Отборочный этап олимпиады «Покори Воробьёвы горы!» по математике состоял из блиц-тура (5 задач, 3 часа на решение) и творческой части (5 задач, решение которых нужно было отправить в течение недели).

Отборочный этап. Блиц-тур

Каждый участник блиц-тура получал свой набор задач, отличающийся от наборов задач других участников. Приводим типичный набор из пяти задач этого блиц-тура.

1. Решите неравенство
$$\frac{4+\sqrt{-3-x}}{3-|x+4|} \leqslant 1.$$
В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству и не превосходящих по абсолютной величине 12.

Решение. Переносим 1 в левую часть и приводим к общему знаменателю:
$$\frac{1+\sqrt{-3-x}+|x+4|}{3-|x+4|} \leqslant 0.$$
При $x>-3$ подкоренное выражение отрицательно, то есть решений нет. При $x \leqslant -3$ числитель положителен, а, значит,
$$3-|x+4|<0 \Longleftrightarrow |x+4|>3 \Longleftrightarrow x>-1$$
или $x<-7$.

Таким образом, решение неравенства: $x<-7$. Нужные по условию целые корни: -12, -11, …, -8. Их сумма равна -50.

Ответ: -50.

□

2. Решите уравнение $\cos 8x = \frac{14}{3}\left(\cos 2x - \sin 2x\right)^2 - 1$. В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку $\left[\frac{11\pi}{2};\ \frac{13\pi}{2}\right]$, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению
$$1-2\sin^2 4x = \frac{14}{3}\left(1-\sin 4x\right) - 1 \Longleftrightarrow 2\sin^2 4x - \frac{14}{3}\sin 4x + \frac{8}{3} = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \sin 4t = 1 \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$
В данный в условии отрезок попадают корни $6\pi + \frac{\pi}{8}$ и $6\pi - \frac{3\pi}{8}$. Их сумма равна $\frac{47\pi}{4} = 36,913... \approx 36,91$.

Ответ: 36,91.

□

3. Найдите сторону BC четырехугольника $ABCD$, если $\angle BAC = \alpha$, $\angle ACD = \beta$, $\angle BCA + \angle CAD = \frac{\pi}{2}$ и $AD = a$. В ответ напишите результат округления найденного числа до двух знаков после запятой.
$$\alpha = \arcsin\frac{5}{13}, \beta = \arcsin\frac{12}{13}, a = 24.$$

Решение. Поскольку сумма углов $\angle BAC+\angle ACD=\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{12}{13}=\frac{\pi}{2}$, то $\angle BAD+\angle BCD=\pi$. Следовательно, вокруг четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Далее, по теореме синусов $\frac{AD}{\sin\beta}=\frac{BC}{\sin\alpha}\Rightarrow BC=\frac{24\cdot5}{12}=10$.

Ответ: 10.

□

4. Решите систему

$$\begin{cases}\log_{x+a}(y^2-2cy+c^2)+\log_{y-c}(x^2+2xa+a^2)=4,\\ \log_{x+a}(-2y+3+2c)+\log_{y-c}(2x-1+2a)=2,\end{cases}$$

если $a=8$, $c=20$. Вычислите значения выражения $x_k\cdot y_k$для каждого решения $(x_k,\ y_k)$системы и найдите среди них минимальное. В ответе укажите найденное минимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Решение. Первое уравнение системы при $x>-a$, $x\neq 1-a$, $y>c$, $y\neq 1+c$ равносильно уравнению

$$\log_{x+a}(y-c)+\log_{y-c}(x+a)=2\Longleftrightarrow\log_{x+a}(y-c)=1\Longleftrightarrow y=x+a+c,$$

или при данных значениях $y=x+28$. Подстановка во второе уравнение приводит к уравнению

$$\log_{x+8}(-2x-13)+\log_{x+8}(2x+15)=2,$$

которое при $-\frac{15}{2}<x<-\frac{13}{2}$, $x\neq-7$ равносильно уравнению

$$\log_{x+8}(-2x-13)(2x+15)=\log_{x+8}(x+8)^2\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow(x+8)^2+(2x+13)(2x+15)=0\Longleftrightarrow 5x^2+72x+259=0.$$

Из двух получившихся корней $x=-7$ и $x=-\frac{37}{5}$ последнего уравнения только второй входит в ОДЗ. Поэтому $(x;y)=\left(-\frac{37}{5};\ \frac{103}{5}\right)$, и искомая величина равна $-\frac{37\cdot103}{5\cdot5}=-152,44$.

Ответ: $-152,44$.

□

5. При сушке абрикосы теряют 10% своей массы, а виноград – 30% массы. Определите, в какой пропорции необходимо взять абрикосы и виноград, чтобы после сушки получилась смесь, содержащая урюка в 2 раза больше, чем изюма. В ответе укажите отношение начальной массы абрикос к массе винограда в виде десятичной дроби, округлив ее при необходимости до двух знаков после запятой.

Решение. Если взять x (кг) абрикос и y (кг) винограда, то после сушки абрикос станет $0{,}9x$, а винограда $0{,}7y$. Так как первая масса должна быть в 2 раза больше второй, то $0{,}9x=1{,}4y$, то есть $\frac{x}{y}=\frac{14}{9}\approx1,56$.

Ответ: 1,56.

□

Набор творческих задач.

I. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\sin^{2l} mx^\circ = \sin^{2l} nx^\circ$$

(x° означает x градусов). Представив x в виде несократимой дроби, в ответ запишите сумму её числителя и знаменателя.

Решение. Решим уравнение:

$$2\sin^2 mx^\circ = 2\sin^2 nx^\circ,$$

$$\cos 2mx^\circ = \cos 2nx^\circ,$$

$$2mx^\circ = \pm 2nx^\circ + 360^\circ k,$$

$$x^\circ = \frac{180k}{m \pm n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Корень наименьший положительный при выборе знака «+» и $k = 1$:

$$x = \frac{180}{m+n}.$$

□

1.1. $l = 201$, $m = 2005$, $n = 2017$. Ответ: 2101 ($x = \frac{180}{4022} = \frac{90}{2011}$).

1.2. $l = 202$, $m = 2005$, $n = 2018$. Ответ: 467 ($x = \frac{180}{4023} = \frac{20}{447}$).

1.3. $l = 203$, $m = 2005$, $n = 2019$. Ответ: 1051 ($x = \frac{180}{4024} = \frac{45}{1006}$).

1.4. $l = 204$, $m = 2006$, $n = 2019$. Ответ: 841 ($x = \frac{180}{4025} = \frac{36}{805}$).

1.5. $l = 205$, $m = 2007$, $n = 2019$. Ответ: 701 ($x = \frac{180}{4026} = \frac{30}{671}$).

1.6. $l = 206$, $m = 2010$, $n = 2018$. Ответ: 1052 ($x = \frac{180}{4028} = \frac{45}{1007}$).

1.7. $l = 207$, $m = 2001$, $n = 2029$. Ответ: 421 ($x = \frac{180}{4030} = \frac{18}{403}$).

1.8. $l = 208$, $m = 1991$, $n = 2019$. Ответ: 419 ($x = \frac{180}{4010} = \frac{18}{401}$).

1.9. $l = 209$, $m = 2002$, $n = 2016$. Ответ: 2099 ($x = \frac{180}{4018} = \frac{90}{2009}$).

1.10. $l = 210$, $m = 2002$, $n = 2015$. Ответ: 1399 ($x = \frac{180}{4017} = \frac{60}{1339}$).

1.11. $l = 211$, $m = 2001$, $n = 2015$. Ответ: 1049 ($x = \frac{180}{4016} = \frac{45}{1004}$).

1.12. $l = 212$, $m = 2002$, $n = 2013$. Ответ: 839 ($x = \frac{180}{4015} = \frac{36}{803}$).

1.13. $l = 213$, $m = 2004$, $n = 2018$. Ответ: 2101 ($x = \frac{180}{4022} = \frac{90}{2011}$).

1.14. $l = 214$, $m = 2004$, $n = 2019$. Ответ: 467 ($x = \frac{180}{4023} = \frac{20}{447}$).

1.15. $l = 215$, $m = 2006$, $n = 2018$. Ответ: 1051 ($x = \frac{180}{4024} = \frac{45}{1006}$).

1.16. $l = 216$, $m = 2009$, $n = 2016$. Ответ: 841 ($x = \frac{180}{4025} = \frac{36}{805}$).

1.17. $l = 217$, $m = 2011$, $n = 2015$. Ответ: 701 ($x = \frac{180}{4026} = \frac{30}{671}$).

1.18. $l = 218$, $m = 2011$, $n = 2017$. Ответ: 1052 ($x = \frac{180}{4028} = \frac{45}{1007}$).

1.19. $l = 219$, $m = 2013$, $n = 2017$. Ответ: 421 ($x = \frac{180}{4030} = \frac{18}{403}$).

1.20. $l = 220$, $m = 2002$, $n = 2018$. Ответ: 70 ($x = \frac{180}{4020} = \frac{3}{67}$).

1.21. $l = 221$, $m = 1999$, $n = 2019$. Ответ: 2099 ($x = \frac{180}{4018} = \frac{90}{2009}$).

1.22. $l = 222$, $m = 1999$, $n = 2018$. Ответ: 1399 ($x = \frac{180}{4017} = \frac{60}{1339}$).

1.23. $l = 223$, $m = 2001$, $n = 2015$. Ответ: 1049 ($x = \frac{180}{4016} = \frac{45}{1004}$).

1.24. $l = 224$, $m = 2001$, $n = 2014$. Ответ: 839 ($x = \frac{180}{4015} = \frac{36}{803}$).

II. Вычислите значение выражения

$$((\ldots((2018 \oplus 2017) \oplus 2016) \oplus \ldots \oplus 2) \oplus 1)\,,$$

если $x \oplus y = \frac{3(x+y)}{xy+9}$.

Решение. Так как $x \oplus 3 = \frac{3(x+3)}{3x+9} = 1$, независимо от того, чему равен x, то искомое выражение равно $(((x \oplus 3) \oplus 2) \oplus 1) = ((1 \oplus 2) \oplus 1) = \left(\left(\frac{3(1+2)}{1 \cdot 2+9}\right) \oplus 1\right) = \left(\frac{9}{11} \oplus 1\right) = \frac{3\left(\frac{9}{11}+1\right)}{\frac{9}{11}\cdot 1+9} = \frac{5}{9}$ =0,555...$\approx 0,56$.

Ответ: $0,56$. ∎

2.1. если $x \oplus y = \frac{3(x+y)}{xy+9}$. **Ответ:** $0,56$.
2.2. если $x \oplus y = \frac{3(x+2y)}{xy+18}$. **Ответ:** $0,44$.
2.3. если $x \oplus y = \frac{3(x+3y)}{xy+27}$. **Ответ:** $0,40$.
2.4. если $x \oplus y = \frac{3(x+4y)}{xy+36}$. **Ответ:** $0,38$.
2.5. если $x \oplus y = \frac{3(x+5y)}{xy+45}$. **Ответ:** $0,37$.
2.6. если $x \oplus y = \frac{3(x+6y)}{xy+54}$. **Ответ:** $0,37$.
2.7. если $x \oplus y = \frac{3(x+7y)}{xy+63}$. **Ответ:** $0,36$.
2.8. если $x \oplus y = \frac{3(x+8y)}{xy+72}$. **Ответ:** $0,36$.
2.9. если $x \oplus y = \frac{3(x+9y)}{xy+81}$. **Ответ:** $0,36$.
2.10. если $x \oplus y = \frac{3(x+10y)}{xy+90}$. **Ответ:** $0,35$.
2.11. если $x \oplus y = \frac{4(x+y)}{xy+16}$. **Ответ:** $0,39$.
2.12. если $x \oplus y = \frac{4(x+2y)}{xy+32}$. **Ответ:** $0,32$.
2.13. если $x \oplus y = \frac{4(x+3y)}{xy+48}$. **Ответ:** $0,29$.
2.14. если $x \oplus y = \frac{4(x+4y)}{xy+64}$. **Ответ:** $0,28$.
2.15. если $x \oplus y = \frac{4(x+5y)}{xy+80}$. **Ответ:** $0,27$.
2.16. если $x \oplus y = \frac{4(x+10y)}{xy+160}$. **Ответ:** $0,26$.

III. Для каждого a, при которых уравнение $x^3 - x^2 - 4x - a = 0$ имеет три различных действительных корня, обозначим через $x_1 = x_1(a)$, $x_2 = x_2(a)$, $x_3 = x_3(a)$ эти корни, упорядоченные по убыванию ($x_1 > x_2 > x_3$). Выясните, при каком из этих a выражение $x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1$ принимает наибольшее возможное значение. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой. Если таких a найдется несколько, то в ответе укажите их сумму.

Решение. Найдём при каких a будет ровно три различных решения. Для этого рассмотрим выражение $\tilde{f}(x) = x^3 - x^2 - 4x$. Три решения $\tilde{f}(x) = a$ будут тогда и только тогда когда прямая $y = a$ будет иметь три точки пересечения с графиком функции $y = \tilde{f}(x)$. Найдём производную $\tilde{f}(x)' = 3x^2 - 2x - 4 = 3(x - x_+)(x - x_-)$, где $x_\pm = (1 \pm \sqrt{13})/3$. Ввиду того, знак производной меняется при переходе через корни $x_\pm$, начиная со знака плюс на $+\infty$, то локальный минимум $\tilde{f}_{\min} = \tilde{f}(x_+) = -\left(\frac{38+26\sqrt{13}}{27}\right) = -4,879\ldots,$

а локальный максимум $\tilde{f}_{\max} = \tilde{f}(x_-) = \frac{-38+26\sqrt{13}}{27} = 2,064\ldots$. Следовательно при всех $a \in (\tilde{f}_{\min}, \tilde{f}_{\max})$ и только при них уравнение $f(x) = 0$ будет иметь три различных решения. Введём обозначения

$$u = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1;$$
$$v = x_3^2 x_2 + x_2^2 x_1 + x_1^2 x_3.$$

Из теоремы Виета, известно:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 1;$$
$$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = -4;$$
$$\sigma_3 = x_1\, x_2\, x_3 = a.$$

Легко проверить справедливость равенств:

$$u + v = \sigma_1 \sigma_2 - 3\sigma_3;$$
$$u \cdot v = 9\sigma_3^2 - 6\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \sigma_2^3 + \sigma_3\sigma_1^3.$$

Откуда

$$u + v = -4 - 3a;$$
$$u \cdot v = 9a^2 + 25a - 64.$$

Следовательно переменные u и v — решения квадратного уравнения:

$$u^2 + (4 + 3a)u + (9a^2 + 25a - 64) = 0.$$

Учитывая, что $u - v = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) > 0$ найдем максимальное значение, которое может принимать u

$$u_{\max} = \frac{1}{2}\left(-4 - 3a + \sqrt{-27a^2 - 76a + 272}\right).$$

Найдём максимальное значение последнего выражения для $a \in (\tilde{f}_{\min}, \tilde{f}_{\max})$ для этого вычислим производную и приравняем к нулю:

$$-3 + \frac{-27a - 38}{\sqrt{-27a^2 - 76a + 272}} = 0 \Longrightarrow -27a - 38 = 3\sqrt{-27a^2 - 76a + 272}.$$

Последнее уравнение равносильно следующему: $243a^2 + 684a - 251 = 0$ при условии, что $-27a - 38 \geqslant 0$. Откуда $a = a^* = \frac{-38-13\sqrt{13}}{27} \approx -3,1434...$ Из вида a^* вытекает, что $a^* \in (\tilde{f}_{\min}, \tilde{f}_{\max})$, а из вида производной следует, что при $a < a^*$ производная положительна, а при $a > a^*$ производная отрицательна на области определения производной. Следовательно,

$$u_{\max} = u(a^*) \approx 10,53$$

Ответ: $-3,14$.

$\square$

3.1. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x - a$. **Ответ:** $-3,14$.
3.2. $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 8x - 5a$. **Ответ:** $-1,26$.
3.3. $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 8x - a$. **Ответ:** $-6,29$.
3.4. $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 12x - 5a$. **Ответ:** $-1,89$.
3.5. $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 12x - a$. **Ответ:** $-9,43$.
3.6. $f(x) = 4x^3 - 4x^2 - 16x - 3a$. **Ответ:** $-4,19$.
3.7. $f(x) = 4x^3 - 4x^2 - 16x - a$. **Ответ:** $-12,57$.
3.8. $f(x) = 5x^3 - 5x^2 - 20x - 3a$. **Ответ:** $-5,24$.

3.9. $f(x) = 5x^3 - 5x^2 - 20x - a$. **Ответ:** $-15, 72$.
3.10. $f(x) = 6x^3 - 6x^2 - 24x - a$. **Ответ:** $-18, 86$.
3.11. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x - a$. **Ответ:** $-1, 57$.
3.12. $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - x - a$. **Ответ:** $-0, 79$.

IV. Десятигранник $ABCDPQRSTUVW$ имеет два параллельных друг другу основания: квадрат $ABCD$ и восьмиугольник $PQRSTUVW$, все углы которого равны между собой, а также восемь боковых граней: треугольники APQ, BRS, CTU, DVW и прямоугольники $DAPW$, $ABRQ$, $BCTS$ и $CDVU$. Известно, что площадь сечения этого десятигранника плоскостью, проходящей через точки A, S и U, равна $\frac{143}{20}$, $|AB| = 1$, $|PQ| = \sqrt{2}$. Найдите расстояние между его основаниями.

Решение:

Процедура построения сечения десятигранника плоскостью ASU состоит из двух шагов:

1) Отмечаем точку K пересечения прямых SU и QR, точку L пересечения прямых SU и WV и точку M пересечения прямых SU и PW;

2) Проводим прямую AM, точку ее пересечения с ребром DW обозначим G, проводим прямую GL, точку ее пересечения с ребром DV обозначим F, проводим прямую AK, точку ее пересечения с ребром BR обозначим E.

Шестиугольник $AESUFG$ и будет сечением.

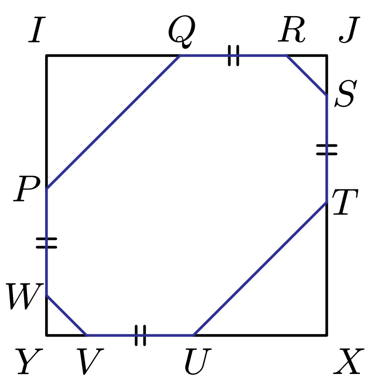

Рис. 1:

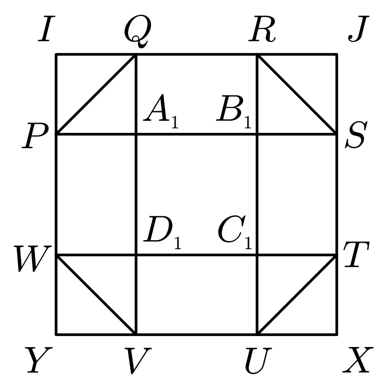

Рис. 2:

Поскольку, по условию, $ABCD$ – квадрат, а $DAPW$, $ABRQ$, $BCTS$ и $CDVU$ прямоугольники, то $|QR| = |ST| = |UV| = |WP| = 1$. Кроме того, величины всех углов восьмиугольника $PQRSTUVW$ равны между собой, поэтому, по теореме о сумме величин углов многоугольника, они равны $3\pi/4$. Из этого вытекает, что прямые ST и WP параллельны, прямые QR и UV параллельны, прямые QR и ST перпендикулярны.

Это означает, что четырехугольник $IJXY$, образованный прямыми QR, ST, UV и WP – прямоугольник. Ясно, что треугольники PIQ, RJS, TXU и WYP прямоугольные и равнобедренные. Обозначив $|PI| = |IQ| = a$, $|RJ| = |JS| = b$, $|TX| = |XU| = c$, $|VY| = |YW| = d$, и учитывая, что $|IJ| = |XY|$, $|JX| = |IY|$, имеем

$$\begin{cases} a + 1 + b = c + 1 + d, \\ b + 1 + c = d + 1 + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c, \\ b = d, \end{cases}$$

откуда находим $|IJ| = a + 1 + b = |JX| = b + 1 + c$, то есть $IJXY$ – квадрат.

Далее, рассмотрим точки A_1, B_1, C_1 и D_1, являющиеся ортогональными проекциями точек A, B, C и D на плоскость $PQRSTUVW$ соответственно. По теореме о трех перпендикулярах, $QA_1 \perp QR$, $PA_1 \perp PW$, $SB_1 \perp ST$, $RB_1 \perp QR$, $UC_1 \perp UV$, $TC_1 \perp ST$, $WD_1 \perp PW$, $VD_1 \perp UV$.

Поскольку $A_1B_1C_1D_1$ – тоже квадрат, то точки Q, A_1, D_1, V лежат на одной прямой, из чего следует $a = |IQ| = |VY| = d$. Итак, $a = b = c = d$, то есть $|PQ| = |OQ| = |ST| = |UV|$.

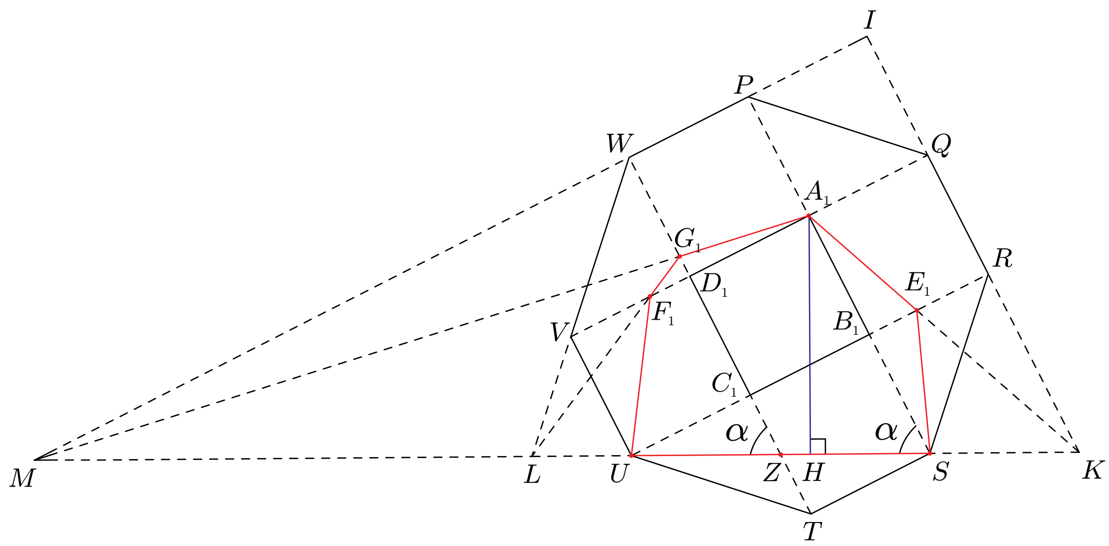

Рис. 3:

Обозначив ортогональные проекции точек E, F и G на плоскость $PQRSTUVW$ буквами E_1, F_1 и G_1 соответственно, получаем чертеж.

Мы знаем, что $|AB| = |A_1B_1| = 1$, $|PQ| = \sqrt{2}$, $|A_1P| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}|PQ| = 1$. Из вышеприведенных рассуждений следует, что длины всех отрезков A_1P, A_1Q, B_1R, B_1S, C_1T, C_1U, D_1V и D_1W тоже равны 1.

Из подобия треугольников UB_1S и URK имеем $|RK| : |B_1S| = |RU| : |B_1U| = \dfrac{3}{2}$, откуда $|RK| = \dfrac{3}{2}$. Затем, из подобия треугольников RKE и B_1A_1E находим

$$\frac{|RE_1|}{|E_1B_1|} = \frac{|RK|}{|A_1B_1|} = \frac{3}{2};\ |RE_1| + |E_1B_1| = 1 \quad \Rightarrow \quad |E_1B_1| = \frac{2}{5}.$$

Пусть $\widehat{PSM} = \alpha$. Из треугольника UB_1S получаем $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{|B_1U|}{|B_1S|} = 2$, и из треугольника MPS имеем $|PM| = |PS|\operatorname{tg}\alpha = 6$. Далее, из подобия треугольников MPA_1 и MWG_1 вытекает

$$\frac{|A_1P|}{|G_1W|} = \frac{|PM|}{|WM|} = \frac{6}{5} \quad \Rightarrow \quad |G_1W| = \frac{5}{6}, \quad |D_1G_1| = |D_1W| - |G_1W| = \frac{1}{6}.$$

Из треугольника MWZ находим $|WZ| = \dfrac{|MW|}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{5}{2}$, после чего, из подобия треугольников LWZ и LVU получаем $\dfrac{|WL|}{|VL|} = \dfrac{|WZ|}{|VU|} = \dfrac{5}{2}$. Наконец, записывая теорему Менелая для треугольника WD_1V и секущей G_1F_1, имеем

$$\frac{|VF_1|}{|F_1D_1|} \cdot \frac{|D_1G_1|}{|G_1W|} \cdot \frac{|WL|}{|VL|} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{|VF_1|}{|F_1D_1|} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} \cdot \frac{2}{5} = 2, \quad \Rightarrow \quad |F_1D_1| = \frac{1}{3}|VD_1| = \frac{1}{3}.$$

Теперь можно вычислить площадь S^* ортогональной проекции $A_1E_1SUF_1G_1$ построенного сечения на плоскость $PQRSTUVW$:

$$|A_1F_1| = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}; \quad |E_1U| = 2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5}; \quad S_{A_1F_1G_1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{3} = \frac{1}{9};$$

$$S_{A_1E_1UF_1} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(\frac{4}{3} + \frac{12}{5}\right) = \frac{28}{15}; \quad S_{E_1US} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{12}{5} = \frac{6}{5}; \quad S^* = S_{A_1F_1G_1} + S_{A_1E_1UF_1} + S_{E_1US} = \frac{143}{45}.$$

Опустим на прямую SU перпендикуляр A_1H. Его длина равна $|A_1S|\sin\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$, а угол A_1HA (так как $AA_1 \perp PQRSTUVW$) будет углом β между плоскостью сечения и плоскостью основания $PQRSTUVW$. Тогда, если обозначить искомое расстояние (длину отрезка AA_1) за h, то, с одной стороны,

$$\cos\beta = \frac{S^*}{S_{\text{сечения}}} = \frac{\frac{143}{45}}{\frac{143}{20}} = \frac{4}{9},$$

и, с другой стороны,

$$\cos\beta = \frac{|A_1H|}{|AH|} = \frac{|A_1H|}{\sqrt{h^2+|A_1H|^2}} = \frac{4}{\sqrt{5h^2+16}}.$$

Решая уравнение $\dfrac{4}{\sqrt{5h^2+16}} = \dfrac{4}{9}$, находим $h=\sqrt{13}$.

Ответ: $\sqrt{13}$.

1. Десятигранник $ABCDPQRSTUVW$ имеет два параллельных друг другу основания: квадрат $ABCD$ и восьмиугольник $PQRSTUVW$, все углы которого равны между собой, а также восемь боковых граней: треугольники APQ, BRS, CTU, DVW и прямоугольники $DAPW$, $ABRQ$, $BCTS$ и $CDVU$. Известно, что площадь сечения этого десятигранника плоскостью, проходящей через точки A, S и U, равна $\frac{143}{20}$, $|AB|=1$, $|PQ|=\sqrt{2}$. Найдите расстояние между его основаниями. В ответ запишите найденное значение, при необходимости округлив его.

Ответ: $3,61$. (Точное значение $\sqrt{13}$ ($m=1$, $k=1$).)

2. Десятигранник $ABCDPQRSTUVW$ имеет два параллельных друг другу основания: квадрат $ABCD$ и восьмиугольник $PQRSTUVW$, все углы которого равны между собой, а также восемь боковых граней: треугольники APQ, BRS, CTU, DVW и прямоугольники $DAPW$, $ABRQ$, $BCTS$ и $CDVU$. Известно, что площадь сечения десятигранника плоскостью, проходящей через точки B, U и W, равна $\frac{143}{15}$, $|AB|=\sqrt{2}$, $|PQ|=2$. Найдите расстояние между основаниями десятигранника. В ответ запишите найденное значение, при необходимости округлив его.

Ответ: $2,83$. (Точное значение $2\sqrt{2}$ ($m=\sqrt{2}$, $k=1$).)

3. Десятигранник $ABCDPQRSTUVW$ имеет два параллельных друг другу основания: квадрат $ABCD$ и восьмиугольник $PQRSTUVW$, все углы которого равны между собой, а также восемь боковых граней: треугольники APQ, BRS, CTU, DVW и прямоугольники $DAPW$, $ABRQ$, $BCTS$ и $CDVU$. Известно, что площадь сечения десятигранника плоскостью, проходящей через точки C, W и Q, равна $\frac{1001}{45}$, $|AB|=\sqrt{2}$, $|PQ|=2$. Найдите расстояние между основаниями десятигранника. В ответ запишите найденное значение, при необходимости округлив его.

Ответ: $8,49$. (Точное значение $6\sqrt{2}$ ($m=\sqrt{2}$, $k=1$).)

4. Десятигранник $ABCDPQRSTUVW$ имеет два параллельных друг другу основания: квадрат $ABCD$ и восьмиугольник $PQRSTUVW$, все углы которого равны между собой, а также восемь боковых граней: треугольники APQ, BRS, CTU, DVW и прямоугольники $DAPW$, $ABRQ$, $BCTS$ и $CDVU$. Известно, что площадь сечения десятигранника плоскостью, проходящей через точки D, Q и S, равна $\frac{1859}{90}$, $|AB|=2$, $|PQ|=2\sqrt{2}$. Найдите расстояние между основаниями десятигранника. В ответ запишите найденное значение, при необходимости округлив его.

Ответ: $4,58$. (Точное значение $\sqrt{21}$ ($m=2$, $k=1$).)

5. Десятигранник $ABCDPQRSTUVW$ имеет два параллельных друг другу основания: квадрат $ABCD$ и восьмиугольник $PQRSTUVW$, все углы которого равны между собой, а также восемь боковых граней: треугольники APQ, BRS, CTU, DVW и прямоугольники $DAPW$, $ABRQ$, $BCTS$ и $CDVU$. Известно, что площадь сечения десятигранника плоскостью, проходящей через точки A, S и U, равна $\frac{209}{960}$, $|AB|=1/9$, $|PQ|=\sqrt{2}/18$. Найдите расстояние между основаниями десятигранника. В ответ запишите найденное значение, при необходимости округлив его.

Ответ: $1,41$. (Точное значение $\sqrt{2}$ ($m=1/9$, $k=1/2$).)

6. Десятигранник $ABCDPQRSTUVW$ имеет два параллельных друг другу основания: квадрат $ABCD$ и восьмиугольник $PQRSTUVW$, все углы которого равны между собой, а также восемь боковых граней: треугольники APQ, BRS, CTU, DVW и прямоугольники $DAPW$, $ABRQ$, $BCTS$ и $CDVU$. Известно, что площадь сечения десятигранника плоскостью, проходящей через точки B, U и W, равна $\frac{1463}{2880}$, $|AB| = 1/3$, $|PQ| = \sqrt{2}/6$. Найдите расстояние между основаниями десятигранника. В ответ запишите найденное значение, при необходимости округлив его.

Ответ: 1 ($m = 1/3$, $k = 1/2$).

7. Десятигранник $ABCDPQRSTUVW$ имеет два параллельных друг другу основания: квадрат $ABCD$ и восьмиугольник $PQRSTUVW$, все углы которого равны между собой, а также восемь боковых граней: треугольники APQ, BRS, CTU, DVW и прямоугольники $DAPW$, $ABRQ$, $BCTS$ и $CDVU$. Известно, что площадь сечения десятигранника плоскостью, проходящей через точки C, W и Q, равна $\frac{2299}{8640}$, $|AB| = 1/9$, $|PQ| = \sqrt{2}/18$. Найдите расстояние между основаниями десятигранника. В ответ запишите найденное значение, при необходимости округлив его.

Ответ: $1,73$. (Точное значение $\sqrt{3}$ ($m = 1/9$, $k = 1/2$).)

8. Десятигранник $ABCDPQRSTUVW$ имеет два параллельных друг другу основания: квадрат $ABCD$ и восьмиугольник $PQRSTUVW$, все углы которого равны между собой, а также восемь боковых граней: треугольники APQ, BRS, CTU, DVW и прямоугольники $DAPW$, $ABRQ$, $BCTS$ и $CDVU$. Известно, что площадь сечения десятигранника плоскостью, проходящей через точки D, Q и S, равна $\frac{2299}{480}$, $|AB| = \sqrt{2}$, $|PQ| = 1$. Найдите расстояние между основаниями десятигранника. В ответ запишите найденное значение, при необходимости округлив его.

Ответ: $1,41$. (Точное значение $\sqrt{2}$ ($m = \sqrt{2}$, $k = 1/2$).)

9. Десятигранник $ABCDPQRSTUVW$ имеет два параллельных друг другу основания: квадрат $ABCD$ и восьмиугольник $PQRSTUVW$, все углы которого равны между собой, а также восемь боковых граней: треугольники APQ, BRS, CTU, DVW и прямоугольники $DAPW$, $ABRQ$, $BCTS$ и $CDVU$. Известно, что площадь сечения десятигранника плоскостью, проходящей через точки A, S и U, равна $\frac{1372}{585}$, $|AB| = 1/3$, $|PQ| = 2\sqrt{2}/3$. Найдите расстояние между основаниями десятигранника. В ответ запишите найденное значение, при необходимости округлив его.

Ответ: $2,65$. (Точное значение $\sqrt{7}$ ($m = 1/3$, $k = 2$).)

10. Десятигранник $ABCDPQRSTUVW$ имеет два параллельных друг другу основания: квадрат $ABCD$ и восьмиугольник $PQRSTUVW$, все углы которого равны между собой, а также восемь боковых граней: треугольники APQ, BRS, CTU, DVW и прямоугольники $DAPW$, $ABRQ$, $BCTS$ и $CDVU$. Известно, что площадь сечения десятигранника плоскостью, проходящей через точки B, U и W, равна $\frac{2744}{2925}$, $|AB| = 1/9$, $|PQ| = 2\sqrt{2}/9$. Найдите расстояние между основаниями десятигранника. В ответ запишите найденное значение, при необходимости округлив его.

Ответ: $3,32$. (Точное значение $\sqrt{11}$ ($m = 1/9$, $k = 2$).)

11. Десятигранник $ABCDPQRSTUVW$ имеет два параллельных друг другу основания: квадрат $ABCD$ и восьмиугольник $PQRSTUVW$, все углы которого равны между собой, а также восемь боковых граней: треугольники APQ, BRS, CTU, DVW и прямоугольники $DAPW$, $ABRQ$, $BCTS$ и $CDVU$. Известно, что площадь сечения десятигранника плоскостью, проходящей через точки C, W и Q, равна $\frac{5488}{1755}$, $|AB| = 5/9$, $|PQ| = 10\sqrt{2}/9$. Найдите расстояние между основаниями десятигранника. В ответ запишите найденное значение, при необходимости округлив его.

Ответ: $1,73$. (Точное значение $\sqrt{3}$ ($m = 5/9$, $k = 2$).)

12. Десятигранник $ABCDPQRSTUVW$ имеет два параллельных друг другу основания: квадрат $ABCD$ и восьмиугольник $PQRSTUVW$, все углы которого равны между собой, а также восемь боковых граней: треугольники APQ, BRS, CTU, DVW и прямоугольники $DAPW$, $ABRQ$, $BCTS$ и $CDVU$. Известно, что площадь сечения десятигранника плоскостью, проходящей через точки D, Q и S, равна $\frac{7546}{585}$, $|AB| = 11/9$, $|PQ| = 22\sqrt{2}/9$. Найдите расстояние между основаниями десятигранника. В ответ запишите найденное значение, при необходимости округлив его.

Ответ: $2,83$. (Точное значение $\sqrt{8}$ ($m = 11/9$, $k = 2$).)

13. Десятигранник $ABCDPQRSTUVW$ имеет два параллельных друг другу основания: квадрат $ABCD$ и восьмиугольник $PQRSTUVW$, все углы которого равны между собой, а также восемь боковых граней: треугольники APQ, BRS, CTU, DVW и прямоугольники $DAPW$, $ABRQ$, $BCTS$ и

$CDVU$. Известно, что площадь сечения десятигранника плоскостью, проходящей через точки C, W и Q, равна $\frac{1001}{45}$, $|AB| = \sqrt{5}$, $|PQ| = \sqrt{10}$. Найдите расстояние между основаниями десятигранника. В ответ запишите найденное значение, при необходимости округлив его.

Ответ: 27, 71. (Точное значение $16\sqrt{3}$ ($m = \sqrt{5}$, $k = 1$).)

14. Десятигранник $ABCDPQRSTUVW$ имеет два параллельных друг другу основания: квадрат $ABCD$ и восьмиугольник $PQRSTUVW$, все углы которого равны между собой, а также восемь боковых граней: треугольники APQ, BRS, CTU, DVW и прямоугольники $DAPW$, $ABRQ$, $BCTS$ и $CDVU$. Известно, что площадь сечения десятигранника плоскостью, проходящей через точки B, U и W, равна $\frac{3553}{2880}$, $|AB| = 1/3$, $|PQ| = \sqrt{2}/6$. Найдите расстояние между основаниями десятигранника.

Ответ: 2, 65. (Точное значение $\sqrt{7}$ ($m = 1/3$, $k = 1/2$).

V. Найдите непостоянную функцию $f(x)$, о которой известно:

1. Для всех значений x, y выполнено равенство:

$$f(f(x)y + g(x)) = g(x) \cdot f(y) + f(x),$$

   где $g(x)$ заданная функция;

2. Уравнение $f(t) = -t$ имеет единственное решение;

3. Справедливо неравенство $|f(-1) + 1| < b$.

В ответ запишите значение функции $f(x)$ в точке 36, 25, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если такая функция не существует, то в ответе запишите 0. Известно, что $b = 17$ и

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-b-1; b+1]; \\ \cos(\pi x), & |x| > b+1. \end{cases}$$

Решение. Найдём некоторые значения функции при помощи подстановки целых чисел

- Подставим $y = 0$, $x = 1$. Получим $f(0) = 0$.
- Подставим $x = y = -1$, получим $f(-f(-1) - 1) = 0$.

Рассмотрим два, случая:

A. $-f(-1) - 1 = 0 \iff f(-1) = -1$.

Тогда подставив в первое условие $y = -1$, получим $f(-f(x) + g(x)) = -g(x) + f(x)$. Тогда из второго условия определения функции $f(x)$ следует, что $f(x) = g(x)$.

B. $-f(-1) - 1 = c \neq 0$, $|c| < b$.

Тогда в этом случае $f(c) = 0$ для некоторого $c \neq 0$. Подставим в первое условие $x = c$, поскольку $g(c) = c$ получим $f(y) = 0$, т.е. $f(y) = 0$.

То есть имеем 2 решения: l) $f(x) = g(x)$ и 2) $f(x) = 0$. Поскольку функция $f(x)$, по условию, была непостоянна, то $f(x) = g(x)$. Откуда подставив в первое условие $y = 0$ получаем

$$f(g(x)) = f(x).$$

При $|x| > b$ получаем равенство

$$\cos(\pi \cos(\pi x)) = \cos(\pi x).$$

Но, данное равенство при $x = 1/2 + 2\pi n$, где $n > b$ приводит к неверному тождеству $1 = 0$. Следовательно, непостоянных функций $f(x)$, удовлетворяющих условию задачи не существует.

Ответ: 0.

$\square$

5.1. В ответ запишите значение функции $f(x)$ в точке $36,25$, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если такая функция не существует, то в ответе запишите 0. Известно, что $b = 17$ и

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-b-1; b+1]; \\ \cos(\pi x), & |x| > b+1. \end{cases}$$

Ответ: 0.

5.2. В ответ запишите значение функции $f(x)$ в точке $36\frac{1}{6}$, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если такая функция не существует, то в ответе запишите 0. Известно, что $b = 15$ и

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-b-1; b+1]; \\ \cos(\pi x), & |x| > b+1. \end{cases}$$

Ответ: 0.

5.3. В ответ запишите значение функции $f(x)$ в точке $40\frac{1}{3}$, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если такая функция не существует, то в ответе запишите 0. Известно, что $b = 13$ и

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-b-1; b+1]; \\ \cos(\pi x), & |x| > b+1. \end{cases}$$

Ответ: 0.

5.4. В ответ запишите значение функции $f(x)$ в точке $48\frac{5}{6}$, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если такая функция не существует, то в ответе запишите 0. Известно, что $b = 28$ и

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-b-1; b+1]; \\ \cos(\pi x), & |x| > b+1. \end{cases}$$

Ответ: 0.

5.5. В ответ запишите значение функции $f(x)$ в точке $52\frac{2}{3}$, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если такая функция не существует, то в ответе запишите 0. Известно, что $b = 35$ и

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-b-1; b+1]; \\ \cos(\pi x), & |x| > b+1. \end{cases}$$

Ответ: 0.

5.6. В ответ запишите значение функции $f(x)$ в точке $132,25$, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если такая функция не существует, то в ответе запишите 0. Известно, что $b = 29$ и

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-b-1; b+1]; \\ \sin(\pi x), & |x| > b+1. \end{cases}$$

Ответ: 0.

5.7. В ответ запишите значение функции $f(x)$ в точке $56\frac{1}{6}$, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если такая функция не существует, то в ответе запишите 0. Известно, что $b = 32$ и

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-b-1; b+1]; \\ \sin(\pi x), & |x| > b+1. \end{cases}$$

Ответ: 0.

5.8. В ответ запишите значение функции $f(x)$ в точке $160\frac{1}{3}$, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если такая функция не существует, то в ответе запишите 0. Известно, что $b = 52$ и

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-b-1; b+1]; \\ \sin(\pi x), & |x| > b+1. \end{cases}$$

Ответ: 0.

5.9. В ответ запишите значение функции $f(x)$ в точке $57\frac{1}{6}$, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если такая функция не существует, то в ответе запишите 0. Известно, что $b = 43$ и

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-b-1; b+1]; \\ \sin(\pi x), & |x| > b+1. \end{cases}$$

Ответ: 0.

5.10. В ответ запишите значение функции $f(x)$ в точке $161\frac{1}{3}$, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если такая функция не существует, то в ответе запишите 0. Известно, что $b = 19$ и

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-b-1; b+1]; \\ \sin(\pi x), & |x| > b+1. \end{cases}$$

Ответ: 0.

5.11. В ответ запишите значение функции $f(x)$ в точке $102,1$, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если такая функция не существует, то в ответе запишите 0. Известно, что $b = 99$ и

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-b-1; b+1]; \\ (x-1)^2, & |x| > b+1. \end{cases}$$

Ответ: 0.

5.12. В ответ запишите значение функции $f(x)$ в точке $103,2$, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если такая функция не существует, то в ответе запишите 0. Известно, что $b = 59$ и

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-b-1; b+1]; \\ (x-1)^2, & |x| > b+1. \end{cases}$$

Ответ: 0.

5.13. В ответ запишите значение функции $f(x)$ в точке $202,1$, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если такая функция не существует, то в ответе запишите 0. Известно, что $b = 78$ и

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-b-1; b+1]; \\ (x-1)^2, & |x| > b+1. \end{cases}$$

Ответ: 0.

5.14. В ответ запишите значение функции $f(x)$ в точке $203,2$, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если такая функция не существует, то в ответе запишите 0. Известно, что $b = 63$ и

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-b-1; b+1]; \\ (x-1)^2, & |x| > b+1. \end{cases}$$

Ответ: 0.

5.15. В ответ запишите значение функции $f(x)$ в точке $102,1$, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если такая функция не существует, то в ответе запишите 0. Известно, что $b = 29$ и

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-b-1; b+1]; \\ \ln(x+1), & |x| > b+1. \end{cases}$$

Ответ: 0.

5.16. В ответ запишите значение функции $f(x)$ в точке $108,2$, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если такая функция не существует, то в ответе запишите 0. Известно, что $b = 27$ и

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-b-1; b+1]; \\ \ln(x+1), & |x| > b+1. \end{cases}$$

Ответ: 0.

5.17. В ответ запишите значение функции $f(x)$ в точке $112,1$, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если такая функция не существует, то в ответе запишите 0. Известно, что $b = 33$ и

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-b-1; b+1]; \\ \ln(x+1), & |x| > b+1. \end{cases}$$

Ответ: 0.

5.18. В ответ запишите значение функции $f(x)$ в точке $128,2$, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если такая функция не существует, то в ответе запишите 0. Известно, что $b = 22$ и

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-b-1; b+1]; \\ \ln(x+1), & |x| > b+1. \end{cases}$$

Ответ: 0.

5.19. В ответ запишите значение функции $f(x)$ в точке $132,1$, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если такая функция не существует, то в ответе запишите 0. Известно, что $b = 7$ и

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-b-1; b+1]; \\ \ln(x+1), & |x| > b+1. \end{cases}$$

Ответ: 0.

5.20. В ответ запишите значение функции $f(x)$ в точке $158,2$, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если такая функция не существует, то в ответе запишите 0. Известно, что $b = 2$ и

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-b-1; b+1]; \\ \ln(x+1), & |x| > b+1. \end{cases}$$

Ответ: 0.

5.21. В ответ запишите значение функции $f(x)$ в точке $8,1$, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если такая функция не существует, то в ответе запишите 0. Известно, что $b = 6$ и

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-b-1; b+1]; \\ e^x, & |x| > b+1. \end{cases}$$

Ответ: 0.

5.22. В ответ запишите значение функции $f(x)$ в точке $5,2$, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если такая функция не существует, то в ответе запишите 0. Известно, что $b = 3$ и

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-b-1; b+1]; \\ e^x, & |x| > b+1. \end{cases}$$

Ответ: 0.

5.23. В ответ запишите значение функции $f(x)$ в точке $6,3$, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если такая функция не существует, то в ответе запишите 0. Известно, что $b = 3$ и

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-b-1; b+1]; \\ e^x, & |x| > b+1. \end{cases}$$

Ответ: 0.

5.24. В ответ запишите значение функции $f(x)$ в точке $6,9$, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если такая функция не существует, то в ответе запишите 0. Известно, что $b = 3$ и

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-b-1; b+1]; \\ e^x, & |x| > b+1. \end{cases}$$

Ответ: 0.

5.25. В ответ запишите значение функции $f(x)$ в точке $6,5$, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если такая функция не существует, то в ответе запишите 0. Известно, что $b = 4$ и

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-b-1; b+1]; \\ e^x, & |x| > b+1. \end{cases}$$

Ответ: 0.