

Отборочный этап олимпиады «Покори Воробьёвы горы!» по математике длился 24 часа. Он состоял из блиц-тура (6 задач, ответы к которым нужно отправить в течение 3 часов) и творческой части (4 задачи, полное решение которых нужно отправить в течение оставшегося времени).

Отборочный этап. Блиц-тур

Каждый участник блиц-тура получал свой набор задач, отличающийся от наборов задач других участников. Приводим типичный набор из шести задач блиц-тура.

1. Решите неравенство $\sqrt{3x+2} - \sqrt{4-x} \leq \sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$. В ответ запишите разность между наибольшим и наименьшим решениями, находящимися в интервале $[-100, 100]$, при необходимости округлив ее до двух знаков после запятой.

Ответ: 2,67. **Решение.** Правая часть неравенства равна

$$= \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Левая часть неравенства – монотонно возрастающая функция, правая часть константа. При $x = 2$ правая и левая части совпадают.

Поэтому $x \leq 2$ на ОДЗ, то есть $x \in \left[-\frac{2}{3}; 2\right]$. Искомая разность: $2 - \left(-\frac{2}{3}\right) = 2\frac{2}{3} \approx 2,67$.

2. Решите уравнение $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} x$.

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A , при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой. $A = \left[\frac{(1+3m)\pi}{3}; \frac{(8m+9)\pi}{8}\right], m = -4$.

Ответ: $-9,42$. **Решение.** Обозначив $\operatorname{tg} x = t$ и используя формулу тангенса суммы, получим:

$$\frac{t+1}{1-t} + \frac{t-1}{1+t} = t \Leftrightarrow \frac{(t^2+2t+1) - (t^2-2t+1)}{1-t^2} = t \Leftrightarrow \frac{4t}{1-t^2} = t.$$

Отсюда или $t = 0$, или $\frac{4}{1-t^2} = 1 \Leftrightarrow t^2 = -3$ (что невозможно). Значит, $\operatorname{tg} x = 0$, $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

В интервал $\left[\frac{(1-12)\pi}{3}; \frac{(-32+9)\pi}{8}\right] = \left[\frac{\pi}{3} - 4\pi; \frac{9\pi}{8} - 4\pi\right]$ попадает одно значение $x = -4\pi + \pi = -3\pi \approx -9,42$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CH . Радиусы окружностей, вписанных в треугольники CHB и AHC равны 3 и 4 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC , при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

Ответ: 150. **Решение.** Обозначим $\angle CAB$ через α . Из подобия треугольников CHB и AHC находим $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$. Отсюда $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.

Пусть O – центр окружности, вписанной в треугольник AHC , а OD (D – точка на стороне CA) – ее радиус. Тогда

$$\operatorname{tg} \angle DAO = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{3}, \quad \operatorname{tg} \angle DCO = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{2},$$

$$AD = 12, \quad CD = 8, \quad CA = 20, \quad BC = 15, \quad S_{ABC} = 150.$$

4. Решите систему

$$\begin{cases} x^4 - 3x^2y^2 + y^4 = -1, \\ x^2 + xy + y^2 = 3. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $x_k - y_k$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них максимальное. В ответе укажите найденное максимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 3,24. **Решение.** Замена $a = x^2 + y^2$, $b = xy$ сводит систему к следующей:

$$\begin{cases} a^2 - 5b^2 = -1, \\ a + b = 3. \end{cases}$$

Выразив $a = 3 - b$, получим уравнение $2b^2 + 3b - 5 = 9$. Его корни $b = 1$ и $b = -\frac{5}{2}$. Тогда, соответственно, $a = 2$ и $a = \frac{11}{2}$.

Первый случай: $(a; b) = (2; 1)$. Тогда

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 4, \\ (x - y)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \pm 1.$$

Второй случай: $(a; b) = \left(\frac{11}{2}; -\frac{5}{2}\right)$. В этом случае

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{11}{2}, \\ xy = -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = \frac{1}{2}, \\ (x - y)^2 = \frac{21}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x + y| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ |x - y| = \sqrt{\frac{21}{2}}. \end{cases}$$

Выбираем максимум выражения $x - y$, он равен $\sqrt{\frac{21}{2}} \approx 3,24$.

5. Петя, спускаясь по движущемуся вниз эскалатору, насчитал a ступенек, а поднимаясь по соседнему движущему вверх эскалатору, b ступенек. Известно, что скорость, с которой Петя идет вверх относительно эскалатора, в k раз меньше скорости, с которой он идет вниз. Выясните, сколько ступенек насчитает Петя, поднимаясь по стоящему эскалатору, если скорость движения самого эскалатора всегда постоянна.

$$a = 60, b = 36, k = 3.$$

Ответ: 90. **Решение.** Пусть x – отношение скорости эскалатора к скорости Пети при спуске вниз. Тогда за время, за которое Петя проходит одну ступеньку, у эскалатора «уедет вниз» x ступенек. Следовательно, если Петя пройдет a ступенек, у эскалатора «уедет вниз» ax ступенек. Если бы эскалатор не двигался, Петя бы прошел все $a + ax$ ступенек.

Аналогично, при движении вверх Петя пройдет b ступенек, а у эскалатора «уедет вверх» $b k x$ ступенек. Если бы эскалатор не двигался, Петя бы прошел все $b + b k x$ ступенек.

Получаем уравнение $a + a x = b + b k x$, откуда $x = \frac{a-b}{b k - a}$ (допустимые параметры удовлетворяют условиям $b < a < b k$).

Всего ступенек получается

$$a + a \cdot \frac{a-b}{b k - a} = \frac{a b (k-1)}{b k - a}.$$

При заданных числовых данных получаем $\frac{60 \cdot 36 \cdot 2}{108 - 60} = 90$ (ступенек).

6. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^3 - 9a x^2 + (18a^2 + 4)x + a^2 + 32 = 0$$

имеет три различных корня, образующих арифметическую прогрессию. В ответе укажите сумму квадратов найденных значений a , при необходимости округлив её до двух знаков после запятой.

Ответ: 80. **Решение.** Если x_1, x_2, x_3 – корни, образующие арифметическую прогрессию, то их сумма, с одной стороны, равна $x_1 + x_2 + x_3 = 3x_2$, а с другой стороны, по теореме Виета их сумма равна $9a$. Значит, корнем уравнения является $x_2 = 3a$. Подставляя его в уравнение, находим $a^2 + 12a + 32 = 0$, откуда $a = -4$ или $a = -8$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что при каждом из этих a уравнение имеет 3 различных корня, образующих арифметическую прогрессию. Поэтому ответ: $(-4)^2 + (-8)^2 = 16 + 64 = 80$.

Набор творческих задач.

I. Найдите круг наименьшего радиуса, целиком содержащий любой треугольник со стороной $2a$ и противолежащим ей углом $\alpha > \frac{\pi}{2}$. В ответе укажите округленную до ближайшего целого площадь этого круга.

Ответ: πa^2 .

Решение. Если круг радиуса R содержит треугольник со стороной a , то $2R \geq 2a$, то есть $R \geq a$. Если круг описан около треугольника, то по теореме синусов его радиус равен $\frac{a}{\sin \alpha} \geq a$.

Осталось заметить, что круг с диаметром, совпадающим с известной стороной, равной $2a$, содержит третью вершину треугольника (то есть и весь треугольник целиком), так как $\alpha > \frac{\pi}{2}$. Поэтому радиус круга равен a и его площадь есть πa^2 . \square

1-1. Найдите круг наименьшего радиуса, целиком содержащий любой треугольник со стороной 2023 и противолежащим ей углом $\frac{4\pi}{7}$. В ответе укажите округленную до ближайшего целого площадь этого круга.

Ответ: 3214265.

1-2. Найдите круг наименьшего радиуса, целиком содержащий любой треугольник со стороной 2023 и противолежащим ей углом $\frac{3\pi}{5}$. В ответе укажите округленную до ближайшего целого площадь этого круга.

Ответ: 3214265.

1-3. Найдите круг наименьшего радиуса, целиком содержащий любой треугольник со стороной 2023 и противолежащим ей углом $\frac{5\pi}{9}$. В ответе укажите округленную до ближайшего целого площадь этого круга.

Ответ: 3214265.

1-4. Найдите круг наименьшего радиуса, целиком содержащий любой треугольник со стороной 2024 и противолежащим ей углом $\frac{4\pi}{7}$. В ответе укажите округленную до ближайшего целого площадь этого круга.

Ответ: 3217443.

1-5. Найдите круг наименьшего радиуса, целиком содержащий любой треугольник со стороной 2024 и противолежащим ей углом $\frac{3\pi}{5}$. В ответе укажите округленную до ближайшего целого площадь этого круга.

Ответ: 3217443.

1-6. Найдите круг наименьшего радиуса, целиком содержащий любой треугольник со стороной 2024 и противолежащим ей углом $\frac{5\pi}{9}$. В ответе укажите округленную до ближайшего целого площадь этого круга.

Ответ: 3217443.

1-7. Найдите круг наименьшего радиуса, целиком содержащий любой треугольник со стороной 2025 и противолежащим ей углом $\frac{4\pi}{7}$. В ответе укажите округленную до ближайшего целого площадь этого круга.

Ответ: 3220623.

1-8. Найдите круг наименьшего радиуса, целиком содержащий любой треугольник со стороной 2025 и противолежащим ей углом $\frac{3\pi}{5}$. В ответе укажите округленную до ближайшего целого площадь этого круга.

Ответ: 3220623.

1-9. Найдите круг наименьшего радиуса, целиком содержащий любой треугольник со стороной 2025 и противолежащим ей углом $\frac{5\pi}{9}$. В ответе укажите округленную до ближайшего целого площадь этого круга.

Ответ: 3220623.

1-10. Найдите круг наименьшего радиуса, целиком содержащий любой треугольник со стороной 2022 и противолежащим ей углом $\frac{4\pi}{7}$. В ответе укажите округленную до ближайшего целого площадь этого круга.

Ответ: 3211088.

1-11. Найдите круг наименьшего радиуса, целиком содержащий любой треугольник со стороной 2022 и противолежащим ей углом $\frac{3\pi}{5}$. В ответе укажите округленную до ближайшего целого площадь этого круга.

Ответ: 3211088.

1-12. Найдите круг наименьшего радиуса, целиком содержащий любой треугольник со стороной 2022 и противолежащим ей углом $\frac{5\pi}{9}$. В ответе укажите округленную до ближайшего целого площадь этого круга.

Ответ: 3211088.

II. Петя задумал два целых числа и сообщил их Васе. Вася сложил сумму, разность, произведение и частное этих двух чисел и получил в результате 1500. Узнав это число, Гена подсчитал, что вероятность того, что он угадает числа Пети, равна $\frac{m}{n}$, где m и n – взаимно простые натуральные числа. Найдите $2m + 3n$, если известно, что Вася и Гена не ошиблись в своих расчетах.

Ответ: 23.

Решение. Если первое число Пети равно x , а второе число равно y , то их сумма равна $(x + y)$, их разность равна $(x - y)$, их произведение равно xy , и их частное равно $\frac{x}{y}$. Тогда

$$(x + y) + (x - y) + xy + \frac{x}{y} = 1500.$$

Поэтому x делится на y и

$$2x + xy + \frac{x}{y} = 1500 \quad \frac{x}{y}(y + 1)^2 = 1500.$$

Обозначим $\frac{x}{y} = N$, тогда $N(y + 1)^2 = 1500$. Так как $1500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$, то возможны следующие варианты:

- $y + 1 = \pm 1$, $N = 1500 \Rightarrow (x; y) = (-3000; -2)$ (разумеется, $y = 0$ не подходит);
- $y + 1 = \pm 2$, $N = 3 \cdot 5^3 = 375 \Rightarrow (x; y) = (375; 1)$ или $(x; y) = (-1125; -3)$;
- $y + 1 = \pm 5$, $N = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \Rightarrow (x; y) = (240; 4)$ или $(x; y) = (-360; -6)$;
- $y + 1 = \pm 2 \cdot 5 = \pm 10$, $N = 3 \cdot 5 = 15 \Rightarrow (x; y) = (135; 9)$ или $(x; y) = (-165; -11)$.

Таким образом, имеется 7 решений:

$$(x; y) = (-3000; -2), (375; 1), (-1125; -3), (240; 4), \\ (-360; -6), (135; 9), (-165; -11).$$

Значит, вероятность того, что Гена угадает числа Пети, равна $\frac{1}{7}$. Поэтому $m = 1$, $n = 7$, $2m + 3n = 23$.

Замечание. Часть решавших эту задачу неверно использовали модуль разности вместо разности, и/или частным двух чисел считали число, которое получается, если разделить одно из чисел на другое, не обращая внимания на их порядок. На самом деле, важен порядок чисел.

К примеру, у части решающих в ответ попала пара $(x; y) = (750; 0)$. Их обоснование:

$$(750 + 0) + (750 - 0) + 750 \cdot 0 + 0 : 750 = 1500.$$

Но, на самом деле, если взять пару $(x; y) = (750; 0)$, то результат не определен, так как 750 не делится на 0. Если же взять пару $(x; y) = (0; 750)$, то получается

$$(0 + 750) + (0 - 750) + 0 \cdot 750 + 0 : 750 = 0 \neq 1500.$$

По тем же причинам не подходят пары $(-751; -1)$ и $(749; 1)$.

□

2.11. Петя задумал два целых числа и сообщил их Васе. Вася сложил сумму, разность, произведение и частное этих двух чисел и получил в результате 12005. Узнав это число, Гена подсчитал, что вероятность того, что он угадает числа Пети, равна $\frac{m}{n}$, где m и n – взаимно простые натуральные числа. Найдите $7m + 3n$, если известно, что Вася и Гена не ошиблись в своих расчетах.

Ответ: 22.

2.12. Петя задумал два целых числа и сообщил их Васе. Вася сложил сумму, разность, произведение и частное этих двух чисел и получил в результате 12005. Узнав это число, Гена подсчитал, что вероятность того, что он угадает числа Пети, равна $\frac{m}{n}$, где m и n – взаимно простые натуральные числа. Найдите $3m + 7n$, если известно, что Вася и Гена не ошиблись в своих расчетах.

Ответ: 38.

III. Найдите коэффициент при x^{99} в многочлене

$$(x^{100} + x^{99} + x^{98} + \dots + x^2 + x + 1)^3$$

после раскрытия скобок и приведения подобных.

Решение. Умножив многочлен $(x^{100} + x^{99} + \dots + x + 1)$ дважды сам на себя, получим сумму одночленов вида $x^m x^n x^k$, где $m, n, k \in [0; 100]$. Это означает, что коэффициент при x^{99} равен числу решений уравнения $m + n + k = 99$ в целых неотрицательных числах.

Это число равно количеству способов разложить 99 шаров по трем ящикам. Рассмотрим ряд из 101 объекта: 99 шаров и 2 перегородок, расположенных в случайном порядке. Каждый такой ряд однозначно соответствует определенному способу расположения шаров в ящиках: в первом ящике находятся шары, расположенные слева от первой перегородки, во втором ящике – шары, расположенные между первой и второй перегородками, в третьем – шары, расположенные справа от второй перегородки (шаров может не быть между некоторыми перегородками). Следовательно, количество способов расположить шары в коробках равно числу различных рядов по 99 шаров и 2 перегородок, то есть равно $C_{101}^2 = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$.

Ответ: 5050. □

3-1. Найдите коэффициент при x^{99} в многочлене

$$(x^{100} + x^{99} + x^{98} + \dots + x^2 + x + 1)^3$$

после раскрытия скобок и приведения подобных.

Ответ: 5050.

3-2. Найдите коэффициент при x^{98} в многочлене

$$(x^{100} + x^{99} + x^{98} + \dots + x^2 + x + 1)^3$$

после раскрытия скобок и приведения подобных.

Ответ: 4950.

3-3. Найдите коэффициент при x^{97} в многочлене

$$(x^{100} + x^{99} + x^{98} + \dots + x^2 + x + 1)^3$$

после раскрытия скобок и приведения подобных.

Ответ: 4851.

3-4. Найдите коэффициент при x^{96} в многочлене

$$(x^{100} + x^{99} + x^{98} + \dots + x^2 + x + 1)^3$$

после раскрытия скобок и приведения подобных.

Ответ: 4753.

3-5. Найдите коэффициент при x^{95} в многочлене

$$(x^{100} + x^{99} + x^{98} + \dots + x^2 + x + 1)^3$$

после раскрытия скобок и приведения подобных.

Ответ: 4656.

3-6. Найдите коэффициент при x^{94} в многочлене

$$(x^{100} + x^{99} + x^{98} + \dots + x^2 + x + 1)^3$$

после раскрытия скобок и приведения подобных.

Ответ: 4560.

3-7. Найдите коэффициент при x^{93} в многочлене

$$(x^{100} + x^{99} + x^{98} + \dots + x^2 + x + 1)^3$$

после раскрытия скобок и приведения подобных.

Ответ: 4465.

3-8. Найдите коэффициент при x^{92} в многочлене

$$(x^{100} + x^{99} + x^{98} + \dots + x^2 + x + 1)^3$$

после раскрытия скобок и приведения подобных.

Ответ: 4371.

3-9. Найдите коэффициент при x^{91} в многочлене

$$(x^{100} + x^{99} + x^{98} + \dots + x^2 + x + 1)^3$$

после раскрытия скобок и приведения подобных.

Ответ: 4278.

3-10. Найдите коэффициент при x^{90} в многочлене

$$(x^{100} + x^{99} + x^{98} + \dots + x^2 + x + 1)^3$$

после раскрытия скобок и приведения подобных.

Ответ: 4186.

IV. Точка D лежит на стороне AB треугольника ABC , причём $BD : DA = (\sqrt{3} + 1) : 2$. Точка E — середина DC . Найдите минимально возможное значение выражения $AB^2 + BC^2$, если известно, что произведение всех медиан в треугольнике DBE не менее m . При необходимости округлите ответ до сотых.

Решение. Обозначим $c = |BD|$, $a = |BC|$, $d = |BE|$, $e = |DE|$, медианы в треугольнике DBE обозначим через m_c , m_d , m_e . Тогда из условия вытекает, что $AB = \sqrt{3}c$. Если достроить параллелограмм $DFCE$ (см рис. 1), то из равенства $DE = EC$ вытекает, что $EFBC$ — тоже параллелограмм, откуда $EF = a$ и $a^2 + c^2 = 2(d^2 + e^2)$. Используя то, что сумма всех квадратов сторон в произвольном треугольнике равна $4/3$ от суммы всех квадратов медиан, получаем

$$AB^2 + BC^2 = a^2 + 3c^2 = 2c^2 + (a^2 + c^2) = 2c^2 + 2(e^2 + d^2) = 2(c^2 + e^2 + d^2) = \frac{8}{3}(m_c^2 + m_d^2 + m_e^2) \geq 8(m_c \cdot m_d \cdot m_e)^{2/3} \geq 8 \cdot (m)^{2/3}.$$

Знак равенства в данной оценке достигается в случае, когда треугольник DBE равносторонний.
Ответ: $8 \cdot (m)^{2/3}$.

□

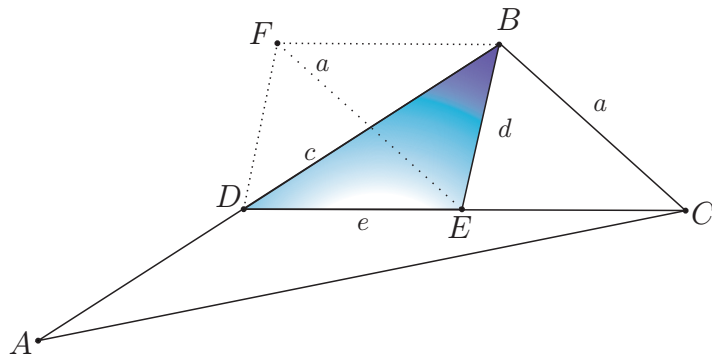


Рис. 1:

-
- 4-1. $m = 1700$. Ответ: 1139.52
 4-2. $m = 1710$. Ответ: 1143.99
 4-3. $m = 1720$. Ответ: 1148.44
 4-4. $m = 1730$. Ответ: 1152.89
 4-5. $m = 1740$. Ответ: 1157.33
 4-6. $m = 1750$. Ответ: 1161.76
 4-7. $m = 1760$. Ответ: 1166.18
 4-8. $m = 1770$. Ответ: 1170.59
 4-9. $m = 1781$. Ответ: 1175.44
 4-10. $m = 1790$. Ответ: 1179.39
 4-11. $m = 1800$. Ответ: 1183.78
 4-12. $m = 1810$. Ответ: 1188.16
 4-13. $m = 1820$. Ответ: 1192.53
 4-14. $m = 1831$. Ответ: 1197.33
 4-15. $m = 1840$. Ответ: 1201.25
 4-16. $m = 1851$. Ответ: 1206.04
 4-17. $m = 1860$. Ответ: 1209.94
 4-18. $m = 1870$. Ответ: 1214.28
 4-19. $m = 1881$. Ответ: 1219.03
 4-20. $m = 1890$. Ответ: 1222.92