Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заочного этапа 2024/2025 учебного года для 10 класса

1) На тренировке перед стрелками находятся 2024 мишени с номерами 1 до 2024. Первый стрелок попадает во все мишени с номерами 3, 6, 9, …, 2022. Второй стрелок попадает во все мишени с номерами 4, 8, 12, …, 2024. Третий стрелок попадает во все мишени с номерами 10, 20, 30, …, 2020. Сколько осталось мишеней, в которые никто не попал?

Ответ: 945.

Решение. Пусть A_n – количество чисел от 1 до 2024, кратных *n*. Тогда количество пораженных мишеней равно

$$A_3 + A_4 + A_{10} - A_{\text{НОД}(3,4)} - A_{\text{НОД}(3,10)} - A_{\text{НОД}(4,10)} + A_{\text{НОД}(3,4,10)} =$$
$$= \left[\frac{2024}{3}\right] + \left[\frac{2024}{4}\right] + \left[\frac{2024}{10}\right] - \left[\frac{2024}{12}\right] - \left[\frac{2024}{30}\right] - \left[\frac{2024}{20}\right] + \left[\frac{2024}{60}\right] =$$
$$= 674 + 506 + 202 - 168 - 67 - 101 + 33 = 1079.$$

Значит, количество оставшихся непораженными мишеней равно $2024 - 1079 = 945$.

2) Пусть $\{x_1, x_2, \dots\}$ - строго возрастающая последовательность натуральных чисел (т.е. $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$).

Известно, что $x_1 = 1$ и $x_{n-1} \cdot x_{n+1} = x_n^3 + 1$ при всех $n > 1$. Найдите x_5.

Ответ: 5403014.

Решение: Такая последовательность только одна: 1, 2, 9, 365,5403014,… Достаточно доказать, что $x_2 = 2$, иначе не получится целое: По условию $1 \cdot x_3 = x_2^3 + 1$, следовательно, $x_2 \cdot x_4 = (x_2^3 + 1)^3 + 1 = x_2^9 + 3x_2^6 + 3x_2^3 + 2$. Это число делится на x_2 только при $x_2 = 1$ или $x_2 = 2$, но 1 быть не может, т.к. последовательность возрастающая.

3) Готовясь к олимпиаде, Федя за 17 дней решил 153 задачи. Количество задач, решенных за день под номером *i*, обозначим a_i. Все a_i – натуральные числа, при этом $a_i \neq a_j$, если $i \neq j$. С первого по пятый день в каждый следующий день Федя решал меньше задач, чем в предыдущий. Но с пятого по шестнадцатый день, наоборот, количество задач, решенных за день, росло. Найдите количество различных вариантов ($a_1, a_2, \dots, a_{16}, a_{17}$). Два варианта считаются различными, если хотя бы на одной из позиций в них расположены разные числа.

Ответ: 23205.

Решение. Так как 1 + 2 + 3 + + 17 = 153, то получается, что все $a_i \le 17$, и ($a_1, a_2, \dots, a_{16}, a_{17}$) – перестановка чисел (1, 2, 3, …, 17), для которой $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$ и $a_{16} > a_{15} > a_{14} > a_{13} > a_{12} > a_{11} > a_{10} > a_9 > a_8 > a_7 > a_6 > a_5$. При этом a_{17} может быть равно любому числу от 1 до 17, без ограничений. Так как 15 чисел из 17 больше, чем a_5, то a_5 равно 1 или 2.

Если $a_5 = 2$, то $a_{17} = 1$. Разместим набор из 15 оставшихся чисел в двух представлениях: в порядке убывания и в порядке возрастания (17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3) и (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17). Из первого набора нужно выбрать любые 4 числа и расположить их слева направо в качестве a_1, a_2, a_3 и a_4. После этого во втором наборе нужно удалить эти 4 числа и расположить оставшиеся числа слева направо в качестве a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15} и a_{16}. Количество таких перестановок определяется количеством сочетаний 4 элементов из 15:

$$C_{15}^4 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 1365.$$

Если $a_5 = 1$, то a_{17} может быть равно любому из 16 оставшихся чисел. Пусть, например, $a_{17} = 9$ (рассуждения аналогичны для любого другого выбора). Как и ранее, разместим набор из 15 оставшихся чисел в двух представлениях: (17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2) и (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17). Далее выбираем любые 4 числа из первого набора и располагаем их слева направо в качестве a_1, a_2, a_3 и a_4. Остальное аналогично. Количество таких перестановок также равно $C_{15}^4 = 1365$.

Общее количество перестановок равно $1365 + 1365 \cdot 16 = 1365 \cdot 17 = 23205$.

Ответ: 23205.

4) Найдите наименьшее значение выражения $x^2 + 9y^2$, если $x^3 + y^3 + 6xy = 8$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 3,6.

Решение. Так как

$$x^3 + y^3 + 6xy = (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right) + 6xy = (x+y)\left((x+y)^2 - 3xy\right) + 6xy,$$

то, получим уравнение $(x+y)^3 - 3(x+y)xy + 6xy = 8$, которое можно записать в виде

$$(x+y-2)((x+y)^2 + 2(x+y) + 4 - 3xy) = 0.$$

Отсюда или $x + y = 2$, или $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 4 - 3xy = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{1}{2}(x+2)^2 + \frac{1}{2}(y+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = -2.$$

• Если $x + y = 2$, то $x^2 + 9y^2 = x^2 + 9(2-x)^2 = 10x^2 - 36x + 36 = 10\left(x - \frac{9}{5}\right)^2 + \frac{18}{5} \geq \frac{18}{5}$, то есть наименьшее значение выражения $x^2 + 2y^2$ равно $\frac{18}{5}$ и достигается при $x = \frac{9}{5}$, $y = \frac{1}{5}$.

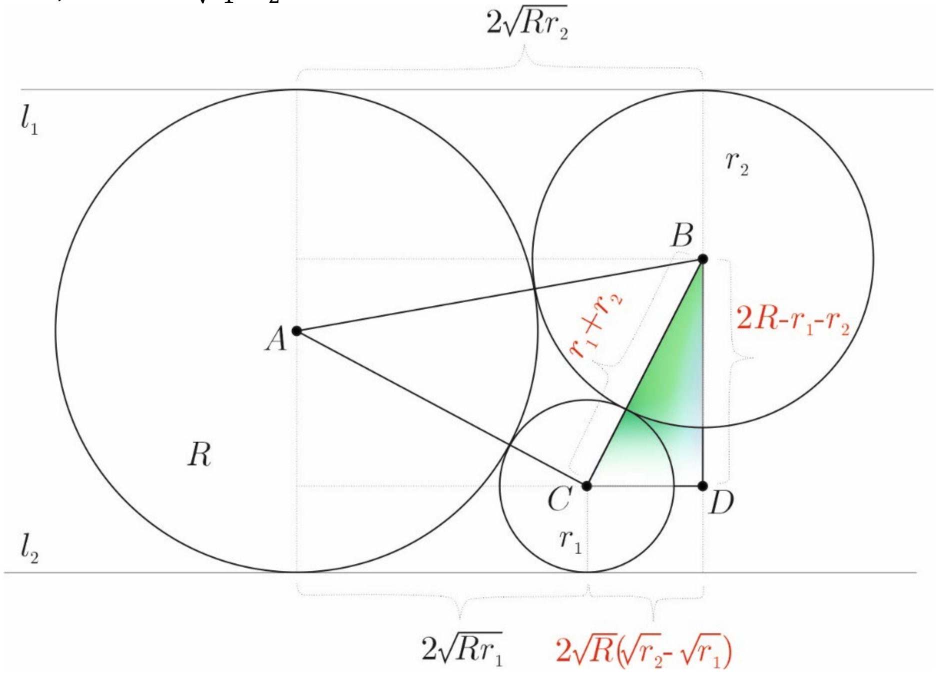
• Если $x = y = -2$, то $x^2 + 9y^2 = 40 > \frac{18}{5}$.

Значит, ответ: $\frac{18}{5} = 3,6$.

5) Три окружности с центрами A, B и C попарно касаются друг друга внешним образом и находятся в полосе между находящимися на расстоянии t друг от друга параллельными прямыми l_1 и l_2 так, что прямая l_1 касается первых двух окружностей и не имеет общих точек с третьей, а прямая l_2 касается первой и третьей окружностей и не имеет общих точек со второй. При этом $\cos(ACB) = -\frac{1}{26}$. Найдите наименьшее возможное значение функции $f(t) = S(t) - r(t)$, где $S(t)$ --- площадь $\triangle ABC$, а $r(t)$ --- радиус вписанной в $\triangle ABC$ окружности. При необходимости округлите ответ до сотых. Если решения нет в ответе укажите 0.

Ответ: -0,04.
Решение:

Докажем, что $R = 2\sqrt{r_1 \cdot r_2}$.



Из теоремы Пифагора в ΔCBD получаем требуемое равенство.

В треугольнике ABC из теоремы косинусов вытекает:

$$(R+r_2)^2 = (R+r_1)^2 + (r_1+r_2)^2 - 2(R+r_1)(r_1+r_2)\cos\alpha$$

$$Rr_2 = r_1(R+r_1+r_2) - (R+r_1)(r_1+r_2)\cos\alpha$$

Обозначим $x = \sqrt{r_1 / r_2}$, используя $R = 2\sqrt{r_1 r_2}$ получаем

$$2 = x(1+x)^2 - (2+x)(1+x^2)\cos\alpha.$$

После подстановки косинуса, получаем уравнение:

$$\frac{1}{26}(3x-2)(9x^2+24x+25) = 0.$$

Следовательно $r_1 = \dfrac{4}{9} r_2$. Поэтому $R = 2\sqrt{r_1 r_2} = \dfrac{4}{3} r_2$.

Поскольку $\sin\alpha = 15\sqrt{3}/26$, то площадь треугольника ABC:

$$S = \frac{1}{2}(R + r_1)(r_1 + r_2)\sin\alpha = \frac{104}{81} r_2^2 \sin\alpha = \frac{20\sqrt{3}}{27} r_2^2.$$

Полупериметр треугольника ABC равен $p = R + r_1 + r_2 = (25/9) r_2$. Поскольку $t = 2R = (8/3) r_2$, $r_2 = 3t/8$, то

$$f(t) = (S(t) - r(t)) = S(t)(1 - 1/p(t)) = 20\frac{\sqrt{3}}{27} r_2^2 \left(1 - \frac{9}{25 r_2}\right) =$$

$$= 20 \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 3^2}{8^2 \cdot 27}\left(t^2 - \frac{24}{25} t\right) = \frac{5}{16\sqrt{3}}\left(\left(t - \frac{12}{25}\right)^2 - \frac{12^2}{25^2}\right) \geq$$

$$\geq \frac{5}{16\sqrt{3}}\left(-\frac{12^2}{25^2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{125} = -0,04157\ldots.$$

6) В спортивный клуб ходит 16 школьников. На каждой тренировке они делятся на 2 команды (не обязательно одинакового размера) и играют в футбол. За какое наименьшее число тренировок можно их разделить на команды так, чтобы любые два школьника хотя бы один раз сыграли в разных командах?

Ответ: 4.

Решение: пронумеруем участников 0,1,…,15 и запишем номер в двоичной системе счисления (4 цифры, могут начинаться с нуля). Будем считать, что если i-я цифра 0, то он на i-й тренировке играет за «синих», а если 1 – то за «красных». Поскольку любые два номера отличаются хотя бы в одном разряде, то, соответственно, два игрока попадут в разные команды. За три тренировки так разбить нельзя, поскольку всего 8 последовательностей из нулей и единиц длины 3. Т.е. у каких-то двух школьников последовательности совпадут, и они все время будут играть в одной команде.