Отборочный этап олимпиады «Покори Воробьёвы горы!» по математике длился 24 часа. Он состоял из блиц-тура (6 задач, ответы к которым нужно отправить в течение 3 часов) и творческой части (4 задачи, полное решение которых нужно отправить в течение оставшегося времени).

Отборочный этап. Блиц-тур

Каждый участник блиц-тура получал свой набор задач, отличающийся от наборов задач других участников. Приводим типичный набор из шести задач блиц-тура.

1. Найдите сумму всех целых решений неравенства

$$\frac{x^3-512+24x(8-x)}{\left|\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}-x\right|}\le\sqrt{x-2},$$

не превосходящих по абсолютной величине 10.

Ответ: 52. **Решение.** Так как $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=2,$ то при $x>2$ получаем

$$\frac{x^3-512+24x(8-x)}{|2-x|}\le\sqrt{x-2}\ \Leftrightarrow$$

$$x^3-512+24x(8-x)\le\sqrt{x-2}(x-2)\ \Leftrightarrow$$

$$(x-8)^3\le\left(\sqrt{x-2}\right)^3\ \Leftrightarrow\ x-8\le\sqrt{x-2}.$$

Значит, либо $2<x<8,$ либо $x\ge8$, и тогда $(x-8)^2\le x-2\ \Leftrightarrow 6\le x\le 11$. Таким образом, $x\in(2;\ 11]$.

Искомая сумма: $3+4+\cdots+10=52$.

2. Решите уравнение

$$2\sin^2 x+\sin^2 2x=\frac{5}{4}-2\cos 2x.$$

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой. $[2\pi m; (2m+1)\pi], m = -5$.

Ответ: $-59{,}69$. **Решение.** Исходное уравнение равносильно уравнению

$$(1-\cos 2x) + (1-\cos^2 2x) = \frac{5}{4} - 2\cos 2x \Leftrightarrow \cos^2 2x - \cos 2x - \frac{3}{4} = 0.$$

Отсюда $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, и $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. В интервал $[-10\pi;\ -9\pi]$ попадает два значения: $x = -10\pi + \frac{\pi}{3}$ и $x = -9\pi - \frac{\pi}{3}$. Их сумма равна $-19\pi \approx -59{,}69$.

3. В треугольнике *ABC* на медиане AA_1 отмечена точка *O* так, что прямая *CO* делит сторону *AB* на два отрезка, длины которых относятся как 5 : 1, считая от вершины *B*. Найдите медиану AA_1, если известно, что *BC* = 20, а прямые *BO* и *CO* перпендикулярны. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой.

Ответ: 14. **Решение.** Обозначим через C_1 точку пересечения *CO* и *AB*. Проведем через точку A_1 прямую, параллельную *OC*, пусть она пересекает *AB* в точке C_2. Тогда по теореме Фалеса

$$\frac{C_1C_2}{C_2B} = \frac{CA_1}{A_1B} = 1.$$

Следовательно,

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{AC_1}{C_1C_2} = \frac{2}{5}.$$

Из того, что треугольник *BOC* прямоугольный, вытекает $OA_1 = BA_1 = A_1C = 10$. Поэтому $AO = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4$, откуда $AA_1 = 4 + 10 = 14$.

Отношение $AO : OA_1$ можно было искать и иначе, например, по теореме Менелая.

4. Найдите наименьшее значение выражения $x^2 + 2y^2$, если числа x и y удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2(y^2+1) = xy + 2, \\ 4y^2 = 5xy - 3. \end{cases}$$

Ответ: 3. **Решение.** Если просуммировать уравнения системы, то получим:

$$x^2y^2 + x^2 + 4y^2 = 6xy - 1 \quad \Leftrightarrow \quad (xy-1)^2 + (x-2y)^2 = 0,$$

откуда $xy = 1, x = 2y$. После этого находятся две пары решений: $(x; y) = \left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $(x; y) = \left(-\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Для обеих этих пар $x^2 + 2y^2 = 3$.

5. Рыбак на катере плыл против течения реки, у моста с катера в реку упала пустая фляга. Проплыв после этого a минут против течения реки, рыбак заметил свою потерю и поплыл в обратном направлении, чтобы догнать флягу. Какова скорость течения реки, если рыбак догнал флягу в n километрах ниже по течению от моста? В ответе укажите найденное значение в километрах в час, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

$a = 20$, $n = 2$.

Ответ: 3. **Решение.** Пусть x км/ч – скорость течения реки. Рыбак догонял флягу $a/60$ часа. Следовательно, фляга плыла $2a/60$ часа со скоростью x, и за это время проплыла n км. Таким образом,

$$\frac{2a}{60}x = n \quad \Rightarrow \quad x = \frac{30n}{a}.$$

При заданных числовых данных получаем $\frac{30 \cdot 2}{20} = 3$ км/ч.

6. Найдите все значения a, лежащие на отрезке A, при каждом из которых неравенство

$$\cos^2(\pi a) + \log_2(2x) \geq \log_2(1 + x^2) + \log_4(x^2 - 2x + 5)$$

имеет решения. В ответе укажите сумму всех таких a, если их конечное число. Если решений нет или их бесконечно много на отрезке A, то в графе ответов впишите 0.

$A = [1; 2025]$

Ответ: 2051325. **Решение.** Учитывая, что $\cos^2(\pi a) = 1 - \sin^2(\pi a)$, исходное неравенство равносильно следующему

$$\log_2 \frac{4x}{1+x^2} \geq \log_4(x^2 - 2x + 5) + \sin^2(\pi a).$$

Так как левая часть $\log_2 \frac{4x}{1+x^2} \leq 1$, а правая часть $\log_4((x-1)^2 + 4) + \sin^2(\pi a) \geq 1$, то левая и правая части одновременно равны 1. Это будет иметь место только при $x = 1$ и $a \in Z$. При остальных a решений нет.

Значит, сумма всех подходящих а равна

$$1 + 2 + \cdots + 2025 = \frac{1 + 2025}{2} \cdot 2025 = 2051325.$$

Набор творческих задач.

I. Среднее арифметическое чисел x, y и z равно $\frac{13}{3}$, а среднее арифметическое их обратных величин (то есть $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$) равно $\frac{17}{54}$. Найдите среднее арифметическое шести чисел: $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ и их обратных величин. Округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ:

Решение. Решение. Обозначив $A = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}$, получим

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x}+\frac{y}{y}+\frac{z}{z}+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right) = 3+A.$$

Значит,

$$A = (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) - 3 = \frac{13}{3}\cdot 3\cdot \frac{17}{54}\cdot 3 - 3 = \frac{167}{18},$$

и поэтому искомое среднее арифметическое равно $\frac{167}{18\cdot 6} = \frac{167}{108} \approx 1,55$.

Ответ: 1,55. □

1-1. Среднее арифметическое чисел x, y и z равно $\frac{13}{3}$, а среднее арифметическое их обратных величин (то есть $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$) равно $\frac{17}{54}$. Найдите среднее арифметическое шести чисел: $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ и их обратных величин. Округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 1,55.

1-2. Среднее арифметическое чисел x, y и z равно $\frac{13}{3}$, а среднее арифметическое их обратных величин (то есть $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$) равно $\frac{17}{57}$. Найдите среднее арифметическое шести чисел: $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ и их обратных величин. Округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 1,44.

1-3. Среднее арифметическое чисел x, y и z равно $\frac{14}{3}$, а среднее арифметическое их обратных величин (то есть $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$) равно $\frac{17}{57}$. Найдите среднее арифметическое шести чисел: $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ и их обратных величин. Округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 1,59.

1-4. Среднее арифметическое чисел x, y и z равно $\frac{14}{3}$, а среднее арифметическое их обратных величин (то есть $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$) равно $\frac{5}{17}$. Найдите среднее арифметическое шести чисел: $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ и их обратных величин. Округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 1,56.

1-5. Среднее арифметическое чисел x, y и z равно $\frac{13}{3}$, а среднее арифметическое их обратных величин (то есть $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$) равно $\frac{5}{17}$. Найдите среднее арифметическое шести чисел: $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ и их обратных величин. Округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 1,41.

1-6. Среднее арифметическое чисел x, y и z равно $\frac{13}{3}$, а среднее арифметическое их обратных величин (то есть $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$) равно $\frac{11}{38}$. Найдите среднее арифметическое шести чисел: $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ и их обратных величин. Округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 1,38.

1-7. Среднее арифметическое чисел x, y и z равно $\frac{11}{3}$, а среднее арифметическое их обратных величин (то есть $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$) равно $\frac{23}{15}$. Найдите среднее арифметическое шести чисел: $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ и их обратных величин. Округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 7,93.

1-8. Среднее арифметическое чисел x, y и z равно $\frac{13}{3}$, а среднее арифметическое их обратных величин (то есть $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$) равно $\frac{55}{36}$. Найдите среднее арифметическое шести чисел: $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ и их обратных величин. Округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 9,43.

1-9. Среднее арифметическое чисел x, y и z равно $\frac{14}{3}$, а среднее арифметическое их обратных величин (то есть $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$) равно $\frac{119}{78}$. Найдите среднее арифметическое шести чисел: $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ и их обратных величин. Округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 10,18.

1-10. Среднее арифметическое чисел x, y и z равно $\frac{16}{3}$, а среднее арифметическое их обратных величин (то есть $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$) равно $\frac{137}{90}$. Найдите среднее арифметическое шести чисел: $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ и их обратных величин. Округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 11,68.

1-11. Среднее арифметическое чисел x, y и z равно $\frac{17}{3}$, а среднее арифметическое их обратных величин (то есть $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$) равно $\frac{73}{48}$. Найдите среднее арифметическое шести чисел: $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ и их обратных величин. Округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 12,43.

1-12. Среднее арифметическое чисел x, y и z равно $\frac{19}{3}$, а среднее арифметическое их обратных величин (то есть $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$) равно $\frac{41}{27}$. Найдите среднее арифметическое шести чисел: $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ и их обратных величин. Округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 13,93.

1-13. Среднее арифметическое чисел x, y и z равно $\frac{20}{3}$, а среднее арифметическое их обратных величин (то есть $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$) равно $\frac{173}{114}$. Найдите среднее арифметическое шести чисел: $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ и их обратных величин. Округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 14,68.

1-14. Среднее арифметическое чисел x, y и z равно $\frac{35}{18}$, а среднее арифметическое их обратных величин (то есть $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$) равно $\frac{26}{15}$. Найдите среднее арифметическое шести чисел: $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ и их обратных величин. Округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 4,56.

1-15. Среднее арифметическое чисел x, y и z равно $\frac{41}{18}$, а среднее арифметическое их обратных величин (то есть $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$) равно $\frac{31}{18}$. Найдите среднее арифметическое шести чисел: $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ и их обратных величин. Округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 5,38.

1-16. Среднее арифметическое чисел x, y и z равно $\frac{47}{18}$, а среднее арифметическое их обратных величин (то есть $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$) равно $\frac{12}{7}$. Найдите среднее арифметическое шести чисел: $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ и их обратных величин. Округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 6,21.

1-17. Среднее арифметическое чисел x, y и z равно $\frac{53}{18}$, а среднее арифметическое их обратных величин (то есть $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$) равно $\frac{41}{24}$. Найдите среднее арифметическое шести чисел: $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ и их обратных величин. Округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 7,05.

1-18. Среднее арифметическое чисел x, y и z равно $\frac{59}{18}$, а среднее арифметическое их обратных величин (то есть $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$) равно $\frac{46}{27}$. Найдите среднее арифметическое шести чисел: $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ и их обратных величин. Округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 7,88.

1-19. Среднее арифметическое чисел x, y и z равно $\frac{91}{36}$, а среднее арифметическое их обратных величин (то есть $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$) равно $\frac{50}{21}$. Найдите среднее арифметическое шести чисел: $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ и их обратных величин. Округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 8,53.

1-20. Среднее арифметическое чисел x, y и z равно $\frac{71}{18}$, а среднее арифметическое их обратных величин (то есть $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$) равно $\frac{56}{33}$. Найдите среднее арифметическое шести чисел: $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ и их обратных величин. Округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 9,54.

1-21. Среднее арифметическое чисел x, y и z равно $\frac{77}{18}$, а среднее арифметическое их обратных величин (то есть $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$) равно $\frac{61}{36}$. Найдите среднее арифметическое шести чисел: $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ и их обратных величин. Округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 10,37.

1-22. Среднее арифметическое чисел x, y и z равно $\frac{83}{18}$, а среднее арифметическое их обратных величин (то есть $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$) равно $\frac{22}{13}$. Найдите среднее арифметическое шести чисел: $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ и их обратных величин. Округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 11,21.

1-23. Среднее арифметическое чисел x, y и z равно $\frac{95}{18}$, а среднее арифметическое их обратных величин (то есть $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$) равно $\frac{76}{45}$. Найдите среднее арифметическое шести чисел: $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ и их обратных величин. Округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 12,87.

1-24. Среднее арифметическое чисел x, y и z равно $\frac{79}{36}$, а среднее арифметическое их обратных величин (то есть $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$) равно $\frac{43}{18}$. Найдите среднее арифметическое шести чисел: $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ и их обратных величин. Округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 7,36.

1-25. Среднее арифметическое чисел x, y и z равно $\frac{31}{36}$, а среднее арифметическое их обратных величин (то есть $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$) равно $\frac{5}{2}$. Найдите среднее арифметическое шести чисел: $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ и их обратных величин. Округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 2,73.

1-26. Среднее арифметическое чисел x, y и z равно $\frac{43}{36}$, а среднее арифметическое их обратных величин (то есть $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$) равно $\frac{22}{9}$. Найдите среднее арифметическое шести чисел: $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ и их обратных величин. Округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 3,88.

1-27. Среднее арифметическое чисел x, y и z равно $\frac{55}{36}$, а среднее арифметическое их обратных величин (то есть $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$) равно $\frac{29}{12}$. Найдите среднее арифметическое шести чисел: $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ и их обратных величин. Округлите ответ до двух знаков после запятой.

Ответ: 5,04.

II. Найдите наименьшее значение выражения $x^2 + 2y^2$, если $x^3 + y^3 + 6xy = 8$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 2,67.

Решение. Так как

$$x^3 + y^3 + 6xy = (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right) + 6xy = (x+y)\left((x+y)^2 - 3xy\right) + 6xy,$$

то, получим уравнение $(x+y)^3 - 3(x+y)xy + 6xy = 8$, которое можно записать в виде

$$(x+y-2)\left((x+y)^2 + 2(x+y) + 4 - 3xy\right) = 0.$$

Отсюда или $x + y = 2$, или $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 4 - 3xy = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{1}{2}(x+2)^2 + \frac{1}{2}(y+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = -2.$$

- Если $x+y = 2$, то $x^2+2y^2 = x^2+2(2-x)^2 = 3x^2-8x+8 = 3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{8}{3} \geqslant \frac{8}{3}$, то есть наименьшее значение выражения x^2+2y^2 равно $\frac{8}{3}$ и достигается при $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{2}{3}$.
- Если $x = y = -2$, то $x^2 + 2y^2 = 12 > \frac{8}{3}$.

Значит, ответ: $\frac{8}{3} \approx 2,67$.

□

Варианты.

2.1. Найдите наименьшее значение выражения x^2+2y^2, если $x^3+y^3+6xy = 8$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: $2,67$.

2.2. Найдите наименьшее значение выражения x^2+5y^2, если $x^3+y^3+6xy = 8$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: $3,33$.

2.3. Найдите наименьшее значение выражения $3x^2+2y^2$, если $x^3+y^3+6xy = 8$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: $4,8$.

2.4. Найдите наименьшее значение выражения $4x^2+3y^2$, если $x^3+y^3+6xy=8$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: $6,86$.

2.5. Найдите наименьшее значение выражения $5x^2+2y^2$, если $x^3+y^3+6xy=8$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: $5,71$.

2.6. Найдите наименьшее значение выражения $6x^2+y^2$, если $x^3+y^3+6xy=8$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: $3,43$.

2.7. Найдите наименьшее значение выражения x^2+7y^2, если $x^3+y^3+6xy=8$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: $3,5$.

2.8. Найдите наименьшее значение выражения $7x^2+2y^2$, если $x^3+y^3+6xy=8$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: $6,22$.

2.9. Найдите наименьшее значение выражения $2x^2+7y^2$, если $x^3+y^3+6xy=8$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: $6,22$.

2.10. Найдите наименьшее значение выражения $3x^2+7y^2$, если $x^3+y^3+6xy=8$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: $8,4$.

2.11. Найдите наименьшее значение выражения $5x^2+7y^2$, если $x^3+y^3+6xy=8$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: $11,67$.

2.12. Найдите наименьшее значение выражения $7x^2+4y^2$, если $x^3+y^3+6xy=8$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: $10,18$.

2.13. Найдите наименьшее значение выражения $7x^2+6y^2$, если $x^3+y^3+6xy=8$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: $12,92$.

2.14. Найдите наименьшее значение выражения $7x^2+8y^2$, если $x^3+y^3+6xy=8$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: $14,93$.

2.15. Найдите наименьшее значение выражения x^2+8y^2, если $x^3-y^3-6xy=8$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: $3,56$.

2.16. Найдите наименьшее значение выражения $3x^2+8y^2$, если $x^3-y^3-6xy=8$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: $8,73$.

2.17. Найдите наименьшее значение выражения $5x^2+8y^2$, если $x^3-y^3-6xy=8$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: $12,31$.

2.18. Найдите наименьшее значение выражения $9x^2+y^2$, если $x^3-y^3-6xy=8$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: $3,6$.

2.19. Найдите наименьшее значение выражения $9x^2+2y^2$, если $x^3-y^3-6xy=8$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: $6,55$.

2.20. Найдите наименьшее значение выражения $9x^2+4y^2$, если $x^3-y^3-6xy=8$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: $11,08$.

2.21. Найдите наименьшее значение выражения $9x^2+5y^2$, если $x^3-y^3-6xy=8$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: $12,86$.

2.22. Найдите наименьшее значение выражения $9x^2+7y^2$, если $x^3-y^3-6xy=8$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: $15,75$.

2.23. Найдите наименьшее значение выражения $9x^2+8y^2$, если $x^3-y^3-6xy=8$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: $16,94$.

III. Готовясь к олимпиаде, Петя за 13 дней решил 91 задачу. Количество задач, решенных за день под номером i, обозначим a_i. Все a_i – натуральные числа, при этом $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$. С первого по пятый день в каждый следующий день Петя решал меньше задач, чем в предыдущий. Но с пятого по двенадцатый день, наоборот, количество задач, решенных за день, росло. Найдите количество различных вариантов $(a_1, a_2, \ldots, a_{12}, a_{13})$. Два варианта считаются различными, если хотя бы на одной из позиций в них расположены разные числа.

Решение. Так как $1+2+3+\ldots+13=91$, то получается, что все $a_i \leqslant 13$, и $(a_1, a_2, \ldots, a_{12}, a_{13})$ – перестановка чисел (1, 2, 3, ..., 13), для которой $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$ и $a_{12} > a_{11} > a_{10} > a_9 > a_8 > a_7 > a_6 > a_5$. При этом a_{13} может быть равно любому числу от 1 до 13, без ограничений. Так как 11 чисел из 13 больше, чем a_5, то a_5 равно 1 или 2.

Если $a_5=2$, то $a_{13}=1$. Разместим набор из 11 оставшихся чисел в двух представлениях: в порядке убывания и в порядке возрастания (13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3) и (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13). Из первого набора нужно выбрать любые 4 числа и расположить их слева направо в качестве a_1, a_2, a_3 и a_4. После этого во втором наборе нужно удалить эти 4 числа и расположить оставшиеся числа слева направо в качестве a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11} и a_{12}. Количество таких перестановок определяется количеством сочетаний 4 элементов из 11:

$$C_{11}^4=\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 4}=330.$$

Если $a_5=1$, то a_{13} может быть равно любому из 12 оставшихся чисел. Пусть, например, $a_{13}=9$ (рассуждения аналогичны для любого другого выбора). Как и ранее, разместим набор из 11 оставшихся чисел в двух представлениях: (13, 12, 11, 10, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2) и (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13). Далее выбираем любые 4 числа из первого набора и располагаем их слева направо в качестве a_1, a_2, a_3 и a_4. Остальное аналогично. Количество таких перестановок также равно $C_{11}^4=330$.

Общее количество перестановок равно $330+330\cdot 12=330\cdot 13=4290$.

Ответ: 4290. □

3.1. Готовясь к олимпиаде, Петя за 13 дней решил 91 задачу. Количество задач, решенных за день под номером i, обозначим a_i. Все a_i – натуральные числа, при этом $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$. С первого по пятый день в каждый следующий день Петя решал меньше задач, чем в предыдущий. Но с пятого по двенадцатый день, наоборот, количество задач, решенных за день, росло. Найдите количество различных вариантов $(a_1, a_2, \ldots, a_{12}, a_{13})$. Два варианта считаются различными, если хотя бы на одной из позиций в них расположены разные числа.

Ответ: 4290.

3.2. Готовясь к олимпиаде, Вася за 13 дней решил 91 задачу. Количество задач, решенных за день под номером i, обозначим a_i. Все a_i – натуральные числа, при этом $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$. С первого по пятый день в каждый следующий день Вася решал больше задач, чем в предыдущий. Но с пятого по двенадцатый день, наоборот, количество задач, решенных за день, уменьшалось. Найдите количество различных вариантов $(a_1, a_2, \ldots, a_{12}, a_{13})$. Два варианта считаются различными, если хотя бы на одной из позиций в них расположены разные числа.

Ответ: 4290.

3.3. Готовясь к олимпиаде, Гена за 13 дней решил 91 задачу. Количество задач, решенных за день под номером i, обозначим a_i. Все a_i – натуральные числа, при этом $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$. С первого по шестой день в каждый следующий день Гена решал меньше задач, чем в предыдущий. Но с шестого по двенадцатый день, наоборот, количество задач, решенных за день, росло. Найдите количество различных вариантов $(a_1, a_2, \ldots, a_{12}, a_{13})$. Два варианта считаются различными, если хотя бы на одной из позиций в них расположены разные числа.

Ответ: 6006.

3.4. Готовясь к олимпиаде, Полина за 13 дней решила 91 задачу. Количество задач, решенных за день под номером i, обозначим a_i. Все a_i – натуральные числа, при этом $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$. С первого по шестой день в каждый следующий день Полина решала больше задач, чем в предыдущий. Но с шестого по двенадцатый день, наоборот, количество задач, решенных за день, уменьшалось. Найдите количество различных вариантов $(a_1, a_2, \ldots, a_{12}, a_{13})$. Два варианта считаются различными, если хотя бы на одной из позиций в них расположены разные числа.

Ответ: 6006.

3.5. Готовясь к олимпиаде, Варя за 14 дней решила 105 задач. Количество задач, решенных за день под номером i, обозначим a_i. Все a_i – натуральные числа, при этом $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$. С первого по седьмой день в каждый следующий день Варя решала меньше задач, чем в предыдущий. Но с седьмого по тринадцатый день, наоборот, количество задач, решенных за день, росло. Найдите количество различных вариантов $(a_1, a_2, \ldots, a_{13}, a_{14})$. Два варианта считаются различными, если хотя бы на одной из позиций в них расположены разные числа.

Ответ: 12936.

3.6. Готовясь к олимпиаде, Галя за 14 дней решила 105 задач. Количество задач, решенных за день под номером i, обозначим a_i. Все a_i – натуральные числа, при этом $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$. С первого по седьмой день в каждый следующий день Галя решала больше задач, чем в предыдущий. Но с седьмого по тринадцатый день, наоборот, количество задач, решенных за день, уменьшалось. Найдите количество различных вариантов $(a_1, a_2, \ldots, a_{13}, a_{14})$. Два варианта считаются различными, если хотя бы на одной из позиций в них расположены разные числа.

Ответ: 12936.

3.7. Готовясь к олимпиаде, Павел за 14 дней решил 105 задач. Количество задач, решенных за день под номером i, обозначим a_i. Все a_i – натуральные числа, при этом $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$. С первого по шестой день в каждый следующий день Павел решал меньше задач, чем в предыдущий. Но с шестого по тринадцатый день, наоборот, количество задач, решенных за день, росло. Найдите количество различных вариантов $(a_1, a_2, \ldots, a_{13}, a_{14})$. Два варианта считаются различными, если хотя бы на одной из позиций в них расположены разные числа.

Ответ: 11088.

3.8. Готовясь к олимпиаде, Виктор за 14 дней решил 105 задач. Количество задач, решенных за день под номером i, обозначим a_i. Все a_i – натуральные числа, при этом $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$. С первого по шестой день в каждый следующий день Виктор решал больше задач, чем в предыдущий. Но с шестого по тринадцатый день, наоборот, количество задач, решенных за день, уменьшалось. Найдите количество различных вариантов $(a_1, a_2, \ldots, a_{13}, a_{14})$. Два варианта считаются различными, если хотя бы на одной из позиций в них расположены разные числа.

Ответ: 11088.

3.9. Готовясь к олимпиаде, Маша за 15 дней решила 120 задач. Количество задач, решенных за день под номером i, обозначим a_i. Все a_i – натуральные числа, при этом $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$. С первого по седьмой день в каждый следующий день Маша решала меньше задач, чем в предыдущий. Но с седьмого по четырнадцатый день, наоборот, количество задач, решенных за день, росло. Найдите количество различных вариантов $(a_1, a_2, \ldots, a_{14}, a_{15})$. Два варианта считаются различными, если хотя бы на одной из позиций в них расположены разные числа.

Ответ: 25740.

3.10. Готовясь к олимпиаде, Соня за 15 дней решила 120 задач. Количество задач, решенных за день под номером i, обозначим a_i. Все a_i – натуральные числа, при этом $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$. С первого по седьмой день в каждый следующий день Соня решала больше задач, чем в предыдущий. Но с седьмого по четырнадцатый день, наоборот, количество задач, решенных за день, уменьшалось. Найдите количество различных вариантов $(a_1, a_2, \ldots, a_{14}, a_{15})$. Два варианта считаются различными, если хотя бы на одной из позиций в них расположены разные числа.

Ответ: 25740.

3.11. Готовясь к олимпиаде, Ваня за 15 дней решил 120 задач. Количество задач, решенных за день под номером i, обозначим a_i. Все a_i – натуральные числа, при этом $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$. С первого по шестой день в каждый следующий день Ваня решал меньше задач, чем в предыдущий. Но с шестого по четырнадцатый день, наоборот, количество задач, решенных за день, росло. Найдите количество различных вариантов $(a_1, a_2, \ldots, a_{14}, a_{15})$. Два варианта считаются различными, если хотя бы на одной из позиций в них расположены разные числа.

Ответ: 19305.

3.12. Готовясь к олимпиаде, Володя за 15 дней решил 120 задач. Количество задач, решенных за день под номером i, обозначим a_i. Все a_i – натуральные числа, при этом $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$. С первого по шестой день в каждый следующий день Володя решал больше задач, чем в предыдущий. Но с шестого по четырнадцатый день, наоборот, количество задач, решенных за день, уменьшалось. Найдите количество различных вариантов $(a_1, a_2, \ldots, a_{14}, a_{15})$. Два варианта считаются различными, если хотя бы на одной из позиций в них расположены разные числа.

Ответ: 19305.

3.13. Готовясь к олимпиаде, Настя за 15 дней решила 120 задач. Количество задач, решенных за день под номером i, обозначим a_i. Все a_i – натуральные числа, при этом $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$. С первого по пятый день в каждый следующий день Настя решала меньше задач, чем в предыдущий. Но с пятого по четырнадцатый день, наоборот, количество задач, решенных за день, росло. Найдите количество различных вариантов $(a_1, a_2, \ldots, a_{14}, a_{15})$. Два варианта считаются различными, если хотя бы на одной из позиций в них расположены разные числа.

Ответ: 10725.

3.14. Готовясь к олимпиаде, Лена за 15 дней решила 120 задач. Количество задач, решенных за день под номером i, обозначим a_i. Все a_i – натуральные числа, при этом $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$. С первого по пятый день в каждый следующий день Лена решала больше задач, чем в предыдущий. Но с пятого по четырнадцатый день, наоборот, количество задач, решенных за день, уменьшалось. Найдите количество различных вариантов $(a_1, a_2, \ldots, a_{14}, a_{15})$. Два варианта считаются различными, если хотя бы на одной из позиций в них расположены разные числа.

Ответ: 10725.

3.15. Готовясь к олимпиаде, Федя за 16 дней решил 136 задач. Количество задач, решенных за день под номером i, обозначим a_i. Все a_i – натуральные числа, при этом $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$. С первого по пятый день в каждый следующий день Федя решал меньше задач, чем в предыдущий. Но с пятого по пятнадцатый день, наоборот, количество задач, решенных за день, росло. Найдите количество различных вариантов $(a_1, a_2, \ldots, a_{15}, a_{16})$. Два варианта считаются различными, если хотя бы на одной из позиций в них расположены разные числа.

Ответ: 16016.

3.16. Готовясь к олимпиаде, Лёша за 16 дней решил 136 задач. Количество задач, решенных за день под номером i, обозначим a_i. Все a_i – натуральные числа, при этом $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$. С первого по пятый день в каждый следующий день Лёша решал больше задач, чем в предыдущий. Но с пятого по пятнадцатый день, наоборот, количество задач, решенных за день, уменьшалось. Найдите количество различных вариантов $(a_1, a_2, \ldots, a_{15}, a_{16})$. Два варианта считаются различными, если хотя бы на одной из позиций в них расположены разные числа.

Ответ: 16016.

3.17. Готовясь к олимпиаде, Игорь за 16 дней решил 136 задач. Количество задач, решенных за день под номером i, обозначим a_i. Все a_i – натуральные числа, при этом $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$. С первого по шестой день в каждый следующий день Игорь решал меньше задач, чем в предыдущий. Но с шестого по пятнадцатый день, наоборот, количество задач, решенных за день, росло. Найдите количество различных вариантов $(a_1, a_2, \ldots, a_{15}, a_{16})$. Два варианта считаются различными, если хотя бы на одной из позиций в них расположены разные числа.

Ответ: 32032.

3.18. Готовясь к олимпиаде, Саша за 16 дней решил 136 задач. Количество задач, решенных за день под номером i, обозначим a_i. Все a_i – натуральные числа, при этом $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$. С первого по шестой день в каждый следующий день Саша решал больше задач, чем в предыдущий. Но с шестого по пятнадцатый день, наоборот, количество задач, решенных за день, уменьшалось. Найдите количество различных вариантов $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{15},\ a_{16})$. Два варианта считаются различными, если хотя бы на одной из позиций в них расположены разные числа.

Ответ: 32032.

3.19. Готовясь к олимпиаде, Женя за 16 дней решил 136 задач. Количество задач, решенных за день под номером i, обозначим a_i. Все a_i – натуральные числа, при этом $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$. С первого по седьмой день в каждый следующий день Женя решал меньше задач, чем в предыдущий. Но с седьмого по пятнадцатый день, наоборот, количество задач, решенных за день, росло. Найдите количество различных вариантов $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{15},\ a_{16})$. Два варианта считаются различными, если хотя бы на одной из позиций в них расположены разные числа.

Ответ: 48048.

3.20. Готовясь к олимпиаде, Артём за 16 дней решил 136 задач. Количество задач, решенных за день под номером i, обозначим a_i. Все a_i – натуральные числа, при этом $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$. С первого по седьмой день в каждый следующий день Артём решал больше задач, чем в предыдущий. Но с седьмого по пятнадцатый день, наоборот, количество задач, решенных за день, уменьшалось. Найдите количество различных вариантов $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{15},\ a_{16})$. Два варианта считаются различными, если хотя бы на одной из позиций в них расположены разные числа.

Ответ: 48048.

IV. Три окружности с центрами A, B и C попарно касаются друг друга внешним образом и находятся в полосе между находящимися на расстоянии t друг от друга параллельными прямыми l_1 и l_2 так, что прямая l_1 касается первых двух окружностей и не имеет общих точек с третьей, а прямая l_2 касается первой и третьей окружностей и не имеет общих точек со второй. При этом $\cos\angle ACB = a$.

Найдите наименьшее возможное значение функции $f(t) = 1000 \cdot (S(t) - r(t))$, где $S(t)$ — площадь $\triangle ABC$, а $r(t)$ — радиус вписанной в $\triangle ABC$ окружности. При необходимости округлите ответ до сотых. Если решения нет в ответе укажите 0.

Решение. Пусть радиус большего круга — R, среднего круга — r_2, меньшего — r_1, $t = 2R$. Решим для $a = -\frac{1}{26}$.

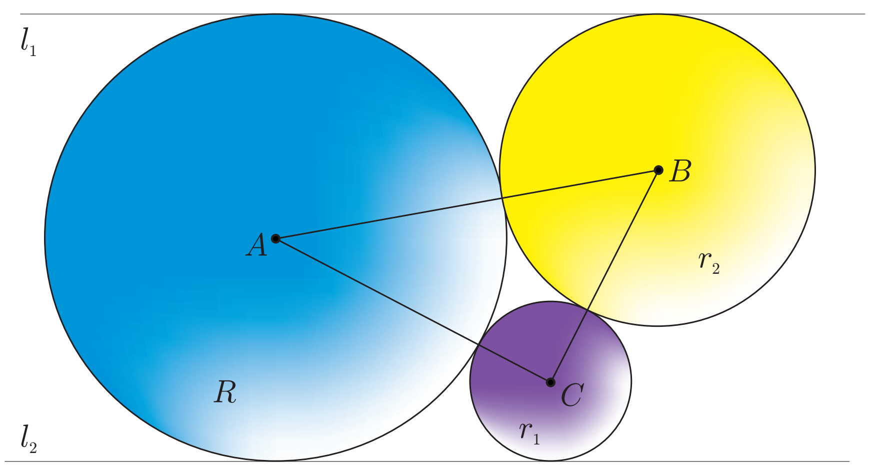

Рис. 1:

1. Докажем, что $R = 2\sqrt{r_1 r_2}$. Для этого напишем теорему Пифагора в треугольнике CBD (см. рис. 2). Откуда и получаем желаемое равенство.

2. В треугольнике ABC из теоремы косинусов вытекает:

$$(R+r_2)^2 = (R+r_1)^2 + (r_1+r_2)^2 - 2(R+r_1)(r_1+r_2)\cos\alpha$$
$$Rr_2 = r_1(R+r_1+r_2) - (R+r_1)(r_1+r_2)\cos\alpha$$

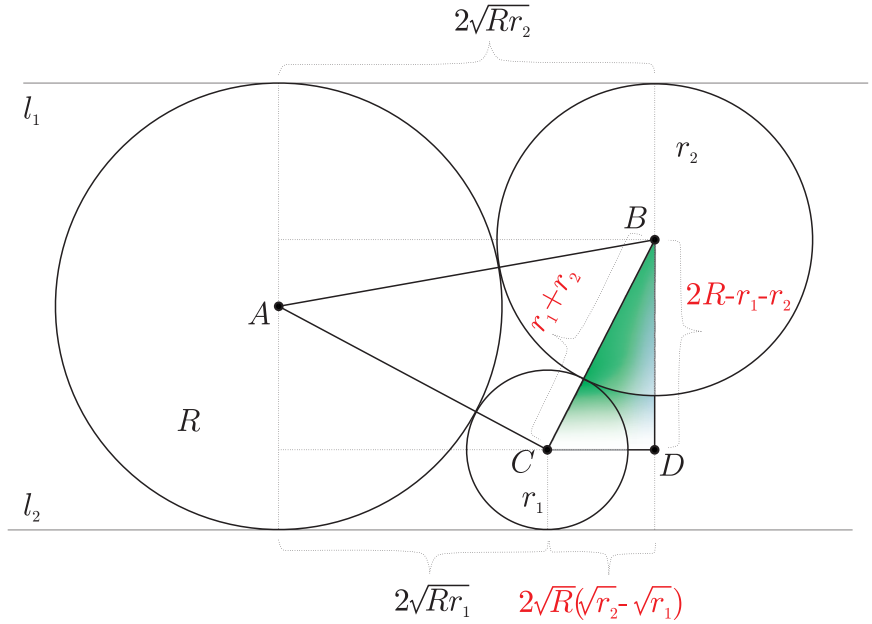

Рис. 2:

Обозначим $x = \sqrt{r_1/r_2}$, используя $R = 2\sqrt{r_1 r_2}$ получаем

$$2 = x(1+x)^2 - (2+x)(1+x^2)\cos\alpha.$$

После подстановки косинуса $\cos\alpha = -1/26$, получаем уравнение уравнение третьей степени:

$$27x^3 + 54x^2 + 27x - 50 = 0,$$

которое равносильно следующему

$$(3x-2)(9x^2+24x+25) = 0.$$

Следовательно $r_1 = \frac{4}{9}r_2$. Поэтому $R = 2\sqrt{r_1 r_2} = \frac{4}{3}r_2$.

3. Поскольку $\sin\alpha = 15\sqrt{3}/26$, то площадь треугольника ABC:

$$S = \frac{1}{2}(R+r_1)(r_1+r_2)\sin\alpha = \frac{104}{81}r_2^2\sin\alpha = \frac{20\sqrt{3}}{27}r_2^2.$$

Полупериметр треугольника ABC равен $p = R + r_1 + r_2 = (25/9)r_2$. Поскольку $t = 2R = (8/3)r_2$, $r_2 = 3t/8$, то

$$f(t) = 1000\cdot(S(t) - r(t)) = 1000\cdot S(t)(1 - 1/p(t)) = 1000\cdot 20\frac{\sqrt{3}}{27}r_2^2\left(1 - \frac{9}{25r_2}\right) =$$
$$= 1000\cdot 20\frac{\sqrt{3}\cdot 3^2}{8^2\cdot 27}\left(t^2 - \frac{24}{25}t\right) = \frac{625}{2\sqrt{3}}\left(\left(t - \frac{12}{25}\right)^2 - \frac{12^2}{25^2}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{625}{2\sqrt{3}}\left(-\frac{12^2}{25^2}\right) = -24\sqrt{3} = -41,57\ldots.$$

Ответ: $-41,57$.

$\square$

4-1. $a = -\frac{1}{26}$. Ответ: $-41,57$
4-2. $a = \frac{19}{275}$. Ответ: $-42,85$
4-3. $a = -\frac{29}{221}$. Ответ: $-40,12$
4-4. $a = \frac{37}{287}$. Ответ: $-43,38$
4-5. $a = \frac{17}{703}$. Ответ: $-42,37$
4-6. $a = -\frac{101}{585}$. Ответ: $-39,36$
4-7. $a = \frac{82}{425}$. Ответ: $-43,80$
4-8. $a = \frac{167}{1625}$. Ответ: $-43,16$
4-9. $a = \frac{427}{1885}$. Ответ: $-43,96$
4-10. $a = -\frac{239}{1219}$. Ответ: $-38,89$
4-11. $a = \frac{23}{4023}$. Ответ: $-42,15$
4-12. $a = \frac{1249}{5249}$. Ответ: $-44,01$
4-13. $a = -\frac{232}{1099}$. Ответ: $-38,59$
4-14. $a = -\frac{197}{2465}$. Ответ: $-40,96$
4-15. $a = \frac{113}{2775}$. Ответ: $-42,55$
4-16. $a = \frac{469}{3131}$. Ответ: $-43,53$
4-17. $a = \frac{437}{1768}$. Ответ: $-44,04$
4-18. $a = -\frac{19}{4375}$. Ответ: $-42,02$
4-19. $a = \frac{224}{2421}$. Ответ: $-43,07$
4-20. $a = \frac{343}{7093}$. Ответ: $-42,63$