Андрея истинны утверждения 1 и 2, у Бориса – 2 и 3, у Василия – 1 и 3.

2. Незнайка забыл пин-код от своего смартфона, он помнил только, что:
   1) Пин-код состоит из 4 цифр, образующих 4-значное число, являющееся точным квадратом (квадратом целого числа).
   2) Если каждую из цифр пин-кода увеличить на одно и то же значение, то получится снова 4-значное число, также являющееся точным квадратом.

   Услышав это, Знайка, немного подумал и сказал «Существует всего два 4-значных числа с такими свойствами».

Найдите эти числа. В ответе укажите их подряд без пробела, сначала меньшее, потом большее. Например, если это числа 9876 и 1234, то в ответе следует указать «12349876».

Ответ: 11562025.

Решение:

Допустим, пин-код равен a^2, тогда $a^2 + k \cdot 1111 = b^2, b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) \vdots 1111 = 101 \cdot 11$. Заметим, что, поскольку $b < 100$, то $(b-a)$ не может быть кратно 101. Следовательно, $(a+b) \vdots 101$. Но $a < b < 100$, следовательно $a + b = 101$. Поэтому b – a = 11k. Так как $a > \sqrt{1000} > 30$, то $b - a < 70$ и нечетно. Разбираем варианты: $b - a = 11, 33, 55$. Первые два дают $b = 56, a = 45$ и $b = 67, a = 34$. Последний дает $b = 78, a = 23 < 30$ – не подходит. Таким образом, пин-код равен $34^2 = 1156$ или $45^2 = 2025$.

3. Коля играет в стратегическую игру, в его войске 31 воин. Крестьян больше, чем лучников; лучников больше, чем копейщиков; копейщиков больше, чем мечников; мечников больше, чем рыцарей. Найдите, сколько у него лучников, если известно, что крестьян ровно в 3 раза больше, чем рыцарей.

Ответ: 8.

Решение: Обозначим $a_1, \dots, a_5$ количество крестьян, лучников, копейщиков, мечников и рыцарей, соответственно, из условий задачи $a_1 + \dots + a_5 = 31, a_1 = 3a_5, a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$.

Заметим, что $a_4 \geq a_5 + 1, a_3 \geq a_5 + 2, a_2 \geq a_5 + 3$. Т.е. $31 = a_1 + \dots + a_5 \geq 7a_5 + 6$, откуда $a_5 \leq 3$. С другой стороны $a_1 = 3a_5, a_2 \leq 3a_5 - 1$, $a_3 \leq 3a_5 - 2, a_4 \leq 3a_5 - 3$, сложим, получим $31 \leq 13a_5 - 6$, значит $a_5 > 2$.

Следовательно, $a_5 = 3, a_1 = 9, a_2 + a_3 + a_4 = 19$. Это может быть только при $a_2 = 8$, иначе сумма не превосходит 7+6+5=18.

4. На плоскости расположено 2024 точки. Коля проводит замкнутые кривые без самопересечений (произвольной формы) по следующим правилам:
   - кривые не пересекаются;
   - каждая кривая содержит внутри хотя бы одну точку;
   - любые две кривые содержат внутри разные наборы точек.

Какое наибольшее количество таких кривых он сможет провести?

Ответ: 4047.

Решение: Очевидно, что для каждой точки есть контур, окружающий ее. Иначе его можно добавить и число кривых увеличится. Также обязательно найдется контур содержащий 2 точки (если все контуры содержат более 2 точек, то его можно добавить внутри контура с > 2 точками) "Склеим" две точки, содержащиеся внутри такого контура в одну. Число точек уменьшилось на 1, а число контуров - на 2. Проделаем так 2023 раза - останется одна точка и один контур. Значит изначально было 2023*2+1=4047 контуров.

5. Коле на день рождения подарили набор из 12 фломастеров разных цветов. Коля начал рисовать одинаковые по размеру правильные треугольники и раскрашивать их стороны новыми фломастерами, каждую сторону треугольника он раскрашивает одним из 12 цветов. Коля хочет, чтобы у него не оказалось одинаково раскрашенных треугольников. Одинаково раскрашенными Коля считает треугольники, составленные из одинаковых по цвету отрезков. Например, треугольники на рис. 1 являются одинаковыми (они составлены из зеленого, красного и синего отрезков), а треугольники на рис. 2 не одинаковы (в одном из них две синих стороны и одна красная, а в другом две красных и одна синяя). Какое максимальное количество разных треугольников Коля сможет раскрасить таким образом?

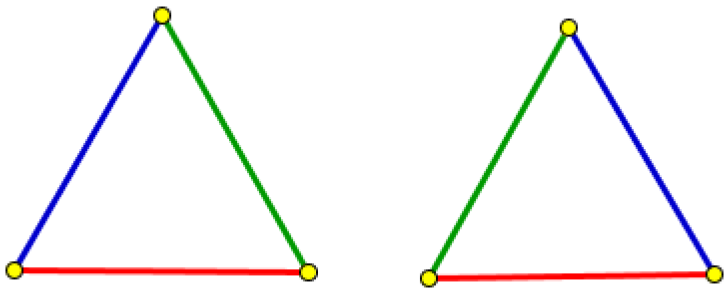


Рис 1. Треугольники раскрашены одинаково

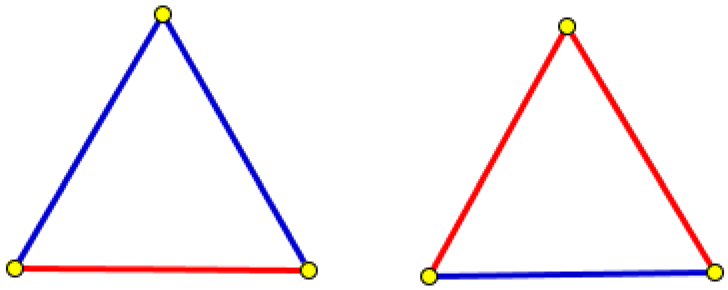


Рис 2. Треугольники раскрашены по-разному

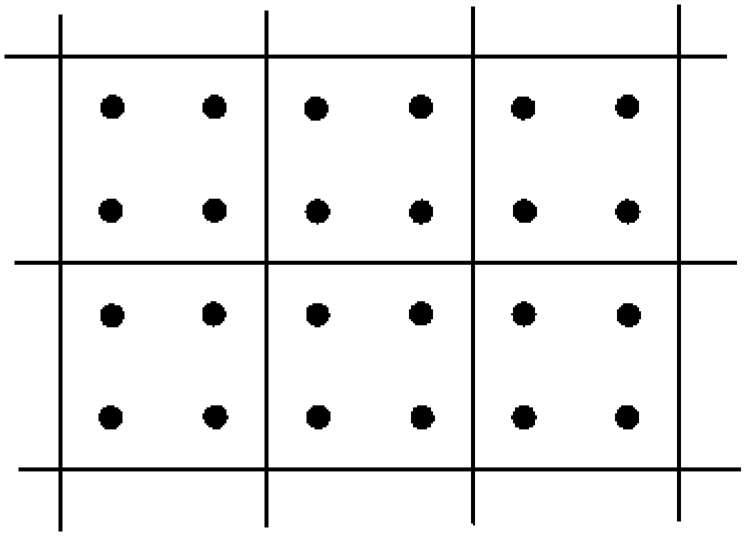
Ответ: 364

Решение: Треугольников, покрашенных в один цвет, будет 12. Треугольников, покрашенных в 2 цвета $12 \cdot 11 = 132$ (первый цвет будет у двух сторон, второй – у третьей стороны). Треугольников, покрашенных в 3 цвета, будет $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} = 220$ (выбираем три цвета и учитываем, что для каждого выбора цветов треугольник повторяется 6 раз). Поэтому уникальных треугольников будет 12+132+220 = 364.

6. На плоскости покрашены в черный цвет точки с целыми координатами (x, y), где x,y принимают целые значения от 1 до 2024 (т.е. всего 2024^2 точек). Найдите максимальное число точек, которые можно перекрасить в красный цвет с соблюдением условия: каждый отрезок, концы которого окрашены в красный цвет содержит по крайней мере одну точку, покрашенную в черный.

Ответ: $\mathbf{1024144}$.

Решение: Разобьем точки на квадраты 2×2(см. рис.) их будет $1012^2 = 1024144$, очевидно , что по условию нельзя ставить две красные точки в один квадрат. Значит, можно покрасить не более 1012^2 точек



Покажем, как покрасить 1012^2 – покрасим точки с координатами вида $(2m, 2n)$, где m,n – целые. Докажем, что каждый отрезок с красными концами содержит черную точку. Доказываем индукцией по квадрату длины отрезка, которая может принимать только целые значения.

База – квадрат длины равен 4 (меньше не может быть). Для него утверждение очевидно: отрезок $(2m, 2n) - (2m + 2{,}2n)$ содержит черную точку$(2m + 1{,}2n)$, аналогично $(2m, 2n) - (2m, 2n + 2)$ и $(2m, 2n) - (2m + 2{,}2n + 2)$.

Шаг индукции. Соединим отрезком точки $(2m, 2n)$ и $(2m', 2n')$. Рассмотрим середину отрезка $(m + m', n + n')$. Если она черная, то все доказано. Если же она красная, то отрезок $(2m, 2n) - (m + m', n + n')$ в два раза короче и на нем, по предположению индукции, есть черная точка.