

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заочного этапа 2024/2025 учебного года для 5–6 класса

1) У Коли и его отца день рождения в один и тот же день. Когда Коле исполнилось 13, его папе исполнилось 31 и Коля заметил, что возраст отца получается из его возраста перестановкой цифр. Через сколько лет это повторится (т.е. возраст отца будет составлен из тех же цифр, что возраст Коли, идущих в обратном порядке)?

Ответ: Например, через 11 лет. Коле исполнится 24 года, а его отцу – 42

Замечание: Поскольку данное событие повторялось через каждые 11 лет, то в качестве правильного ответа засчитывалось любое число из набора: 11,22,33,44,55,66 (или их комбинация).

2) В примере на умножение буквы А, В, С обозначают три различные цифры, не равные нулю.

$$\begin{array}{r} \text{А В} \\ \times \\ \hline \text{С В} \\ * \text{ 9} \\ * * \\ \hline * * * \end{array}$$

Найдите наименьший возможный результат умножения.

Ответ: $299=13 \times 23$.

3) Петя нарисовал на листочке 11 точек так, что никакие 3 не лежат на одной прямой. Потом соединил их попарно отрезками (каждую с каждой). Коля хочет провести прямолинейный разрез так, чтобы было разрезано наибольшее число отрезков. Как ему это сделать? В ответе укажите количество отрезков, которое будет разрезано. Отрезок называется разрезанным, если разрез пересекает его во внутренней точке (не в конце).

Ответ: 30.

Решение: Провести разрез так, чтобы по одну сторону было 5, а по другую – 6 точек.

4) Число, составленное из одних единиц называют репьюнит, например, 1, 11, 111 и т.д. Найдите наименьший репьюнит, который делится на 999 без остатка. В ответе запишите количество единиц в репьюните (например, для 11111 в ответе надо написать 5).

Ответ: 27

Решение: Очевидно, что поскольку репьюнит должен быть кратен 9, тогда сумма цифр тоже, поэтому длина (кол-во единиц) кратна 9. Разобьем на тройки: 111 111 111... 111 и поделим на 111. Результат будет 100 1001...100 1. Чтобы делилось на 9, сумма цифр должна делиться на 9, значит троек было 9, т.е. 27 единиц.

Другое решение: Запишем 999 как $1000-1$. Обозначим частное $A = 1\dots1/999$ и пусть \overline{A} — десятичная запись числа А. Очевидно, $999 \cdot A = 1000 A - A = \overline{A000} - A$. Это число должно состоять из одних единиц. Итак,

$$1\ 000\ A - A = 111\dots11,$$

откуда

$$A = 1000\ A - 111\dots11$$

или

$$A = \overline{A000-11\dots1}$$

Так как последние цифры уменьшаемого известны, то мы можем производить вычитание («в столбик»), выясняя тем самым последние знаки самого числа A . Приписывая эти знаки слева к нулям в правой части, мы сможем продолжить вычитание, выясняя новые знаки, и так далее, пока это возможно (т. е. пока вновь полученные знаки числа A не станут равными 1). В начале получим 889, потом 777889, потом 666777889 и становится понятной закономерность – цифры числа A идут «тройками», а на конце – 889: $A=111222\dots777889$. В числе A 24 цифры, значит нужно взять 27 единиц, чтобы получить 999A.

- 5) Учитель устроил соревнование: кто из школьников найдет как можно большее натуральное число, при делении на 33 дающее остаток, в 10 раз больший, чем частное от деления. Андрей нашел подходящее число первый. Но Борис вскоре нашел большее число, а Виктор смог превзойти результат Бориса. Найдите число Бориса.

Ответ: 86.

Решение. Из условия вытекает, что остаток должен делиться на 10. Так как, кроме этого, остаток меньше, чем 33, то получаются 3 возможных остатка: 10, 20 и 30. Соответственно частные от деления равны 1, 2 и 3, и соответствующие числа: $1 \cdot 33 + 10 = 43$; $2 \cdot 33 + 20 = 86$; $3 \cdot 33 + 30 = 129$. Так как число Бориса не наименьшее и не наибольшее из трех, то это 86.

- 6) На тренировке перед стрелками находятся 2024 мишени с номерами 1 до 2024. Первый стрелок попадает во все мишени с номерами 3, 6, 9, ..., 2022. Второй стрелок попадает во все мишени с номерами 4, 8, 12, ..., 2024. Третий стрелок попадает во все мишени с номерами 10, 20, 30, ..., 2020. Сколько осталось мишеней, в которые никто не попал?

Ответ: 945.

Решение. Пусть A_n – количество чисел от 1 до 2024, кратных n . Тогда количество пораженных мишеней равно

$$\begin{aligned} & A_3 + A_4 + A_{10} - A_{\text{НОД}(3,4)} - A_{\text{НОД}(3,10)} - A_{\text{НОД}(4,10)} + A_{\text{НОД}(3,4,10)} = \\ & = \left[\frac{2024}{3} \right] + \left[\frac{2024}{4} \right] + \left[\frac{2024}{10} \right] - \left[\frac{2024}{12} \right] - \left[\frac{2024}{30} \right] - \left[\frac{2024}{20} \right] + \left[\frac{2024}{60} \right] = \\ & = 674 + 506 + 202 - 168 - 67 - 101 + 33 = 1079. \end{aligned}$$

Значит, количество оставшихся непораженными мишеней равно $2024 - 1079 = 945$.