Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Задания Олимпиады школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Физика

Задания отборочного этапа олимпиады школьников «Покори Воробьёвы горы!» по физике

2015-2016 учебный год

7 – 9 классы

Часть I

Эта часть представляла собой индивидуальное для каждого участника задание (причем все варианты были равнозначны) из задач «среднего» уровня сложности, с оценкой до 25 баллов. Ниже приводится в качестве примера разбор одного из вариантов.

Вопрос 1 *(5 баллов)*

В теплоизолированном сосуде длительное время находилась вода с плавающим в ней куском льда при нормальном атмосферном давлении. Масса льда равнялась 140 г. В сосуд добавили 96 г кипящей (при том же давлении) воды. Какая температура установится в сосуде спустя достаточно большое время? Ответ дайте в градусах Цельсия, при необходимости округлив до ближайшего целого значения. Удельную теплоемкость воды и удельную теплоту плавления льда считать равными $c = 4{,}2$ кДж/(кг·К), $\lambda = 334$кДж/кг.

Решение: При нормальном атмосферном давлении температура, при которой находятся в равновесии вода и лед – это $t_0 = 0°C$, а температура кипящей воды $t_1 = 100°C$. Даже остыв до $t_0 = 0°C$, кипящая вода может выделить количество теплоты $Q_1 = cm(t_1 - t_0) = 4{,}2 \cdot 0{,}096 \cdot 100$ кДж $\approx 40{,}32$ кДж. Этого количества тепла не хватит, чтобы растопить весь лед (на это нужно $Q_2 = \lambda m_Л = 334 \cdot 0{,}14$ кДж $\approx 46{,}76$ кДж). Таким образом, в конечном состоянии в сосуде тоже будут находиться вода со льдом, и конечная температура равна начальной: $t = t_0 = 0°C$.

Ответ: 0.

Вопрос 2 *(10 баллов)*

Шайба, скользящая без вращения по горизонтальной поверхности, за первую секунду движения прошла путь 5,6 м, а по окончании четвертой секунды остановилась. Найти путь, пройденный шайбой за четвертую секунду. Ответ запишите в сантиметрах, при необходимости округлив до ближайшего целого значения.

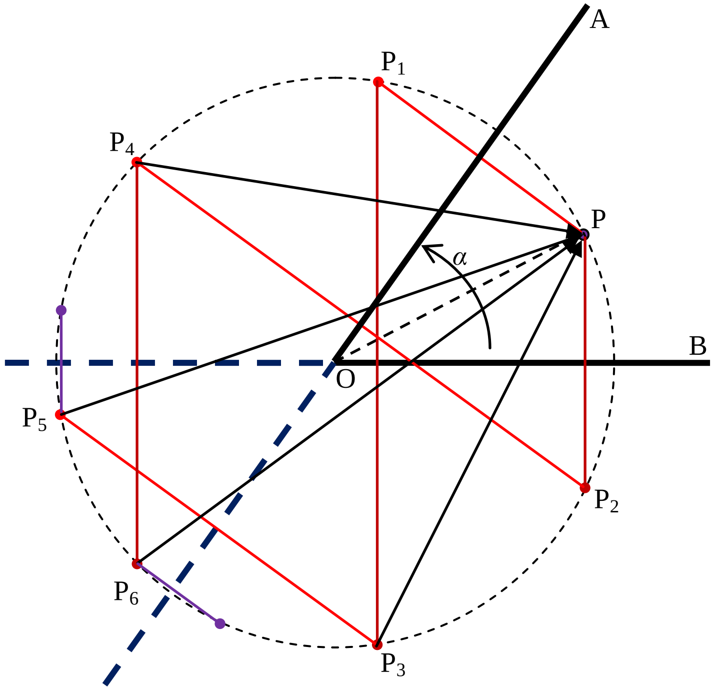
Решение: В описанных условиях шайба до остановки двигалась под действием силы трения скольжения с постоянным ускорением, направленным против начальной скорости. Пусть начальная скорость шайбы равна v_0, величина ускорения – a, а $\tau \equiv 1$с. Тогда, поскольку шайба остановилась после 4-й секунды, то $v_0 = 4a\tau$. Тогда путь, пройденный за первую секунду, $s_1 = v_0\tau - \frac{a\tau^2}{2} = \frac{7a\tau^2}{2}$. Путь за четвертую секунду можно найти как разность путей за 4 с и за 3 с: $s_4 = v_0 4\tau - \frac{a(4\tau)^2}{2} - \left(v_0 3\tau - \frac{a(3\tau)^2}{2}\right) = \frac{a\tau^2}{2}$ (впрочем, если учесть обратимость движения, то можно сразу понять, что путь за четвертую секунду равен пути за 1 секунду тела, которое стартует из состояния покоя с ускорением a, и получить тот же результат). Сравнивая полученные выражения, находим, что $s_4 = \frac{1}{7}s_1 = 0{,}8$ м.

Ответ: 80.

Вопрос 3 *(10 баллов)*

Две зеркальные стены образуют двугранный угол величиной 54º. В точке P на биссектрисе этого угла стоит человек и оглядывается по сторонам (см. рисунок). Сколько своих изображений он видит?

Решение: Эту задачу проще всего решать построением. Изображение светящейся точки в плоском зеркале (точка, от которой идут отраженные от зеркала лучи) расположено за плоскостью зеркала на таком же расстоянии от нее, что и сама светящаяся точка (это и называют «зеркально симметричное» положение). Заметим, что светящаяся точка и е изображение в любой из граней двугранного угла расположены на одинаковом расстоянии от вершины этого угла (см. рисунок, на котором выполнено построение для одного из вариантов – в котором угол $\alpha = 54°$, грани зеркального двугранного угла обозначены A и B). Поэтому удобно провести окружность, проходящую через точку положения человека (P), и тогда изображение любой точки в любом из двух зеркал всегда есть пересечение перпендикуляра, опущенного на это зеркало из этой точки, и окружности.



Сначала строим изображение P в зеркалах A (это P_1) и B (P_2), затем изображение P_1 в зеркале B (P_3) и P_2 в зеркале A (P_4). Вторая пара изображений появляется благодаря лучам, которые испытывают, прежде чем вернуться в точку P, два отражения – сначала от одного зеркала, затем от другого. Но есть еще лучи, испытывающие по три отражения, и благодаря им появляется еще одна пара изображений (P_5 и P_6). А вот еще одна пара изображений не появится – нетрудно заметить, что если построить четвертую пару изображений, то лучи от них не смогут попасть в точку P: например, линия от изображения P_5 в зеркале B, идущая к точке P, не пересекает зеркало B (то есть отраженного от зеркала B луча, выходящего из P_5 и попадающего в P, не существует). Можно также в дополнение заметить, что P_5 и P_6 оказались «позади» того зеркала, в котором они должны были бы отразится в следующий раз (например, P_5 – «позади» зеркала B), и из этого тоже можно сделать вывод, что новых изображений не будет.

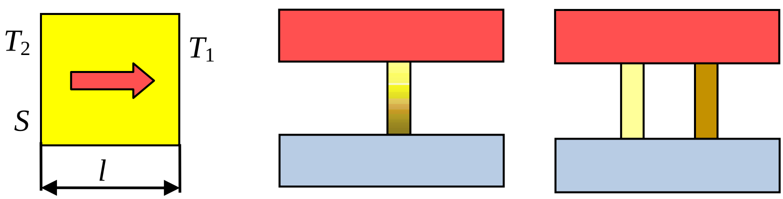
Таким образом, всего человек увидит 6 своих изображений.

Ответ: 6.

Максимальный балл за часть I: 30 баллов.

Часть II

1. «**Тепловые резисторы**» *(15 баллов)*. Как известно, одним из способов теплообмена является *теплопроводность*. В этом механизме теплота передается благодаря межмолекулярным взаимодействиям от более горячих областей тел к более холодным. Количество теплоты δQ, протекающее за время δt через объем вещества с площадью поперечного сечения S, прямо



пропорционально разности температур $\Delta T = T_2 - T_1$ и обратно пропорционально расстоянию l (см. рисунок слева): $\delta Q = \kappa \cdot \dfrac{S\,\Delta T}{l}\delta t$. Коэффициент пропорциональности κ зависит от вещества и называется *коэффициентом теплопроводности*. Допустим, что у нас есть 100 разных веществ, коэффициенты теплопроводности которых отличаются друг от друга на 5% (у первого вещества это κ, у второго – $1{,}05\cdot\kappa$, у третьего – $(1{,}05)^2\cdot\kappa$ и так далее. Из одинаковых по высоте цилиндрических слоев всех этих веществ (одинакового сечения, по одному слою для каждого вещества) склеили цилиндр и вставили его между двумя параллельными поверхностями веществ, одно из которых горячее другого (центральный рисунок). Слои «клея» такие тонкие, что не влияют на теплопроводность. Второй раз между этими поверхностями при той же разности их температур вставили два цилиндра такого же сечения и длины, один из которых целиком изготовлен из первого вещества, а второй – из сотого (правый рисунок). Во сколько раз переданное за секунду тепло во втором случае больше, чем в первом (разность температур поддерживается неизменной в течении достаточно долгого времени). Объем между поверхностями вакуумирован, излучением можно пренебречь.

Примечание: Вы легко можете доказать, а потом использовать алгебраическое тождество: $1-q^N=(1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^{N-1})$.

Решение:

Рассмотрим сначала поток через «слоистый» цилиндр. В установившемся режиме поток тепла ($\frac{\delta Q_1}{\delta t}$) одинаков для всех слоев. Пусть δT_n - изменение температуры в n-ом слое с коэффициентом теплопроводности $\kappa_n=\kappa\cdot(1{,}05)^{n-1}$. Из сообщенного в условии *закона Фурье* следует, что $\delta T_n=\frac{\delta l}{S\kappa_n}\cdot\frac{\delta Q_1}{\delta t}$ (где $\delta l=\frac{l}{N}$ - толщина слоя). Суммируя все эти изменения от первого до последнего (N-го) слоя, получим полную разность температур между поверхностями: $\Delta T=\frac{l}{S\kappa N}\cdot\frac{\delta Q_1}{\delta t}\left[1+\left(\frac{1}{1{,}05}\right)+\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{N-1}\right]$. С учетом алгебраического тождества, которое упоминалось в примечании, сумма в скобке равна

$\left[1-\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^N\right] \Big/ \left[1-\left(\frac{1}{1{,}05}\right)\right]=21\left[1-\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^N\right]$. Следовательно, с учетом того, что $N=100$:

$$\frac{\delta Q_1}{\delta t}=\frac{S\kappa\,\Delta T}{l}\frac{100}{21}\left[1-\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{100}\right]^{-1}\approx 4{,}7257\cdot\frac{S\kappa\,\Delta T}{l}.$$

Во втором случае общий поток есть сумма потоков через два цилиндра:

$$\frac{\delta Q_2}{\delta t}=\frac{S\kappa_1\,\Delta T}{l}+\frac{S\kappa_{100}\,\Delta T}{l}=\frac{S\kappa\,\Delta T}{l}[1+(1{,}05)^{99}]\approx$$
$$\approx\quad 126{,}2393\cdot\frac{S\kappa\,\Delta T}{l}.$$

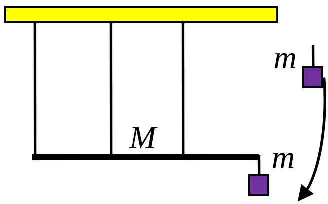
В результате получаем, что во втором случае за секунду действительно передается больше тепла, чем в первом, в $x=\frac{21}{100}[1+(1{,}05)^{99}]\left[1-\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{100}\right]\approx 26{,}7$ раза. Если в процессе вычислений пренебрегать 1 по сравнению с $(1{,}05)^{99}$ и $\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{100}$ по сравнению с 1, то ошибка будет не очень большой: $x\approx\frac{21}{100}(1{,}05)^{99}\approx 26{,}3$.

ОТВЕТ: в $x=\frac{21}{100}[1+(1{,}05)^{99}]\left[1-\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{100}\right]\approx 26{,}7$ раза.

Комментарий: Название задачи «тепловые резисторы» связано с тем, что можно усмотреть явную аналогию между законом Ферми для теплопроводности и законом Ома для электрического тока, согласно которому заряд δQ, протекающее за время δt через объем вещества длиной l с площадью поперечного сечения S, пропорционален напряжению (разности потенциалов):

$\delta Q = \dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{SU}{l} \delta t$. Здесь роль теплопроводности играет величина, обратная удельному сопротивлению ρ («удельная проводимость»), а роль разности температур – напряжение. Таким образом, наша задача аналогична задаче о последовательном и параллельном соединении резисторов: в первом случае у нас цепочка 100 последовательно соединенных резисторов, а во втором – два параллельно соединенных, и отношение токов равно обратному соотношению «сопротивлений».

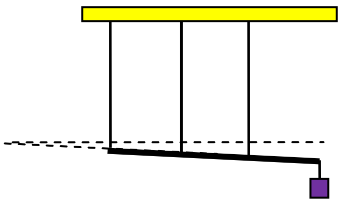
2. «**Тройной подвес**» *(20 баллов)*. Однородный стержень массой $M = 1$кг подвешен на трех одинаковых длинных легких практически нерастяжимых нитях таким образом, что все три нити вертикальны. При этом одна из нитей прикреплена к «левому» концу стержня, другая – к точке, расположенной на расстоянии, равном трети длины стержня от этого конца, а третья – на таком же расстоянии от второй (см. рисунок). К выступающему «правому» концу стержня прикреплен небольшой по размеру груз массой $m = 110$г. Как и на сколько изменится сила натяжения «средней» нити, если к грузу подвесить еще один, точно такой же?



Решение:

На стержень действуют силы натяжения нитей $T_{1,2,3}$, сила тяжести (приложенная к его середине, так как стержень однородный) и вес груза. Условия равновесия стержня – это условие равенства нулю суммы действующих на него сил, то есть $T_1 + T_2 + T_3 = (M + m)g$, и условие равенства нулю суммы моментов этих сил (например, относительно левого конца стержня): $T_2 \dfrac{l}{3} + T_3 \dfrac{2l}{3} = Mg \dfrac{l}{2} + mgl \Rightarrow T_2 + 2T_3 = \dfrac{3}{2} Mg + 3mg$.

Этих уравнений не хватает для однозначного определения сил натяжения нитей. Если дополнительно *предположить*, что все три нити натянуты, то можно получить еще одно уравнение. Силы упругости нитей пропорциональны их деформациям, которые малы, но все же отличны от нуля. Естественно считать, что деформации стержня и потолка еще во много раз меньше, и поэтому деформации нитей – это отрезки трех параллельных прямых между сторонами одного угла. Так как вторая нить находится точно посередине между первой и третьей, то ее



деформация есть точно полусумма деформаций этих нитей, или $2x_2 = x_1 + x_3$ (см. рисунок, на котором для наглядности деформации показаны увеличенными). Нити по условию одинаковы, поэтому коэффициенты жесткости у них также одинаковы, и поэтому $2T_2 = T_1 + T_3$. Из этого уравнения и условия равновесия сил сразу получается, что $3T_2 = (M + m)g$. Таким образом, <u>если</u> все три нити натянуты, то $T_2 = \dfrac{M+m}{3} g \approx 3{,}7$ Н (если считать, что $g \approx 10$ м/с^2). Проверим выполнение предположения: из правила моментов следует, что $T_3 = \dfrac{3}{4}Mg + \dfrac{3}{2}mg - \dfrac{1}{2}T_2 = \dfrac{7}{12}Mg + \dfrac{4}{3}mg$, и поэтому при любых массах стержнях и груза третья нить натянута ($T_3 > 0$). Сила натяжения первой нити $T_1 = (M + m)g - T_2 - T_3$, то есть $T_1 = \dfrac{M - 8m}{12} g$. Значит, первая нить натянута при $m < \dfrac{M}{8}$, и это условие выполняется в случае подвешивания одного груза. После подвешивания второго груза в этих формулах нужно заменить $m \to 2m$, но при этом оказывается, что полученными формулами пользоваться нельзя, так как $2m > \frac{M}{8}$! Таким образом, после подвешивания второго груза первая нить провисает ($T_1 = 0$), и теперь

$$\begin{cases} T_2 + T_3 = (M + 2m)g \\ T_2 + 2T_3 = \frac{3}{2}Mg + 6mg \end{cases} \Rightarrow T_2 = \frac{M - 4m}{2} g \approx 2{,}8\,\text{Н}.$$

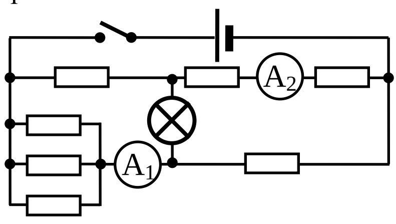
Как видно, в результате подвешивания второго груза сила натяжения «средней» нити уменьшится на

$$\Delta T_2 = \frac{M + m}{3} g - \frac{M - 4m}{2} g = \frac{14m - M}{6} g \approx 0{,}9\,\text{Н}.$$

ОТВЕТ: сила натяжения «средней» нити уменьшится на

$$\Delta T_2 = \frac{14m - M}{6} g \approx 0{,}9\,\text{Н}.$$

3. «**А лампа-то горит!**» *(15 баллов)*. Однажды некий ученик 8 класса нашел в школьной лаборатории коробку с семью одинаковыми резисторами, на которых не была обозначена величина сопротивления. Из этих резисторов и найденных в том же шкафу ключа, двух амперметров, батареи и лампочки он собрал установку по схеме, показанной на рисунке. После замыкания ключа лампочка загорелась. При этом первый амперметр (A_1) показал, что через него течет ток $I_1 = 1{,}8$ А. Какую величину силы тока показывал второй амперметр? Амперметры считать идеальными.



Решение:

Прежде всего заметим, что, если неизвестное сопротивление каждого из резисторов обозначить R, то сопротивление в ветви с первым амперметром равно $\frac{R}{3}$, а в ветви со вторым амперметром –

$2R$. Обозначим символом I_1' величину тока в ветви, параллельной первому амперметру, I_2 - величину силы тока через второй амперметр, I_2' - через резистор, подключенный параллельно второму амперметру. Тогда напряжение, создаваемое источником на концах цепи, можно записать двумя способами:

$$U = RI_1' + 2RI_2 = \frac{R}{3} I_1 + RI_2'.$$

Также двумя способами можно вычислить и ток в ветви с источником:

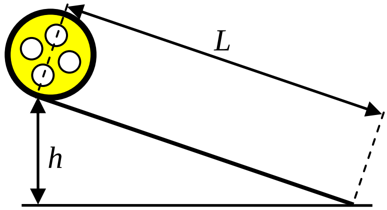
$$I = I_1' + I_1 = I_2 + I_2'.$$

Если второе равенство умножить на R и вычесть из первого, то получится уравнение связи I_1 и I_2:

$$2RI_2 - RI_1 = \frac{R}{3} I_1 - RI_2 \Rightarrow I_2 = \frac{4}{9} I_1 = 0{,}8 \text{ А}.$$

ОТВЕТ: второй амперметр показывает ток $I_2 = \frac{4}{9} I_1 = 0{,}8$ А.

4. «**Покатушки**» *(25 баллов)***.** Известно, что при поступательном движении кинетическая энергия тела массы m равна $E_{пост} = \frac{mv^2}{2}$ (где v – скорость тела, одинаковая для всех его точек). В общем случае движение твердого тела (то есть такого, деформациями которого в процессе движения мы пренебрегаем) можно представить как комбинацию поступательного движения и вращения. Тогда и кинетическая энергия общего движения находится как сумма кинетических энергий поступательного движения и вращения. Рассмотрим колесо с достаточно сложным, но симметричным относительно оси колеса распределением масс,



скатывающееся по наклонной поверхности без проскальзывания так, что каждая его точка движется в одной вертикальной плоскости. При таком движении вращательная скорость каждой точки колеса связана с вращательной скоростью точек его внешнего обода (при вращении скорость точки,конечно же, пропорциональна радиусу ее вращения). А скорость вращения точек обода вокруг центра колеса равна скорости движения центра относительно поверхности. Поэтому вклад вращения в кинетическую энергию должен выражаться через массу колеса и скорость центра колеса. В таблице показаны результаты проведенных с высокой точностью измерений времени скатывания такого колеса по наклонной плоскости длиной $L = (100{,}0 \pm 0{,}1)$ см при разной высоте положения верхнего конца плоскости.

h, см $\pm$ 1 мм	10,0	15,0	20,0	25,0	30,0
t, с $\pm$ 0,01 с	1,85	1,52	1,32	1,18	1,09

На основании этих данных найдите для этого колеса отношение кинетических энергий вращения и поступательного движения во время скатывания: $\dfrac{E_{вращ}}{E_{пост}} = ?$ В ответе укажите точность, с которой Вы нашли эту величину. Силой сопротивления воздуха и трением качения можно пренебречь.

Решение:

В процессе соскальзывания или скатывания тела с наклонной плоскости его потенциальная энергия в поле тяжести Земли переходит в кинетическую энергию. При соскальзывании в отсутствие сил трения движение происходит равноускоренно, и при этом связь конечной скорости и начальной высоты определяется законом сохранения энергии:

$mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$. При скатывании колеса без проскальзывания, как следует из пояснений в условии, при каждой величине скорости определенная доля кинетической энергии приходится на энергию вращения. Пусть $\frac{E_{вращ}}{E_{пост}} \equiv z$. Тогда кинетическая энергия выражается через скорость движения центра колеса $E_K = (1+z)\frac{mv^2}{2}$, и в этом случае конечная скорость находится из аналогичного случаю соскальзывания соотношения: соотношения $mgh = (1+z)\frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2gh}{1+z}}$. Так как здесь квадрат скорости тоже растет пропорционально пройденному расстоянию, то и здесь движение будет равноускоренным, и средняя скорость скатывания равна половине конечной скорости, поэтому время скатывания $t = \frac{L}{v_{ср}} = \frac{L\sqrt{2(1+z)}}{\sqrt{gh}}$. Из этого соотношения можно определить z: $\frac{E_{вращ}}{E_{пост}} \equiv z = \frac{gt^2h}{2L^2} - 1$.

Вычислим эту величину для каждой из имеющихся «точек» экспериментальной зависимости $t(h)$.

h, см ± 1 мм	10,0	15,0	20,0	25,0	30,0
t, с ± 0,01 с	1,85	1,52	1,32	1,18	1,09
z	0,679	0,700	0,709	0,707	0,748

Как видно, эта величина с хорошей точностью остается постоянной (наибольшие отклонения наблюдаются по «краям» исследованного интервала – при малых и больших высотах). Среднее значение $z_{ср} \approx 0{,}71$, а разброс значений около $\Delta z \approx 0{,}03$ (то есть 4-5% от результата). Заметим, что точность измерений для всех величин была выше (лучше 1%), поэтому неточность определения z в основном связана с неточностью модели (возможно, проявилось влияние сил сопротивления воздуха или силы трения качения, или небольшого проскальзывания).

ОТВЕТ: $\dfrac{E_{вращ}}{E_{пост}} = 0{,}71 \pm 0{,}03$.

Задание заключительного этапа олимпиады школьников «Покори Воробьёвы горы!» по физике

2015-2016 учебный год

7 – 9 классы

Финальный тур проводился на нескольких площадках по равноценным, но различным заданиям. Приведен пример одного из вариантов финального заданий с разбором.

Задание 1

Вопрос: По дороге из школы ученик прошел половину пути со скоростью 4 км/ч, потом некоторое время постоял на месте (разговаривал с приятелем), а затем добежал до дома со скоростью 8 км/ч. Оказалось, что на разговор он потратил четверть всего времени пути. Какой была его средняя скорость на всем пути от школы до дома?

Задача: Два школьника почти весь урок бегали по школьному стадиону с постоянными по величине скоростями. Один пробегал круг за время $T = 2$ мин. При этом он каждые $t_1 = 3$ мин обгонял второго, который бежал медленнее. В середине урока второй, сразу после очередного обгона со стороны первого, развернулся и побежал по тому же кругу в другую сторону. Через какое время после этого они встретились?

Ответ на вопрос: Пусть полный путь школьника за общее время t равен s. Тогда $t=\frac{s}{2v_1}+\frac{t}{4}+\frac{s}{2v_2}$ поэтому средняя скорость $v_{ср}=\frac{s}{t}=\frac{3v_1v_2}{2(v_1+v_2)}=4$ км/ч. *Максимальная оценка: 7 баллов.*

Решение задачи: Пусть L – длина круга на стадионе, $v_{1,2}$ – скорости первого и второго школьников соответственно. Тогда $L=v_1T=(v_1-v_2)t_1$. Из этого соотношения находим, что $v_2=\frac{t_1-T}{t_1}v_1$. После разворота второго школьника до встречи школьникам вместе нужно пробежать путь L, то есть искомое время $t=\frac{L}{v_1+v_2}=\frac{t_1}{2t_1-T}\frac{L}{v_1}=\frac{t_1T}{2t_1-T}=1{,}5$ мин.

ОТВЕТ: $t=1{,}5$ мин. *Максимальная оценка: 18 баллов.*

Задание 2:

Вопрос: Если в морозную ночь положить на подставку ледяной брусок и перекинуть через него тонкую прочную проволоку, на концы которой подвесить два тяжелых груза, то через некоторое время можно обнаружить, что проволока частично прошла сквозь лед, и при этом лед над ней остался смерзшимся. Объясните это явление.

Задача: Пробирка объемом $V=80$ см^3 на четверть заполнена льдом с температурой $t_1=-18°C$. В нее медленно и аккуратно наливают воду с температурой $t_2=+18°C$. Какой максимальный объем воды можно налить в пробирку (до ее наполнения)? Теплоёмкостью пробирки можно пренебречь. Удельная теплоёмкость воды $c=4{,}2$ Дж/(г·К), удельная теплоемкость льда в два раза меньше ($c/2$), удельная теплота плавления льда $\lambda \approx 334$ Дж/г. Плотность льда $\rho_Л = 0{,}9$ г/см^3 меньше плотности воды $\rho_B = 1{,}0$ г/см^3.

Ответ на вопрос: Вес грузов натягивает проволоку и она создает значительное давление на поверхность льда. При боле высоком давлении температура плавления льда ниже, чем при атмосферном давлении, поэтому, несмотря на мороз, лед под проволокой тает, и проволока опускается вниз, выдавливая воду наверх, где вода при обычном давлении вновь замерзает. *Максимальная оценка: 7 баллов.*

Решение задачи: При доливании теплой воды лед нагревается до температуры $t_0 = 0°C$ и тает. При этом, поскольку $\rho_Л < \rho_B$, объем образовавшейся воды меньше, чем объем льда. К моменту наполнения пробирки в состоянии равновесия температура ее содержимого (льда и воды) должна равняться $t_0 = 0°C$. Обозначим объем воды, долитой в пробирку до е заполнения, $V_x \equiv x \cdot V$, и пусть Δm – масса растаявшего в процессе доливания льда. Тогда, поскольку лед и вода занимают весь объем пробирки, $xV + \dfrac{\Delta m}{\rho_B} + \dfrac{V}{4} - \dfrac{\Delta m}{\rho_Л} = V$, откуда получаем, что $\Delta m = \dfrac{\rho_B \rho_Л V}{\rho_B - \rho_Л}\left(x - \dfrac{3}{4}\right)$. Теперь составим уравнение теплового баланса: лед нагрелся и часть его растаяла за счет теплоты остывания воды: $xV\rho_B c_B (t_2 - t_0) = \dfrac{1}{4} V \rho_Л c_Л (t_0 - t_1) + \Delta m \lambda$. Подставляя сюда выражение для Δm, получаем уравнение для x (учтем сразу, что $t_0 = 0°C$ и что $-t_1 = t_2$):

$$x\rho_B c_B t_2 = \frac{1}{4}\rho_Л c_Л t_2 + \lambda\frac{\rho_B\rho_Л}{\rho_B - \rho_Л}\left(x - \frac{3}{4}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\rho_Л}{4\rho_B}\frac{3\rho_B\lambda - (\rho_B - \rho_Л)c_Л t_2}{\rho_Л\lambda - (\rho_B - \rho_Л)c_B t_2} \approx 0{,}766.$$

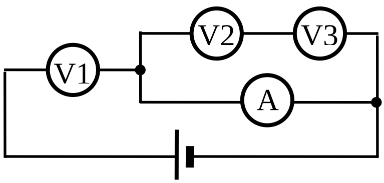
Поэтому $V_x = x \cdot V \approx 61{,}3\,\text{см}^3$.

ОТВЕТ: $V_x \approx 61{,}3\,\text{см}^3$. *Максимальная оценка: 18 баллов.*

Задание 3:

Вопрос: Напряжение на резисторе в схеме постоянного тока измеряется вольтметром. При подключении второго такого же вольтметра параллельно первому показания первого уменьшились.. О чем это свидетельствует?

Задача: Ученик обнаружил в лабораторном шкафу три одинаковых вольтметра, аккумулятор и амперметр и собрал из них



цепь по схеме, показанной на рисунке. Оказалось, что амперметр показывает величину силы тока $I = 160$ мА, напряжение, измеренное первым вольтметром, $U_1 = 15{,}8$ В, а второй и третий вольтметры показывают одинаковое напряжение $U_2 = U_3 = 0{,}04$ В. Определите сопротивления приборов.

Ответ на вопрос: Это свидетельствует о неидеальности вольтметров – если бы внутреннее сопротивление вольтметров было бесконечно велико, подключение второго вольтметра не изменило бы напряжение. При конечном внутреннем сопротивлении параллельное подключение еще одного вольтметра уменьшает общее сопротивление участка, и соответственно уменьшает напряжение на этом участке (в цепи постоянного тока при неизменных источниках доля общего напряжения, приходящаяся на каждый участок, пропорциональна его сопротивлению). *Максимальная оценка: 7 баллов.*

Решение задачи: Сумма напряжений на втором и третьем вольтметрах равна напряжению на амперметре, поэтому внутреннее сопротивление амперметра $R_A = \dfrac{U_2 + U_3}{I} = 0{,}5$ Ом. Так как вольтметры одинаковы, то текущие через них токи пропорциональны напряжениям, и поэтому ток через второй вольтметр $I_2 = \dfrac{U_2}{U_1} I_1$ (где I_1 – ток через первый вольтметр). С другой стороны, $I_2 = I_1 - I$, откуда находим, что $I_1 = \dfrac{U_1}{U_1 - U_2} I$. Значит, внутреннее сопротивление вольтметра $R_V = \dfrac{U_1}{I_1} = \dfrac{U_1 - U_2}{I} = 98{,}5$ Ом.

ОТВЕТ: $R_A = \dfrac{U_2 + U_3}{I} = 0{,}5$ Ом, $R_V = \dfrac{U_1 - U_2}{I} = 98{,}5$ Ом.

Максимальная оценка: 18 баллов.

Задание 4:

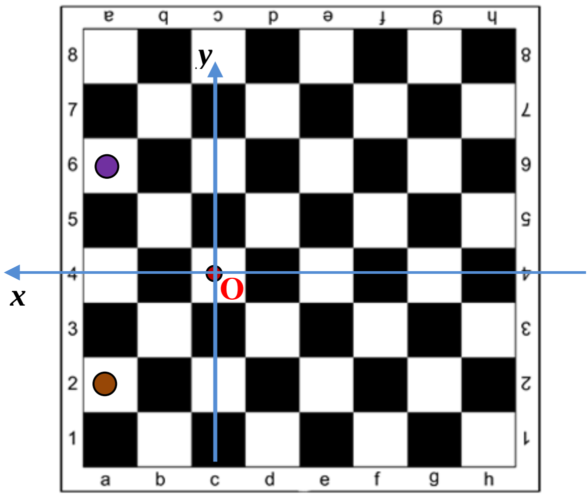
Вопрос: Если сесть на стул, держа спину ровно вдоль спинки, и попытаться плавно встать, не наклоняя верхнюю часть туловища вперед, то это сделать не удается. По какой причине? Ответ обосновать.

Задача: Цельную однородную шахматную доску массой $M = 200$ г поставили горизонтально на вертикальный тонкий стержень так, чтобы стержень упирался в доску под серединой клетки C4. На клетке A2 стоит король массой $m_1 = 100$ г.

Определить, на какую клетку надо поставить пешку массой $m_2 = 50$ г, чтобы доска находилась в равновесии.

Ответ на вопрос: Чтобы встать со стула, нужно сначала «разгрузить» его, то есть перестать взаимодействовать с сиденьем. При этом человек опирался бы только на пол, и момент силы взаимодействия его с полом относительно точки опоры был бы близок к нулю. Если при этом не нагибать туловище вперед, то линия действия результирующей сил тяжести (вертикальная прямая, проходящая через центр масс) явно проходила бы через сиденье стула, и момент сил тяжести «усаживал» бы человека обратно на стул. *Максимальная оценка: 7 баллов.*

Решение задачи: Доска может вращаться вокруг разных горизонтальных осей, проходящих через точку опоры О. Поэтому для ее равновесия необходимо потребовать выполнения правила моментов относительно двух таких осей. Пусть длина стороны



клетки доски равна a, а x и y – расстояния от точки опоры О до пешки по “горизонтали” и “вертикали” соответственно. Центр масс доски, как видно из рисунка, располагается от точки опоры на расстояниях $1{,}5a$ по “горизонтали” и $0{,}5a$ по “вертикали”.

Значит, уравнение моментов сил относительно оси x имеет вид: $m_1 g \cdot 2a = Mg \cdot 0{,}5a + m_2 g \cdot y$, откуда $y = \dfrac{4m_1 - M}{2m_2} a = +2a$. Уравнение моментов сил относительно оси y $m_1 g \cdot 2a + m_2 g \cdot x = Mg \cdot 1{,}5a \Rightarrow x = \dfrac{3M - 4m_1}{2m_2} a = +2a$.

Значит, пешку надо поставить на поле А6.

ОТВЕТ: пешку надо поставить на поле А6. *Максимальная оценка: 18 баллов.*

Задания отборочного этапа олимпиады школьников «Покори Воробьёвы горы!» по физике

2015-2016 учебный год

10 – 11 классы

Часть I

Первая часть представляла собой индивидуальное для каждого участника тестовое задание (причем все варианты тестового задания были равнозначны). Ниже приводится в качестве примера разбор одного из вариантов.

Вопрос 1 *(7 баллов)*

Шайба, скользящая без вращения по горизонтальной поверхности, за первую секунду движения прошла путь 4,2 м, а за вторую секунду – 2,9 м в том же направлении. Какой путь она пройдет за третью секунду (препятствий на ее пути нет)? Ответ запишите в сантиметрах, при необходимости округлив до целого значения.

Решение: В указанных условиях шайба движется с постоянным ускорением, создаваемым силой трения скольжения. Обозначим модуль ускорения a, а начальную скорость шайбы v_0, запишем: путь за первую секунду $s_1 = v_0\tau - \frac{a}{2}\tau^2$, путь за вторую секунду $s_2 = v_0 2\tau - \frac{a}{2}(2\tau)^2 - v_0\tau + \frac{a}{2}\tau^2 = v_0\tau - \frac{3a}{2}\tau^2$ (время $\tau \equiv 1$ с). Скорость в конце третьей секунды $v_3 = v_0 - 3a\tau = \frac{5s_2 - 3s_1}{2\tau} > 0$, поэтому на третьей секунде шайба продолжала движение в том же направлении. Значит, путь за третью секунду

$$s_3 = v_0 3\tau - \frac{a}{2}(3\tau)^2 - v_0 2\tau + \frac{a}{2}(2\tau)^2 = 2s_2 - s_1 = 1{,}6 \text{ м}.$$

Таким образом, $s_3 = 160$ см, и округление не требуется.

Ответ: 160.

Вопрос 2 *(10 баллов)*

Один моль гелия участвует в процессе, уравнение которого в координатах «температура-объем» имеет вид $T = T_0 \cdot \left[3 + \left(\frac{V}{V_0}\right)^2\right]$, причем $T_0 = 228$К, $V_0 = 50$л, и объем в этом процессе изменяется от $V_1 = 40$л до $V_2 = 120$л. Найти минимальное давление гелия в этом процессе. Значение универсальной газовой постоянной принять равным $R \approx 8{,}31$Дж/моль·К. Ответ запишите в килопаскалях, округлив до целого значения.

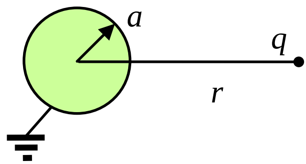
Решение: Используя уравнение Менделеева-Клапейрона, выразим давление гелия в ходе процесса как функцию объема: $p = \frac{RT}{V} = RT_0\left[\frac{3}{V} + \frac{V}{V_0^2}\right] = \sqrt{3}\,\frac{RT_0}{V_0} \cdot \left[\frac{\sqrt{3}V_0}{V} + \frac{V}{\sqrt{3}V_0}\right]$. Так как минимальное значение функции $f(x) = x + \frac{1}{x}$ равно 2 и достигается при $x = 1$, а значение $V = \sqrt{3}V_0 \approx 86{,}6$ л принадлежит заданному интервалу значений объема, то $p_{\min} = 2\sqrt{3}\,\frac{RT_0}{V_0} \approx 131267$ Па.

Ответ: 131.

Вопрос 3 *(8 баллов)*

Незаряженный металлический шар радиусом 20 см соединен тонким длинным проводом с «землей» (очень большим удаленным незаряженным проводящим телом). К этому шару поднесли маленький шарик с зарядом +42 мкКл, расположив его на расстоянии 1,2 м от центра шара. Найти индуцированный на шаре заряд. Ответ запишите в микрокулонах, округлив до целого значения и с учетом знака.

Решение: При поднесении заряда на шаре появится индуцированный заряд противоположного знака. Величина и распределение этого заряда по поверхности шара таковы, что потенциал всех точек шара одинаков и равен нулю (потенциалу «земли»).



Запишем условие равенства нулю центра шара: в соответствии с принципом суперпозиции, потенциал этой точки равен сумме потенциалов, создаваемых зарядом q и всеми зарядами δq_i, появившимися на каждом участке поверхности шара. С учетом того, что все индуцированные заряды находятся на одинаковом расстоянии от центра шара: $0 = \frac{q}{r} + \sum \frac{\delta q_i}{a} = \frac{q}{r} + \frac{q_i}{a}$.

Следовательно, полный индуцированный заряд $q_i = -\frac{a}{r} q = -7$ мкКл.

Ответ: - 7.

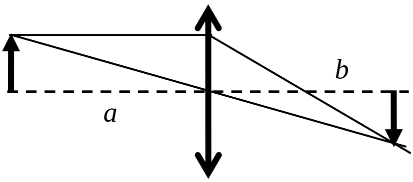
Максимальная оценка за тестовую часть – 25 баллов.

Часть II. *«ИЗОБРЕТЕНИЯ КОНСТРУКТОРА КЛАПАУЦИЯ»*.

Вторая часть была составлена из творческих задач высокого уровня сложности. Далее приводится разбор трех задач этой части.

1. «**Старинная лупа**» (15 баллов) Однажды Клапауций нашел у себя в кабинете старинную лупу – линзу большого диаметра, вставленную в оправу. Он взял лампочку с прямолинейной светящейся нитью длиной $L = 5{,}4$ мм, разместил ее так, что середина нити оказалась на главной оптической оси линзы, а сама нить была перпендикулярна этой оси. Конструктор разместил экран так, что на нем наблюдалось четкое изображение нити лампы и обнаружил, что размер изображения $L_1 = 1{,}8$ мм. Затем он повернул лампу так, что нить расположилась вдоль главной оптической оси линзы. Перемещая экран микрометрическим винтом, Клапауций аккуратно измерил длину нового изображения нити. Какой результат он получил? При всех измерениях расстояние от нити до линзы было более 60 см.

Решение: Изображение, наблюдаемое на экране – это действительное изображение, которое можно получить только с помощью собирающей линзы, если расстояние от объекта до линзы больше ее фокусного



расстояния (см. рисунок): $a > F$. Из построения для такого случая видно, что увеличение при поперечном расположении нити: $k = -\dfrac{L_1}{L} = -\dfrac{b}{a}$. С учетом формулы линзы находим, что $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{F} \Rightarrow b = \dfrac{aF}{a-F} \Rightarrow \dfrac{L_1}{L} = \dfrac{F}{a-F}$. Отметим, что заданные значения L и L_1 соответствуют $a = 4F$, причем, как следует из условия, это расстояние было значительно больше размера нити. Следовательно, при продольном расположении нить тоже была далека от линзы и от ее ближнего фокуса. Значит, можно получить выражение для увеличения нити непосредственно из формулы линзы:

$$\tilde{a} = a - L \Rightarrow L_2 = \tilde{b} - b = \frac{(a-L)F}{a-L-F} - \frac{aF}{a-F} = $$
$$= \frac{F^2}{(a-L-F)(a-F)} L \approx \left(\frac{F}{a-F}\right)^2 L.$$

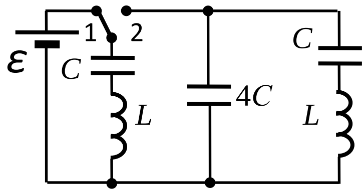
Таким образом,

$$L_2 = \left(\frac{L_1}{L}\right)^2 L = \frac{L_1^2}{L} = 0{,}6 \text{ мм.}$$

Можно оценить возможный разброс значений L_2, взяв результат для минимального допустимого значения $a = 60$ см: $L_2^{(\max)} \approx 0{,}607$ мм. Ясно, что точность определения размера при описанном способе измерений не позволит обнаружить такое различие.

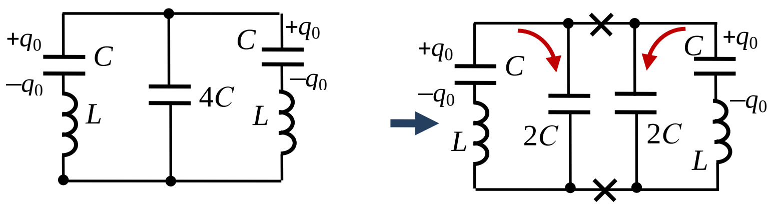
ОТВЕТ: $L_2 = \dfrac{L_1^2}{L} = 0{,}6$ мм.

2. Нарушенная симметрия» *(20 баллов)* В одном из своих изобретений Клапауций использовал симметричный «двойной» колебательный контур, схема которого вместе со схемой устройства для запуска колебаний показана на рисунке. При использовании контура ключ сначала переводится в положение 1, а затем электронное устройство переводит ключ в положение 2 в момент, когда заряд «левого» конденсатора достиг максимального значения. Найти закон изменения заряда на «правом» конденсаторе после этого момента времени. До начала использования все конденсаторы были разряжены. Сопротивлениями всех элементов схемы на рассматриваемых интервалах времени можно пренебречь, остальные их параметры показаны на рисунке.



Решение: Рассмотрим сначала процессы, протекающие в схеме после перевода ключа в положение 1. В контуре, содержащем источник, «левый» конденсатор и катушку, возникнут колебания. Так как сопротивления пренебрежимо малы, то эти колебания будут слабозатухающими (то есть практически гармоническими). Колебания заряда на конденсаторе будут происходить вокруг равновесного значения (очевидно соответствующего $q_0 = C\mathcal{E}$). Так как начальный ток равен нулю, то амплитуда этих колебаний равна величине начального отклонения заряда ($q = 0$) от равновесного, то есть q_0. Таким образом, максимальная величина заряда на «левом» конденсаторе в ходе этих колебаний примерно равна $2q_0$. В этот момент ток в катушке равен нулю (он равен нулю в моменты, когда заряд конденсатора проходит через максимум). После перевода ключа в положение 2 (далее момент $t=0$) начинаются колебания в «двойном» контуре. Начальные условия для этих колебаний таковы: токи в катушках равны нулю, «правый» и «средний» конденсаторы не заряжены, заряд «левого» конденсатора равен $2q_0$. Сама схема симметрична по отношению к замене «право-лево», но начальные условия нарушают эту симметрию. Рассмотрим два других процесса колебаний для других, более симметричных начальных условий:

А) «Правый» и «левый» конденсаторы заряжены одинаково. В этом случае удобно заменить «средний» конденсатор емкостью $4C$ на два параллельно соединенных конденсатора с емкостями по $2C$ каждый (см. рисунок):



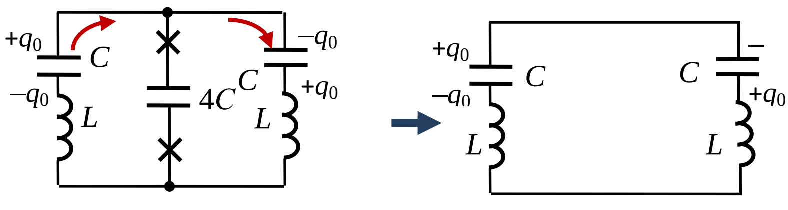
Ясно, что здесь «крайние» конденсаторы в силу полной симметрии будут синхронно заряжать «средние», и напряжения на «средних» в любой момент времени будут одинаковы. Это значит, что токи по соединяющим их проводам течь не будут, и поэтому их можно удалить без изменения токов в других элементах схемы. Таким образом, закон колебания заряда на «правом» конденсаторе для таких начальных условий совпадает с законом колебаний в одном «правом» контуре, составленном из последовательно соединенных конденсаторов C и $2C$ и катушки индуктивности L. С учетом направления движения зарядов будем считать, что полярности включения конденсаторов противоположны, и уравнение баланса напряжений в контуре $\frac{q_1}{C}-\frac{q_2}{2C}+L\frac{dI}{dt}=0$, где $I\equiv\frac{dq_1}{dt}$. С учетом закона сохранения заряда для пары соединенных обкладок двух конденсаторов $q_1+q_2=const=q_0$ получаем, что для любого момента времени $q_2=q_0-q_1$, и поэтому уравнение колебаний заряда конденсатора C имеет вид:

$$\frac{d^2q_1}{dt^2}+\frac{3}{2CL}q_1=\frac{q_0}{2CL}.$$

Как видно, заряд интересующего нас конденсатора совершает гармонические колебания с частотой $\omega_A=\sqrt{\frac{3}{2CL}}$ вокруг значения $\frac{q_0}{3}$ (подстановка $q_1(t)=\frac{q_0}{3}+\tilde{q}(t)$ приводит это уравнение к стандартному уравнению гармонических колебаний $\tilde{q}''+\omega_A^2\tilde{q}=0$). С учетом начальных условий ($q_1(0)=q_0$, $I(0)=0$) получаем:

$$q_1^{(A)}(t)=\frac{q_0}{3}+\frac{2q_0}{3}\cos(\omega_A t).$$

В) «Правый» и «левый» конденсаторы заряжены противоположно. Теперь токи в ветвях с этими конденсаторами противоположны, и поэтому в ветви со «средним» конденсатором



ток всегда равен нулю, и его можно убрать из схемы. Последовательно соединенные конденсаторы C оказываются в данном контуре эквивалентны одному конденсатору емкостью $\frac{C}{2}$, а две последовательно соединенные катушки L – одной с индуктивностью $2L$. В этом контуре возникают гармонические колебания с частотой $\omega_B = \dfrac{1}{\sqrt{CL}}$, а заряд «правого» конденсатора изменяется по закону $q_1^{(B)}(t) = -q_0\cos(\omega_B t)$.

Теперь можно заметить, что начальные условия для колебаний в нашем случае есть в точности сумма начальных условий для случаев (А) и (В). Значит,

$$q_{np}(t) = q_1^{(A)}(t) + q_1^{(B)}(t) = \frac{q_0}{3} + \frac{2q_0}{3}\cos(\omega_A t) - q_0\cos(\omega_B t).$$

ОТВЕТ: $q_{np}(t) = \dfrac{q_0}{3}\{1 + 2\cos(\omega_A t) - 3\cos(\omega_B t)\}$, где $q_0 = C\mathcal{E}$, $\omega_A = \sqrt{\dfrac{3}{2CL}}$, $\omega_B = \dfrac{1}{\sqrt{CL}}$.

3. «**Водный акселерометр**» *(15 баллов)*. Одним из первых изобретений Клапауция был детектор ускорения ракеты при равномерном разгоне в межзвездном пространстве. Детектор представлял собой узкую трубку длиной $l = 10$ м, заполненную водяным паром, относительная влажность которого в отсутствие ускорения равнялась $\phi_0 = 99{,}00$ %. Трубка располагалась вдоль оси ракеты и помещалась в термостат, поддерживающий постоянную температуру содержимого трубки $T = 360{,}00$ К. Величина ускорения a, по замыслу Клапауция, должна была определяться по высоте наблюдаемого под микроскопом столба жидкости h. Можно ли использовать этот детектор для измерения ускорений в диапазоне от $5g$ до $20g$? А в диапазоне от $50g$ до $200g$? Для того диапазона, для которого Вы считаете детектор пригодным, определите, как его следует проградуировать, то есть получите формулу связи $a(h)$. Отношение плотности насыщенного водяного пара к плотности жидкой воды при температуре термостата считайте равным $\varepsilon \equiv \frac{\rho_n}{\rho_B} \approx 3{,}84 \cdot 10^{-4}$.

Решение: Прежде всего заметим, что труба является «узкой» по сравнению с ее длиной, что позволяет нам считать ее достаточно широкой для того, чтобы пренебрегать силами поверхностного натяжения. Выясним, при каком ускорении в «детекторе» появится жидкая вода. Масса воды в трубке может быть определена из уравнения Менделеева-Клапейрона или через плотность насыщенного пара: $m_0 = \frac{\mu p_0 Sl}{RT} = \phi_0 \frac{\mu p_H Sl}{RT} = \phi_0 \rho_n Sl$ (здесь $\mu = 0{,}018$ кг/моль – молярная масса воды, S – сечение трубки, $R \approx 8{,}31$ Дж/моль·К – универсальная газовая постоянная, p_H – давление насыщенного пара при температуре T). Пока вся вода находится в виде пара, ее ускорение создается разностью давлений у «задней» (пол отношению к ускорению) и «передней» стенки трубки: $m_0 a = (p_1 - p_2)S \Rightarrow p_1 - p_2 = \phi_0 \frac{\mu p_H l}{RT} a$. С другой стороны, записав уравнение движение для слоя пара толщиной dx на расстоянии x от «задней» стенки, найдем, что

$$dpS = -dm\, a = -\frac{\mu a p}{RT} Sdx \Rightarrow \frac{dp}{dx} = -\frac{\mu a}{RT} p.$$

Вспомнив, у какой функции производная пропорциональна ей самой, можно записать $p(x) = p_1 \exp\left(-\frac{\mu a x}{RT}\right)$. Тогда уравнение для определения давления p_1 имеет вид:

$$p_1\left[1 - \exp\left(-\frac{\mu a l}{RT}\right)\right] = \phi_0 \frac{\mu p_H a l}{RT}.$$

Начало конденсации у «задней» стенки соответствует $p_1 = p_H$, то есть $1 - \exp\left(-\frac{\mu a l}{RT}\right) = \phi_0 \frac{\mu a l}{RT}$, откуда и находится минимальное значение ускорения, к которому чувствителен прибор. Если заметить, что даже для $a = 200g$ величина $\frac{\mu a l}{RT} \approx 0{,}118$, то есть довольно мала, то можно, считая $1 - e^{-z} |_{z<<1} \approx z - \frac{z^2}{2}$ найти, что минимальное ускорение $a_{\min} \approx (1-\phi_0)\frac{2RT}{\mu l} \approx 33{,}9g$. Таким образом, для диапазона ускорений от $5g$ до $20g$ акселерометр заведомо непригоден, а для диапазона от $50g$ до $200g$ в принципе может быть использован.

При $a > a_{\min}$ у «задней» стенки появляется столбик жидкой воды высоты h. Так как вблизи границы раздела фаз давление пара равно p_H, то $p_1 = p_H + \rho_B a h$, и при этом из соотношения, аналогичного полученному в предыдущем действии, $p_2 = p_H \exp\left(-\frac{\mu a(l-h)}{RT}\right)$. Следовательно, теперь уравнение для ускорения

$$p_H + \rho_B a h - p_H \exp\left(-\frac{\mu a(l-h)}{RT}\right) = \phi_0 \rho_n l a.$$

Учтем, что $h << l$ и запишем: $p_H\left[1 - \exp\left(-\frac{\mu a(l-h)}{RT}\right)\right] \approx \frac{\mu p_H (l-h)}{RT} a - \frac{\mu^2 p_H^2 l^2}{2R^2T^2} a^2$, и тогда (поскольку $\frac{\mu p_H}{RT} = \rho_n$) $(\rho_B - \rho_n)h + (1-\phi_0)\rho_n l = \rho_n \frac{\mu l^2}{2RT} a$. Наконец, из этого соотношения получаем уравнение для «градуировки» прибора:

$$a(h) \approx a_{\min}\left[1 + \frac{h}{\varepsilon(1-\phi_0)l}\right] \approx 33{,}9g \cdot \left[1 + \frac{h}{0{,}0384\,\text{мм}}\right].$$

Как видно, прибор не слишком удобен для использования, ибо требует точных измерений очень малых h. Например, для $a = 200g$ соответствующее $h \approx 0{,}188$ мм. Кроме того, при приближении к верхней границе диапазона точность полученной формулы падает.

ОТВЕТ: для диапазона от $50g$ до $200g$ градуировка шкалы акселерометра дается выражением

$$a(h) \approx (1-\phi_0)\frac{2RT}{\mu l}\left[1+\frac{h}{\varepsilon(1-\phi_0)l}\right] \approx 33{,}9g\cdot\left[1+\frac{h}{0{,}0384\,мм}\right].$$

<u>Примечание</u>: Многие участники не использовали разложение экспоненты, и вместо зависимости $a(h)$ получали $h(a)$. В этом случае из формулы

$$p_H + \rho_B ah - p_H \exp\left(-\frac{\mu a(l-h)}{RT}\right) = \phi_0 \rho_n l a$$

с учетом

$$\frac{\mu p_H}{RT} = \rho_n$$

и $h << l$ получается

$$h(a) \approx \varepsilon\left[\phi_0 l - \frac{RT}{\mu a}(1-e^{-\frac{\mu l a}{RT}})\right] \approx 3{,}8\,мм\cdot\left[1-\frac{1-e^{-z}}{0{,}99z}\right],$$

где

$$z \equiv \frac{a}{1{,}66\cdot 10^6\,м/с^2} \approx 0{,}59\cdot 10^{-5}\frac{a}{g}.$$

Центральным соображением для зачета результата были: правильное использование полученной формулы для определения возможности использования прибора в указанных диапазонах и представление «градуировочной зависимости» $a(h)$ - например, таблицей или графиком.

Задание заключительного этапа олимпиады школьников «Покори Воробьёвы горы!» по физике

2015-2016 учебный год

10-11 классы

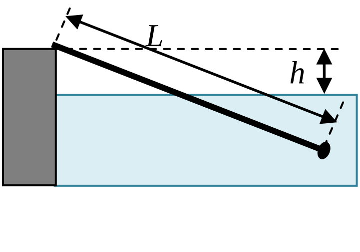
Финальный тур проводился на нескольких площадках по равноценным, но различным заданиям. Приведены примеры финальных заданий с разбором. Нужно обратить внимание на то, что каждое задание сосоит из качественного вопроса и задачи. Максимальная оценка за любой из качественных вопросов составляла 5 баллов, за каждую из задач – 20 баллов. Поэтому максимальная возможная оценка за работу равнялась 100 баллам.

БИЛЕТ № 01

Задание 1:

Вопрос: От каких факторов зависит величина, точка приложения и направление силы Архимеда? Приведите примеры ситуаций, когда ее направление не совпадает с вертикалью. Может ли сила Архимеда сообщить очень легкому телу в покоящейся жидкости ускорение, превышающее ускорение свободного падения? Ответ объяснить.

Задача: Узкая тонкая однородная доска длиной $L = 1$ м лежит, опираясь одним из концов на борт бассейна. При этом второй конец доски опущен в воду, и к нему прикреплен небольшой груз (см. рис.). Высота борта над водой $h = 40$ см.

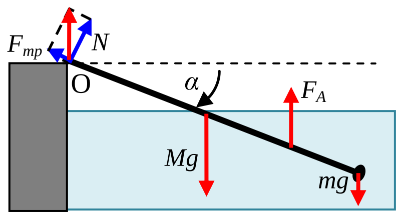


Коэффициент трения между доской и бортом бассейна $\mu = 0{,}75$. При каком максимальном отношении массы груза к массе доски

$x \equiv \dfrac{m}{M}$ доска может покоиться? Вода в бассейне неподвижна, плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3, плотность дерева, из которого изготовлена доска $\rho = 0{,}5$ г/см^3.

Ответ на вопрос: Согласно закону Архимеда, величина силы Архимеда равна весу вытесненной телом жидкости (важно отметить, что вес может создаваться не только силой тяжести – это сила, с которой жидкость, находившаяся на месте тела, действовала бы на окружающую тело жидкость). Точка приложения силы Архимеда тоже совпадает с точкой приложения веса вытесненной жидкости, а направление – противоположно: F_A направлена перпендикулярно поверхностям постоянного давления в жидкости. Закон Архимеда относится к равновесию тела в жидкости – если тело движется с ускорением, то и величина силы Архимеда изменяется. В частности, даже очень легкому телу в покоящейся жидкости сила Архимеда не может сообщить ускорение, превышающее ускорение свободного падения: в самом деле, всплытие легкого тела происходит за счет выталкивающего действия жидкости, которая опускается под действием силы тяжести, и поэтому не может перемещаться с ускорением, превышающим g.

Решение задачи: Доска может покоиться под действием силы тяжести, веса груза, силы Архимеда и силы взаимодействия с бортом бассейна, являющейся суммой силы нормальной реакции борта и силы трения (см. рис.). Если α - угол наклона доски к горизонтали, то равенство нулю суммы горизонтальных проекций сил дает связь сил реакции:



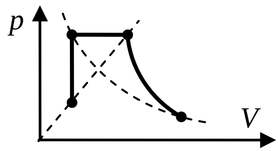
$N\sin(\alpha)=F_{тр}\cos(\alpha)\Rightarrow F_{тр}=N\cdot tg(\alpha)$. Так как сила трения покоя $F_{тр}\le\mu N$, то доска может покоиться только при $tg(\alpha)\le\mu$. С другой стороны, угол α должен удовлетворять уравнению моментов относительно точки опоры доски O: $+F_A\left(L-\frac{L'}{2}\right)\cos(\alpha)-Mg\frac{L}{2}\cos(\alpha)-mgL\cos(\alpha)=0$, где $L'=L-\frac{h}{\sin(\alpha)}$ – длина погруженной в воду части доски, и сила Архимеда $F_A=\rho_0V_{погр}g=\rho_0g\frac{L'}{L}\frac{M}{\rho}=\frac{\rho_0}{\rho}\frac{L'}{L}Mg$. Таким образом, $\frac{Mg}{2L}\left[\frac{\rho_0}{\rho}\left(L^2-\frac{h^2}{\sin^2(\alpha)}\right)-L^2\right]-mgL=0$, и из этого соотношения находится связь массы груза с углом наклона доски в равновесии: $m=\frac{M}{2}\left[\frac{\rho_0}{\rho}\left(1-\frac{h^2}{L^2\sin^2(\alpha)}\right)-1\right]$. Как видно, максимальная возможная масса груза соответствует максимальному возможному углу $\alpha_{\max}=arctg(\mu)\Rightarrow\sin^2(\alpha_{\max})=\frac{\mu^2}{1+\mu^2}$, и поэтому $x_{\max}=\frac{1}{2}\left[\frac{\rho_0}{\rho}\left(1-\frac{(1+\mu^2)h^2}{\mu^2L^2}\right)-1\right]=\frac{1}{18}$.

ОТВЕТ: $x_{\max}=\frac{1}{2}\left[\frac{\rho_0}{\rho}\left(1-\frac{(1+\mu^2)h^2}{\mu^2L^2}\right)-1\right]=\frac{1}{18}\approx 0{,}056$.

Задание 2:

Вопрос: Чему может быть равна теплоемкость одного моля идеального газа в изохорном и изобарном процессах?

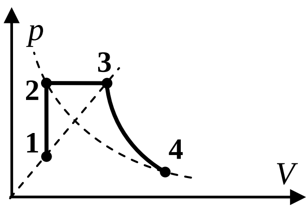
Задача: Постоянное количество идеального газа участвует в процессе, диаграмма которого показана на рисунке в координатах давление-объем. Известно, что при изохорном нагревании газ получает количество теплоты, равное $Q = 60$ кДж, а после



изобарного расширения температура газа становится в $n = 9$ раз больше наименьшей (для всего процесса). Найдите работу газа при адиабатическом расширении. Линии, показанные пунктиром – прямая, проходящая через начало координат, и изотерма.

Ответ на вопрос: Теплоемкость идеального газа в изохорном процессе определяется только изменением его внутренней энергии, поэтому $c_V = \frac{i}{2}R$, где i – число степеней свободы молекулы: $i = 3$ для одноатомного идеального газа, $i = 5$ для двухатомного, $i = 6$ для многоатомного. В изобарном процессе теплоемкость увеличивается за счет совершаемой газом работы, поэтому $c_p = c_V + R = \frac{i+2}{2}R$.

Решение задачи: Занумеруем точки на диаграмме так, как показано на рисунке. При адиабатическом расширении $Q_{34} = A_{34} + \Delta U_{34} = 0$, и поэтому $A_{34} = -\Delta U_{34}$. Из диаграммы видно, что $T_4 - T_3 = -(T_3 - T_2)$, и поэтому работа $A_{34} = \Delta U_{23} = \frac{i}{2}\nu R(T_3 - T_2)$.



С другой стороны, теплота, полученная газом при изохорном нагревании $Q = Q_{12} = \frac{i}{2}\nu R(T_2 - T_1)$. С учетом того, что линия 1-3 проходит через начало координат, $\frac{V_3}{V_1} = \frac{p_3}{p_1} \equiv k$, поэтому

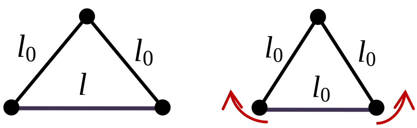
$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} = k$. Кроме того, ясно, что минимальная температура в процессе – это T_1. Поэтому $\frac{T_3}{T_1} = n = k^2 \Rightarrow k = \sqrt{n}$. Таким образом, $\frac{A_{34}}{Q} = \frac{T_3 - T_2}{T_2 - T_1} = \frac{n - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - 1} = \sqrt{n}$, и $A_{34} = \sqrt{n}Q = 180$ кДж.

ОТВЕТ: $A_{34} = \sqrt{n}Q = 180$ кДж.

Задание 3:

Вопрос: Чему равна потенциальная энергия электростатического взаимодействия четырех одинаковых точечных зарядов q, расположенных в вершинах квадрата со стороной a?

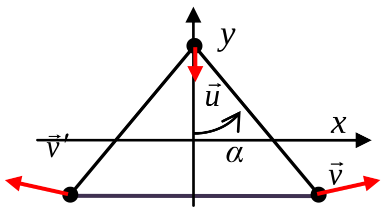
Задача: Три маленьких одинаковых заряженных шайбы соединены попарно двумя легкими нерастяжимыми нитями длиной $l_0 = 40$ см и одной упругой резинкой, длина которой в недеформированном состоянии также равна l_0 (сила упругости резинки пропорциональна деформации). Если поместить их на гладкую горизонтальную поверхность, то в состоянии покоя длина резинки будет равна $l = 50$ см. Удерживая шайбы, резинку переводят в недеформированное состояние (так, что шайбы образуют равносторонний треугольник) и отпускают шайбы без начальной скорости. До какой максимальной длины растянется резинка в ходе дальнейшего движения? Какой будет максимальная скорость «средней» шайбы? Циклическая частота колебаний одной шайбы на резинке равна $\omega = 20$ с$^{-1}$.



Ответ на вопрос: Потенциальная энергия определена с точностью до постоянного слагаемого, поэтому сначала необходимо определить ее однозначно: как это обычно делается для системы зарядов конечных размеров, будем считать, что нулевая потенциальная энергия отвечает разнесению всех зарядов на бесконечность. Тогда потенциальная энергия взаимодействия каждой пары зарядов равна $U_{ij} = \dfrac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$. В квадрате есть 4 пары зарядов на расстоянии a, и 2 пары – на расстоянии $a\sqrt{2}$. Значит, полная энергия взаимодействия

$$U = 4\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} + 2\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{2}} = \frac{(4+\sqrt{2})q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

Решение задачи: В состоянии покоя силы электростатического отталкивания каждой пары шайб уравновешиваются силой натяжения нити или силой упругости резинки, связывающей их. Если q - заряд каждой из шайб, а k – коэффициент жесткости резинки, то $k(l - l_0) = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$. Когда шайбы отпустили из положения «правильный треугольник», они стали двигаться, растягивая резинку. В силу симметрии системы ясно, что «центральная» шайба (находящаяся между нитями) движется только вдоль оси *y*, а «крайние» шайбы имеют одинаковые по величине симметрично направленные скорости (см. рисунок, где $\vec{u}$ – скорость центральной шайбы). В силу закона сохранения



импульса *y*-компоненты скоростей крайних шайб равны $v_y = \dfrac{u}{2}$, и, так как нити остаются натянутыми, то проекции скоростей шайб на соединяющую их нить должны быть равны:

$$u\cos(\alpha) = v_x \sin(\alpha) - v_y \cos(\alpha) \Rightarrow v_x = \frac{3\cos(\alpha)}{2\sin(\alpha)}u = \frac{3\sqrt{l_0^2 - x^2}}{2x}u$$

(здесь x – координата «правой» шайбы). Значит, кинетическую энергию системы можно выразить через скорость средней шайбы:

$E_K=\dfrac{m\vec{u}^{\,2}}{2}+2\dfrac{m\vec{v}^{\,2}}{2}=\dfrac{3mu^2}{4}\dfrac{3l_0^2-2x^2}{x^2}$. Потенциальную энергию системы удобно определить так, чтобы она равнялась нулю в начальном положении системы (при недеформированной резинке): $E_П=\dfrac{k(2x-l_0)^2}{2}+\dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 x}-\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0}$. Выразив здесь заряд через l, получим: $E_П(x)=-\dfrac{k(2x-l_0)}{2l_0x}[l^2(l-l_0)-l_0x(2x-l_0)]$. При изучении движения шайб будем пренебрегать излучением. Тогда максимальная длина резинки будет соответствовать моменту остановки шайб, когда $E_П(x)=0\Rightarrow x^2-\dfrac{l_0}{2}x-\dfrac{l^2(l-l_0)}{2l_0}=0$.

Нужное нам значение соответствует положительному корню этого уравнения. Следовательно, максимальная длина резинки $l_{\max}=2x=\dfrac{l_0}{2}\left[1+\sqrt{1+\dfrac{8l^2(l-l_0)}{l_0^3}}\right]\approx 60{,}6$ см. Изменение скорости в процессе движения шайб можно найти из закона сохранения энергии $E_K+E_П=0$. Значит,

$$u^2=\frac{2k\,x(2x-l_0)}{3ml_0(3l_0^2-2x^2)}[l^2(l-l_0)-l_0x(2x-l_0)].$$

Ясно, что $\dfrac{k}{m}=\omega^2$, и, если ввести обозначение $z\equiv\dfrac{x}{l_0}$, и учесть, что $\dfrac{l^2(l-l_0)}{l_0^3}=\dfrac{25}{64}$, то выражение для скорости средней шайбы принимает вид

$$u(z)=\frac{\omega l_0}{4}\sqrt{\frac{z(2z-1)(25+64z-128z^2)}{6(3-2z^2)}}\,.$$

Максимум скорости соответствует максимуму этой функции. Разумным приближением для его вычисления является использование того соображения, что кинетическая энергия системы максимальна в момент прохождения положения равновесия, то есть при $z=\frac{l}{2l_0}=\frac{5}{8}$. Значит, максимальная скорость средней шайбы должна достигаться вблизи этого значения. Тогда $u_{\max}\approx\frac{5\omega l_0}{4\sqrt{142}}\approx 0{,}84$ м/с.

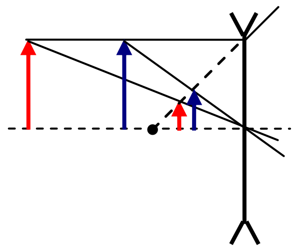
ОТВЕТ: максимальная длина резинки $l_{\max}=\frac{l_0}{2}\left[1+\sqrt{1+\frac{8l^2(l-l_0)}{l_0^3}}\right]\approx 60{,}6$ см, максимальная скорость средней шайбы соответствует максимуму функции $u(z)=\frac{\omega l_0}{4}\sqrt{\frac{z(2z-1)(25+64z-128z^2)}{6(3-2z^2)}}$, и примерно равна $u_{\max}\approx\frac{5\omega l_0}{4\sqrt{142}}\approx 0{,}84$ м/с.

ПРИМЕЧАНИЕ: На самом деле из-за того, что распределение кинетической энергии между шайбами зависит от конфигурации системы (это видно из формулы для кинетической энергии), «настоящий» максимум немного смещен: $z_m\approx 0{,}659$, и $u_{\max}\approx 0{,}87$ м/с. Но такая точность в решении на олимпиаде не требовалась.

Задание 4:

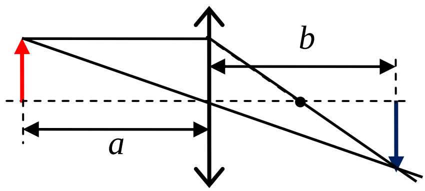
Вопрос: Что нужно сделать для того, чтобы поперечное увеличение изображения пламени свечи, наблюдаемого через рассеивающую тонкую линзу, уменьшилось – придвинуть линзу к свече или отодвинуть от нее? Ответ объяснить.

Задача: С помощью тонкой линзы на экране получено изображение нити небольшой лампочки, развернутой перпендикулярно оси линзы, с увеличением $|\Gamma| = 2{,}5$. Когда экран придвинули к линзе на расстояние $s = 8$ см, то для получения нового четкого изображения лампочку пришлось сдвинуть вдоль оси на расстояние $s' = 1{,}6$ см. Каким стало увеличение изображения?



Ответ на вопрос: Рассеивающая линза создает мнимое изображение пламени свечи. Как видно из построения, при приближении линзы к объекту, поперечный размер его прямого мнимого изображения увеличивается. Следовательно, для уменьшения поперечного увеличения изображения пламени свечи необходимо отодвинуть линзу от свечи.

Решение задачи: Поскольку изображение получается на экране, то это действительное изображение, линза является собирающей, и нить лампы находится от линзы на расстоянии a,



превышающем фокусное расстояние линзы F. Из формулы линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ следует, что

$b = \frac{aF}{a - F}$ и $a = \frac{bF}{b - F}$. Поэтому модуль увеличения $|\Gamma| = \frac{|b|}{|a|} = \frac{F}{a - F} = \frac{b - F}{F}$. Используя эти формулы, найдем, что новое увеличение $|\Gamma'| = \dfrac{b-s-F}{F} = |\Gamma| - \dfrac{s}{F} \Rightarrow \dfrac{s}{F} = |\Gamma| - |\Gamma'|$ и одновременно

$$\frac{1}{|\Gamma'|} = \frac{a+s'-F}{F} = \frac{1}{|\Gamma|} + \frac{s'}{F} \Rightarrow \frac{s'}{F} = \frac{1}{|\Gamma'|} - \frac{1}{|\Gamma|} = \frac{|\Gamma|-|\Gamma'|}{|\Gamma'||\Gamma|}$$

(ясно, что при приближении экрана к линзе, т.е. при уменьшении b расстояние a должно увеличиваться). В результате находим: $\dfrac{s}{s'} = |\Gamma||\Gamma'| \Rightarrow |\Gamma'| = \dfrac{s}{s'|\Gamma|} = 2$.

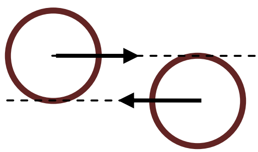
ОТВЕТ: $|\Gamma'| = \dfrac{s}{s'|\Gamma|} = 2$.

БИЛЕТ № 02

Задание 1:

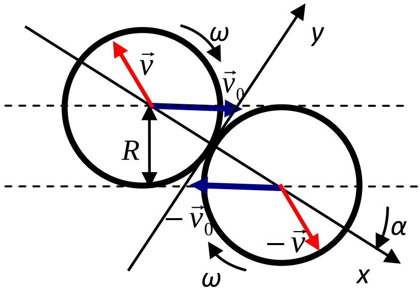
Вопрос: Две упругие однородные шайбы, скользившие поступательно по гладкому льду, столкнулись. При каких условиях после удара они также будут двигаться поступательно?

Задача: Два одинаковых упругих колечка радиуса R с шероховатой боковой поверхностью скользят навстречу друг другу по гладкой горизонтальной поверхности с одинаковыми по величине скоростями v_0. Линии движения центров колечек проходят по касательной к ним (см. рисунок). После удара они начали вращаться с угловыми скоростями $\omega = \dfrac{v_0}{4R}$. Найти величину скоростей движения центров масс колечек после удара.



Ответ на вопрос: Шайбы не начнут вращаться, если моменты сил их взаимодействия относительно центров масс (которые совпадают с геометрическими центрами, так как шайбы однородны) будут равны нулю. Это условие центральности соударения. Оно заведомо выполняется при лобовом ударе. При косом ударе необходимо, чтобы силы взаимодействия шайб были направлены по их радиусам, то есть боковые поверхности шайб должны быть гладкими.

Решение задачи: Рассмотрим геометрию удара колец. Используем декартовы координаты (x, y), причем ось x направим вдоль прямой, проходящей через центры колец в момент удара, а ось y – перпендикулярно ей.



Кольца взаимодействуют посредством парных сил нормальной реакции (величина N, направлены вдоль оси x) и трения (величина $F_{тр}$, направлены вдоль оси y). Вращение колец появляется только благодаря силам трения, поэтому движение вдоль оси x происходит независимо от вращения и движения по оси y, то есть как при обычном упругом лобовом ударе тел одинаковой массы. Введем обозначения: пусть m – масса каждого из колец, $\vec{v}_0$ - скорость «первого» кольца до удара, $\vec{v}$ - его скорость после удара (из симметрии системы яи закона сохранения импульса ясно, что скорости «второго» кольца – это $-\vec{v}_0$ и $-\vec{v}$ соответственно), ω - угловые скорости колец после удара (соударение нецентральное, и за счет сил трения оба кольца начнут вращаться по часовой стрелке). Угол между $\vec{v}_0$ и осью x $\alpha = \arcsin\left(\dfrac{R}{2R}\right) = \dfrac{\pi}{6}$. Тогда из анализа движения по оси x следует, что $v_x = -v_0 \cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} v_0$. Проекция скорости первого кольца на ось y уменьшается за счет действия силы трения, и эта же сила изменяет скорость вращения этого кольца ωR. Заметим также, что при «разгоне» вращения все массы кольца двигаются вокруг центра с одинаковыми скоростями и ускорениями в любой момент времени. Поэтому:

$$\left.\begin{cases} mv_y - mv_0 \sin\alpha = -F_{тр} \cdot \Delta t \\ mR\omega = F_{тр} \cdot \Delta t \end{cases}\right\} \Rightarrow v_y = v_0 \sin\alpha - R\omega = \frac{v_0}{4}$$

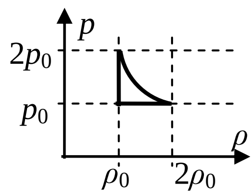
(здесь Δt - длительность времени скольжения колец друг по другу). Значит, величина скорости центра масс первого кольца $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{\sqrt{13}}{4} v_0$. Ясно, что у второго кольца скорость такая же.

ОТВЕТ: $v_1 = v_2 = \frac{\sqrt{13}}{4} v_0$.

Задание 2:

Вопрос: Идеальный газ участвует в процессе, в котором его температура изменяется от T_0 до $5T_0$, а график зависимости давления от температуры – парабола $p = p_0\left[1 + \frac{T^2}{4T_0^2}\right]$. Плотность газа в конце процесса равна ρ_K. Чему равна минимальная плотность газа в этом процессе?

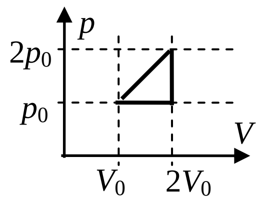
Задача: Постоянное количество гелия является рабочим телом тепловой машины, цикл которой в координатах «давление-плотность» показан на рисунке. Найти максимальное КПД этой тепловой машины (т.е в пренебрежении всеми потерями, кроме передачи тепла



холодильнику). Криволинейный участок диаграммы – гипербола $p\rho = const$.

Ответ на вопрос: Плотность идеального газа можно связать с давлением и температурой с помощью уравнения Менделеева-Клапейрона: $\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu p}{RT}$. Следовательно, в этом процессе $\rho(T) = \frac{\mu p_0}{2RT_0}\left[\frac{2T_0}{T} + \frac{T}{2T_0}\right]$. Поскольку минимальное значение величины $x + \frac{1}{x}$ равно 2 (при $x = 1$), и значение $T = 2T_0$ попадает в интервал температур процесса, то $\rho_{\min} = \frac{\mu p_0}{RT_0}$. Плотность в конце процесса $\rho_K = \frac{29}{20}\frac{\mu p_0}{RT_0}$, поэтому $\rho_{\min} = \frac{20}{29}\rho_K$.

Решение задачи: Удобно перейти к координатам давление-объем: в рассматриваемом цикле один из процессов – изохорное охлаждение, другой – изобарное сжатие, а третий процесс соответствует в координатах $p-V$ диаграмме в виде прямой, проходящей через начало координат: $\frac{p}{V} = const$ (см. рисунок, на котором введено обозначение $V_0 \equiv \frac{m}{2\rho_0}$, m – масса гелия). В таком процессе удобно



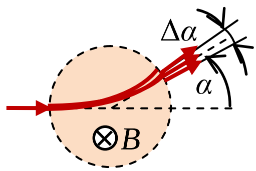
вычислять работу $A = \frac{1}{2}p_0V_0$ и теплоту, отданную холодильнику (это сумма количеств теплоты, отведенной от газа в изохорном и изобарном процессах) $Q_X=\frac{3}{2}2V_0p_0+\frac{5}{2}p_0V_0=\frac{11}{2}p_0V_0$.

Значит, $\eta=\frac{A}{A+Q_X}=\frac{1}{12}\approx 8{,}3\%$.

ОТВЕТ: $\eta=\frac{A}{A+Q_X}=\frac{1}{12}\approx 8{,}3\%$.

Задание 3:

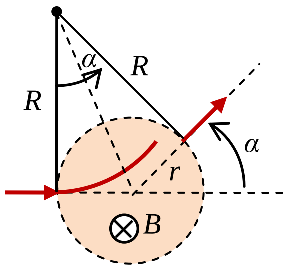
Вопрос: Как может двигаться заряженная частица в однородном и постоянном магнитном поле (если других силовых полей нет)? Опишите все возможные случаи.



Задача: Узкий пучок ионов с одинаковым зарядом, но с немного различающимися массами направляют в область цилиндрической формы, в которой создано однородное магнитное поле, направленное по оси цилиндра. Скорость ионов перпендикулярна этой оси. После прохождения области пучок отклонился от направления первоначального движения на угол $\alpha=30°$ и у него появилась расходимость с углом $\Delta\alpha\approx 0{,}6°$ (начальная расходимость была пренебрежимо мала по сравнению с этой). Найти (в процентах) разброс масс ионов пучка ($\Delta m/m=?$).

Ответ на вопрос: В магнитном поле на частицу действует сила Лоренца $\vec{F}=q[\vec{v}\times\vec{B}]$. Поэтому, если частица движется вдоль поля, то эта сила равна нулю, и частица будет двигаться равномерно и прямолинейно. При движении частицы в плоскости, перпендикулярной $\vec{B}$, движение является равномерным вращением по окружности – модуль скорости и индукция поля постоянны, и поэтому постоянен модуль ускорения, которое направлено перпендикулярно скорости. Если же скорость частицы будет иметь и составляющую, параллельную полю, и составляющую, перпендикулярную полю, то движение будет комбинацией двух разобранных, то есть частица будет двигаться по винтовой линии.

Решение задачи: Пусть q – заряд каждого иона. Под действием силы Лоренца ионы двигаются по окружности, радиус которой определяется из уравнения для центростремительной компоненты ускорения:



$m\dfrac{v^2}{R} = qvB \Rightarrow R = \dfrac{mv}{qB}$ (v – скорость ионов). Из построения видно, что угол отклонения иона при прохождении цилиндрической области радиуса r с магнитным полем определяется из соотношения $tg\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{r}{R} = \dfrac{qBr}{mv}$.

Изменение этого угла при малом изменении массы: $\Delta\left[tg\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right] \approx \dfrac{\Delta\alpha}{2\cos^2(\alpha/2)} \approx \dfrac{qBr}{v}\left(-\dfrac{1}{m^2}\right)\Delta m$. Так как знак изменения нам не важен (знак «минус» здесь просто показывает, что увеличение массы соответствует уменьшению угла), перепишем это соотношение в виде $\dfrac{qBr}{mv}\dfrac{\Delta m}{m} = tg\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\dfrac{\Delta m}{m} \approx \dfrac{\Delta\alpha}{2\cos^2(\alpha/2)}$, откуда находим, что

$$\frac{\Delta m}{m} \approx \frac{\Delta\alpha}{\sin(\alpha)} \approx 2{,}1\%.$$

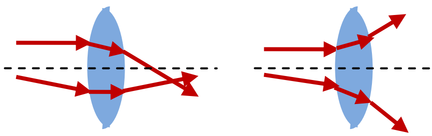
ОТВЕТ: $\dfrac{\Delta m}{m} \approx \dfrac{\Delta\alpha}{\sin(\alpha)} \approx 2{,}1\%$.

Задание 4:

Вопрос: В каком случае двояковыпуклая тонкая линза может являться рассеивающей? Ответ обосновать.

Задача: Небольшая лампа подвешена на высоте $H = 1{,}8$ м над горизонтальной поверхностью стола. Между лампой и столом поместили линзу, оптическая сила которой $D = 2{,}5$ дптр, таким образом, что на столе наблюдалось четкое изображение нити лампы (плоскость линзы горизонтальна). Линзу переместили вниз на расстояние h, и оказалось, что и в этом случае на столе наблюдается четкое изображение нити. Найти h.

Ответ на вопрос: На обеих поверхностях двояковыпуклой линзы, помещенной в однородную прозрачную



среду, параксиальный световой луч преломляется в одну сторону: наклоняется к оси, если показатель преломления среды меньше, чем показатель преломления вещества линзы, и отклоняется от оси в противоположном случае (см. рисунок). Таким образом, двояковыпуклая линза может быть рассеивающей, если она помещена в среду, оптически более плотную, чем вещество линзы.

Решение задачи: Пусть x – высота размещения линзы над поверхностью стола. Тогда расстояние между лампой и линзой равно $H - x$, и четкое изображение нити наблюдается, если (в соответствии с формулой линзы): $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{H - x} = D$, откуда следует уравнение $x^2 - H\,x + \dfrac{H}{D} = 0$. Ясно, что и высота начального, и высота конечного положения линзы должны удовлетворять этому квадратному уравнению. Поэтому эти высоты есть не что иное, как два корня этого уравнения. Величина перемещения линзы является разностью двух его корней. Значит, она равна корню квадратному из дискриминанта уравнения:

$$h = \sqrt{H^2 - 4\frac{H}{D}} = \sqrt{H(H - 4D^{-1})} = 0.6\,\text{м}.$$

ОТВЕТ: $h = \sqrt{H(H - 4D^{-1})} = 0.6$ м.

БИЛЕТ № 03:

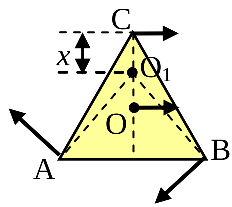
Задание 1:

Вопрос: В некоторый момент времени величины скоростей двух концов недеформируемого стержня, совершающего движение в плоскости, оказались равны. Как в этот момент времени может двигаться центр этого стержня? Опишите все возможные варианты.

Задача: Равносторонний треугольник ABC, вырезанный из плоского однородного листа жести, скользит по гладкой горизонтальной поверхности. В некоторый момент времени величины скоростей двух его вершин (A и B) оказались равны друг другу, а величина скорости третьей вершины (C) – в два раза меньше их скоростей. Найти расстояние, на которое сместится центр треугольника за время одного полного оборота треугольника вокруг вертикальной оси. Длина стороны треугольника равна a.

Ответ на вопрос: Прежде всего заметим, что у недеформируемого стержня равные по модулю скорости концов должны быть направлены так, что их проекции на стержень тоже равны (это условие следует из постоянства длины стержня). Поэтому их проекции на ось, перпендикулярную стержню, также должны быть равны по величине, то есть они либо равны друг другу, либо противоположны. Если они равны (то есть равны не только величины скоростей, но и сами векторы скорости концов стержня), то весь стержень движется поступательно, и тогда скорость его центра равна скорости концов. Если они направлены противоположно, а составляющая скоростей вдоль стержня равна нулю (скорости концов противоположны и перпендикулярны стержню), то стержень вращается вокруг покоящегося центра. Если они направлены противоположно, а составляющая скоростей вдоль стержня отлична от нуля, то центр стержня движется вдоль стержня со скоростью, равной этой составляющей, а стержень при этом вращается вокруг него. К тем же результатам можно прийти, если для непоступательного движения стержня обратить внимание на то, что из равенства модулей скоростей следует, что они равноудалены от мгновенного центра вращения, и мгновенный центр вращения лежит на срединном перпендикуляре к стержню. Поэтому скорость центра при неравенстве векторов скоростей концов либо ноль (центр стержня и есть мгновенный центр вращения), либо направлена вдоль стержня.

Решение задачи: Поскольку скорости вершин A и B равны по величине, то мгновенный центр вращения треугольника O_1 лежит на срединном перпендикуляре к стороне AB. Если x – расстояние от O_1 то вершины C, то по условию $v_C = \omega x = \frac{v_A}{2} = \frac{\omega}{2}\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}$ (здесь ω – угловая скорость вращения). Из этого



соотношения находим, что $x = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Поскольку расстояние от центра масс треугольника (совпадающего с его геометрическим центром O) до вершин равно $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$, то расстояние от мгновенного центра вращения до центра масс $r = R - x = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

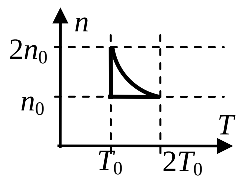
Таким образом, скорость центра масс $v_O = \omega r = \omega\frac{a}{2\sqrt{3}}$. Центр масс треугольника на гладкой горизонтальной поверхности движется равномерно и прямолинейно. Это значит, что за время одного оборота стержня $T = \frac{2\pi}{\omega}$ центр масс сместится на расстояние $s = v_O T = \frac{\pi a}{\sqrt{3}}$.

ОТВЕТ: $s = \frac{\pi a}{\sqrt{3}}$.

Задание 2:

Вопрос: У какого процесса с идеальным газом диаграмма процесса в координатах «полученное газом количество теплоты – совершенная им работа» описывается соотношением $Q = Q_0 + A - A_0$ (Q_0, A_0 - начальные значения для данного процесса)? Как в таком процессе вычислить работу газа через параметры начального и конечного состояния?

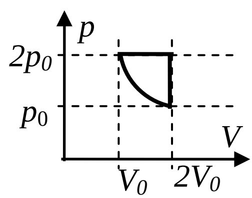
Задача: Постоянное количество гелия является рабочим телом тепловой машины, цикл которой в координатах «концентрация молекул-температура» показан на рисунке. Найти максимальное КПД этой тепловой машины (т.е в пренебрежении всеми потерями, кроме передачи тепла холодильнику). Криволинейный участок диаграммы – гипербола $nT = const$.



Ответ на вопрос: Из первого начала термодинамики следует, что в данном процессе внутренняя энергия газа не изменяется. Поскольку внутренняя энергия постоянного количества идеального газа зависит только от температуры, то таким процессом является изотермический процесс. В изотермическом процессе работа может быть вычислена как площадь под кривой процесса в координатах давление-объем. Для изотермы с температурой T зависимость

$$p(V) = \frac{\nu RT}{V}, \text{ поэтому } A_{12} = \nu RT \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = p_1 V_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

Решение задачи: Построим диаграмму цикла в координатах давление–объем: цикл состоит из изохорного охлаждения (процесс с $n = const$), изотермического сжатия, и изобарного расширения (процесс $nT = const$ – из основного уравнения молекулярно-кинетической теории следует, что при этом $p = const$). На



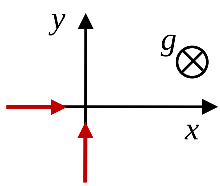
диаграмме введены обозначения $p_0 \equiv n_0 k T_0$, $V_0 \equiv N/(2n_0)$. Работа газа за цикл равна разности работ в изохорном и изотерическом процессах: $A = 2p_0V_0[1 - \ln(2)]$. Газ получает тепло только в процессе изобарного расширения, поэтому теплота нагревателя $Q_H = 2p_0V_0 + \frac{3}{2}(4p_0V_0 - 2p_0V_0) = 5p_0V_0$. Таким образом, $\eta = \frac{A}{Q_H} = \frac{2[1 - \ln(2)]}{5}$.

ОТВЕТ: $\eta = \frac{2[1 - \ln(2)]}{5} \approx 12{,}3\%$.

Задание 3:

Вопрос: Определите условия, при выполнении которых заряженная частица в однородном магнитном поле при наличии еще и постоянной силы другой природы, может двигаться равномерно-прямолинейно (такое движение называют «дрейфовым»).

Задача: Электростатическая пушка «выстреливает» наночастицы с удельным зарядом $\beta = +5 \cdot 10^{-5}$ Кл/кг со скоростью $v = 3500$ м/с. Выстрелы производились горизонтально в вакуумированном пространстве, в котором было создано магнитное поле, линии индукции которого также горизонтальны. Оказалось, что существуют два взаимно перпендикулярных направления, в которых наночастицы двигаются после выстрела прямолинейно. Связав с этими направлениями систему координат, найдите направление и величину индукции магнитного поля. Ускорение свободного падения принять равным $g \approx 10$ м/с^2.



Ответ на вопрос: Для равномерно-прямолинейного движения необходимо, чтобы сумма приложенных к частице сил равнялась нулю. Поэтому при таком движении сила Лоренца, действующая на частицу со стороны магнитного поля, должна уравновешивать постоянную силу другой природы: $q[\vec{v} \times \vec{B}] = \vec{F}$. Для выполнения этого требования необходимо, чтобы вектора $\vec{v}$ и $\vec{B}$ были перпендикулярны линии действия силы $\vec{F}$, а перпендикулярная $\vec{B}$

составляющая скорости частицы должна иметь величину $v_{\perp} = \dfrac{F}{|q|B}$. Продольная (параллельная $\vec{B}$) составляющая скорости при этом может быть любой.

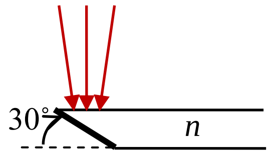
Решение задачи: Прямолинейное движение частицы при наличии магнитного поля и поля тяжести возможно только как дрейфовое движение, описанное в ответе на вопрос. Поэтому линии индукции магнитного поля должны проходить так, чтобы перпендикулярные $\vec{B}$ составляющие скоростей вдоль обоих «особых» направлений, которые у нас выбраны в качестве направлений осей x и y, были равны. Для этого перпендикуляр к $\vec{B}$ должен быть биссектрисой угла между скоростями, а величина индукции должна быть равной $B = \dfrac{mg}{qv_{\perp}} = \dfrac{g\sqrt{2}}{\beta v} \approx 80{,}8$ Тл. С учетом знака заряда (сила Лоренца в обоих случаях должна быть направлена вверх) находим, что $\vec{B}$ должна быть направлена «влево-вверх», под углом 45° к оси y. В выбранной системе координат $\vec{B} = \left(-\dfrac{g}{\beta v}, \dfrac{g}{\beta v}\right) = \left(-\dfrac{400}{7}, +\dfrac{400}{7}\right)$ Тл.

ОТВЕТ: вектор $\vec{B} = \left(-\dfrac{g}{\beta v}, \dfrac{g}{\beta v}\right) = \left(-\dfrac{400}{7}, +\dfrac{400}{7}\right)$ Тл, величина индукции $B = \dfrac{g\sqrt{2}}{\beta v} \approx 80{,}8$ Тл.

Задание 4:

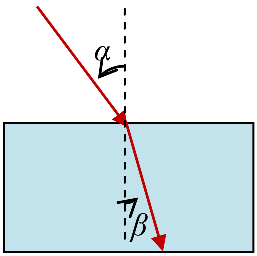
Вопрос: Сформулируйте закон преломления света. При каких условиях он применим?

Задача: Плоскопараллельная пластина, изготовленная из прозрачного материала с показателем преломления $n = \sqrt{2} \approx 1{,}41$, срезана с одной стороны под углом $30°$, и срез покрыт хорошо отражающим слоем. Узкие пучки параллельных световых лучей, излучаемые лазером, направляются на пластину в плоскости,



перпендикулярной ребру среза, таким образом, что они отражаются от среза. При каких углах падения эти пучки попадут на край пластины, противоположный срезу, с интенсивностью, близкой к исходной? Размеры пластины очень значительно превышают ее толщину.

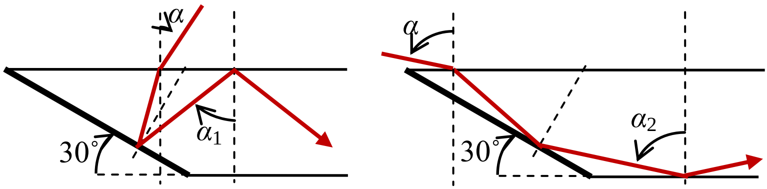
Ответ на вопрос: Закон преломления света можно сформулировать следующим образом: «При падении светового луча на границу раздела прозрачных сред различной оптической



плотности он испытывает преломление. Луч падающий, луч преломленный и нормаль к границе раздела сред в точке падения лежат в одной плоскости. Отношение синусов углов падения (α) и преломления (β) равно постоянной для данных сред величине, называемой относительным показателем преломления

этих сред: $\dfrac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = n$ (закон Снеллиуса).» Относительный показатель преломления равен отношению скоростей распространения света в первой и второй средах. Этот закон является одним из законов геометрической оптики, поэтому он справедлив только в соответствующем приближении, то есть в случае, когда характерные размеры оптических неоднородностей и поперечные размеры световых пучков много больше длины световой волны. Кроме того, при падении из оптически менее плотной среды (при $n < 1$) для углов падения, превышающих угол полного внутреннего отражения $\alpha \geq \alpha_c = \arcsin(n)$, преломленный луч отсутствует.

Решение задачи: Для того, чтобы световой луч дошел до края длинной тонкой пластины, почти не потеряв в интенсивности, он должен при отражении от граней пластины испытывать полное внутреннее отражение. Значит, угол его падения на грани пластины



должен превышать угол $\alpha_c = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$. Рассмотрим два возможных случая отклонения луча от нормального падения (см. рисунок):

1) Отклонение «вправо» от нормали (будем для этого случая считать угол падения α и соответствующий ему угол преломления β положительными). Как видно из построения в этом случае, угол падения на грань пластины после отражения от среза $\alpha_1 = \frac{\pi}{3} - \beta$, то есть для полного отражения нужно, чтобы $\frac{\pi}{3} - \beta \geq \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \beta \leq \frac{\pi}{3} - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$. Для угла падения это означает, что

$$\sin(\alpha) = n \cdot \sin(\beta) \leq n \cdot \sin\left[\frac{\pi}{3} - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{\sqrt{3(n^2-1)} - 1}{2}.$$

Итак, для этого случая $\alpha \leq \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \approx 21{,}5°$. Следует отметить, что при любых α для заданного $n = \sqrt{2}$ угол $\beta \leq 45°$, поэтому $\alpha_1 > 0$ – направление падения отраженного от среза луча измениться не может.

2) Отклонение «влево» от нормали ($\alpha < 0$ и $\beta < 0$). Теперь угол падения на грань пластины после отражения от среза $\alpha_2 = \frac{2\pi}{3} + \beta$, и для полного отражения нужно, чтобы $\frac{2\pi}{3} + \beta \geq \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \beta \geq \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{2\pi}{3}$. Соответственно $\sin(\alpha) \geq -\frac{\sqrt{3(n^2-1)}+1}{2}$, и при заданном $n = \sqrt{2}$ это условие выполняется для любых $-90° < \alpha \leq 0$.

Ясно, что в обоих случаях при выполнении условия полного внутреннего отражения в первом отражении луча от грани пластины оно будет выполняться и в последующих отражениях, и луч дойдет до противоположного края пластины.

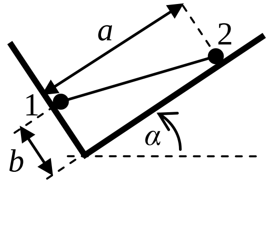
ОТВЕТ: $-90° < \alpha \leq \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \approx 21{,}5°$.

БИЛЕТ № 04

Задание 1:

Вопрос: В каких случаях центр тяжести твердого тела (т.е. точка приложения равнодействующей сил тяжести) совпадает с его центром масс? Ответ объяснить.

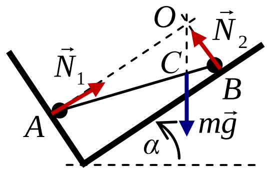
Задача: «Гантель» из легкого жесткого стержня и двух массивных маленьких шариков одинакового радиуса положили в гладкую яму в виде прямого двугранного угла, одна из плоскостей которого составляет угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Оказалось, что гантель находится в равновесии, если отношение расстояний от шариков до вершины угла $\frac{a}{b} \equiv n = 3$.



Найти отношение масс шариков.

Ответ на вопрос: В однородном поле тяжести. Действительно, равнодействующая сила должна быть равна сумме составляющих сил, и ее момент относительно выбранной оси должен быть равен сумме моментов составляющих сил. Если направить ось x горизонтально, а ось y – вертикально (по направлению $\vec{g}$), и разбить тело на «материальные точки», то суммарный момент сил тяжести, действующих на эти точки, $M = \sum m_i g \cdot x_i = g \sum m_i \cdot x_i = mg \cdot x_{ЦМ}$, где m - масса тела, а $x_{ЦМ}$ - координата его центра масс. Таким образом, в однородном поле тяжести точкой приложения равнодействующей сил тяжести действительно является его центр масс.

Решение задачи: В состоянии равновесия сумма моментов сил тяжести и сил нормальной реакции, действующих на гантель, должна быть равна нулю. Если считать моменты относительно точки *O*, находящейся на пересечении линий действия сил нормальной реакции, то становится ясно, что и момент силы тяжести относительно этой точки должен



быть равен нулю, и поэтому линия действия силы тяжести (а это вертикаль, проходящая через центр масс гантели) должна проходить через точку *O*. Значит, центр масс гантели находится в точке *C*, и $\dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{|AC|}{|BC|}$. Пусть величина угла $O\hat{C}B \equiv \beta$. Тогда, поскольку $C\hat{O}B = \alpha$, то по теореме синусов $|BC| = a\dfrac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$.

Аналогично $|AC| = b\dfrac{\sin((\pi/2)-\alpha)}{\sin(\pi-\beta)} = b\dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\beta)}$. Следовательно:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{b}{a} ctg(\alpha) = 3\sqrt{3} \approx 5{,}2\,.$$

ОТВЕТ: $\dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{b}{a} ctg(\alpha) = 3\sqrt{3} \approx 5{,}2$.

Задание 2:

Вопрос: В герметичном баллоне находятся одинаковые количества гелия и неона. Снаружи баллона – атмосфера из азота. В стенке баллона прокололи небольшое отверстие. Количество какого из газов (гелия или неона) будет больше спустя небольшое время после этого?

Задача: Вертикальная гладкая трубка с запаянными концами разделена на две части маленькой каплей ртути. Над каплей находится неон, под ней – гелий (газы не проникают мимо ртутной «пробки»), причем массы газов одинаковы. Изначально капля находилась точно посередине трубки. Во сколько раз нужно увеличить абсолютную температуру газов, чтобы капля стала делить объем трубки в соотношении 1:2?

Ответ на вопрос: Неона. Уменьшение количества газа зависит от того, сколько его молекул успело покинуть баллон. Количество вылетевших за малое время молекул, в свою очередь, зависит от площади отверстия, концентрации и скорости молекул. Для двух газов изначально совпадают все эти характеристики, кроме скоростей молекул – так как молекулы гелия более легкие, то при той же температуре (то есть при той же средней кинетической энергии молекул) они движутся с большими скоростями. Значит, за малое время вылетит больше молекул гелия, а останется больше молекул неона. Внешняя атмосфера на этот процесс не влияет.

Решение задачи: Вес капли массой M уравновешивается разностью сил давления газов, то есть $Mg = p_1 S - p_2 S$. Из уравнения Менделеева-Клапейрона для каждого газа $pSl = \dfrac{m}{\mu} RT \Rightarrow pS = \dfrac{m}{\mu}\dfrac{RT}{l}$ (l - длина занятого газом участка трубки, а m - его масса). При начальной температуре T длины участков равны половине длины трубки: $l_1 = l_2 = \dfrac{L}{2}$. При конечной температуре T': $l_1' = \dfrac{2L}{3}$, $l_2' = \dfrac{L}{3}$ (видно, что давление гелия при нагревании будет расти быстрее, чем давление неона, и поэтому поршень будет подниматься). Следовательно,

$$Mg = \frac{m}{\mu_1}\frac{2RT}{L} - \frac{m}{\mu_2}\frac{2RT}{L} = \frac{m}{\mu_1}\frac{3RT'}{2L} - \frac{m}{\mu_2}\frac{3RT'}{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{T'}{T} = \frac{4(\mu_2 - \mu_1)}{3(\mu_2 - 2\mu_1)}.$$

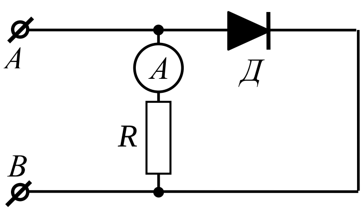
С учетом того, что молярные массы гелия $\mu_1 = 4$ г/моль и неона $\mu_2 = 20$ г/моль, то $\dfrac{T'}{T} = \dfrac{16}{9}$.

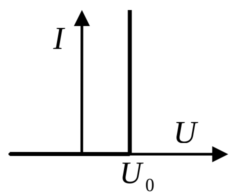
ОТВЕТ: $\dfrac{T'}{T} = \dfrac{4(\mu_2 - \mu_1)}{3(\mu_2 - 2\mu_1)} = \dfrac{16}{9} \approx 1{,}78$.

Задание 3:

Вопрос: Опишите различие в механизме проводимости примесных полупроводников разного типа.

Задача: В схеме, показанной на рисунке слева, диод *Д* не является идеальным – его вольтамперная характеристика показана на рисунке справа. При подключении к клеммам А и В одного аккумулятора амперметр показывает ток $I_1 = 0{,}36$ А,





при подключении двух таких аккумуляторов, соединенных последовательно – ток $I_2 = 0{,}48$ А, трех – ток $I_3 = 0{,}50$ А. При последовательном подключении четырех таких аккумуляторов ток в ветви с амперметром остается равным $I_3 = 0{,}50$ А. Найти ЭДС и внутреннее сопротивление источника, а также сопротивление резистора R, если пороговое напряжение диода $U_0 = 4{,}5$ В. Внутреннее сопротивление амперметра пренебрежимо мало.

Ответ на вопрос: Примесные проводники разделяют на полупроводники n-типа и p-типа в зависимости от того, является примесь «донорной» (в этом случае атом примеси имеет лишний валентный электрон по сравнению с атомом самого полупроводника, и этот электрон, перемещается по решетке полупроводника) или «акцепторной» (напротив, атом примеси имеет на один электрон меньше, и эффективно захватывает электрон, принадлежащий соседнему атому решетки полупроводника, тот, в свою очередь, также производит захват, и в результате происходит перемещение по кристаллу «дырки» - незанятой электронной вакансии). Таким образом, можно говорить, что в полупроводниках n-типа свободными носителями заряда являются электроны (это «электронный» механизм проводимости), а в полупроводниках p-типа – «дырки» («дырочный» механизм проводимости).

Решение задачи: Если диод находится в открытом состоянии, то напряжение на нем равно U_0. Поэтому в этом случае ток в ветви с амперметром и резистором $I_R = \dfrac{U_0}{R}$, и не зависит от ЭДС и внутреннего сопротивления источника (и поэтому не зависит от количества подключенных аккумуляторов). Если же диод заперт, то для схемы с n аккумуляторами, ЭДС и внутреннее сопротивление каждого из которых равны соответственно $\mathcal{E}$ и r, $I_R = \dfrac{n\mathcal{E}}{R+nr}$. Режим с запертым диодом реализуется, если напряжение на резисторе меньше U_0: $I_R R < U_0 \Rightarrow n\mathcal{E}R < (R+nr)U_0 \Rightarrow n < \dfrac{RU_0}{\mathcal{E}R - U_0 r}$. Поэтому данные условия свидетельствуют о том, что при $n = 1{,}2$ диод заперт, а при $n = 3{,}4...$ диод открыт. Следовательно: $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{R+r}$,

$I_2 = \dfrac{2\mathcal{E}}{R+2r}$, а $I_3 = \dfrac{U_0}{R} \Rightarrow R = \dfrac{U_0}{I_3} = 9$ Ом. Исключая ЭДС из первых двух соотношений, находим, что $r = \dfrac{2I_1 - I_2}{2(I_2 - I_1)} \dfrac{U_0}{I_3} = 9$ Ом, а затем получаем выражение для ЭДС: $\mathcal{E} = \dfrac{I_1 I_2}{2I_3(I_2 - I_1)} U_0 = 6{,}48$ В. Можно убедиться, что найденные параметры приводят к значению $\dfrac{RU_0}{\mathcal{E}R - U_0 r} = \dfrac{25}{11} \approx 2{,}3$, то есть действительно диод открывается именно при добавлении третьего аккумулятора.

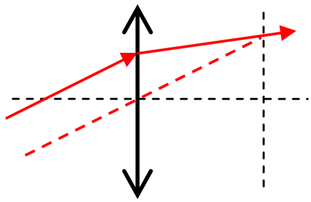
ОТВЕТ: $\mathcal{E} = \dfrac{I_1 I_2}{2I_3(I_2 - I_1)} U_0 = 6{,}48$ В, $r = \dfrac{2I_1 - I_2}{2(I_2 - I_1)} \dfrac{U_0}{I_3} = 9$ Ом, $R = \dfrac{U_0}{I_3} = 9$ Ом.

Задание 4:

Вопрос: Опишите способ построения продолжения произвольного параксиального луча, падающего на поверхность тонкой собирающей линзы (в любой точке под любым углом).

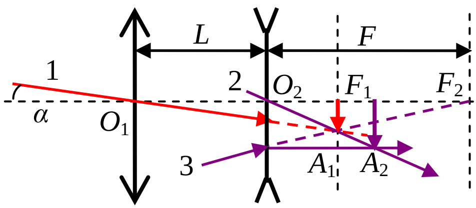
Задача: С помощью объектива, состоящего из собирающей и рассеивающей линзы, величины фокусных расстояний которых совпадают ($F_1 = -F_2 \equiv F$), расположенных на общей оси на расстоянии $L = \dfrac{2}{3}F$ друг от друга, получили на экране изображение Солнца. Затем точно такое же по размеру изображение Солнца на этом экране удалось получить с помощью одной линзы. Чему равно ее фокусное расстояние?

Ответ на вопрос: Для построения продолжения произвольного луча можно использовать тот факт, что тонкая собирающая линза собирает параллельные лучи так, что они пересекаются в фокальной плоскости линзы. Поэтому достаточно построить вспомогательный луч, параллельный рассматриваемому и проходящий



через оптический центр линзы без преломления. Эти лучи должны пересечься в фокальной плоскости (см. рисунок).

Решение задачи: Поскольку расстояние до Солнца значительно превосходит величину фокусного расстояния любой из рассматриваемых линз, то его изображение, создаваемое любой собирающей линзой, будет находиться в ее фокальной плоскости и будет иметь радиус $r = F \cdot tg(\alpha)$, где α – половина углового размера Солнца, видимого с Земли (мы считаем, что линзы всегда располагают так, что их оптическая ось направлена на Солнце) Сначала применим это утверждение к первой линзе объектива, и будем рассматривать создаваемое ей изображение мнимым источником для рассеивающей линзы. Проведем построение хода лучей: луч 1, идущий от крайней точки Солнца в оптический центр первой линзы объектива, создает изображение этой точки A_1 в фокальной плоскости этой линзы, на расстоянии r от оси.



Изображение этой точки, даваемое второй линзой (A_2) можно построить с помощью лучей 2 (идущего через оптический центр второй линзы) и 3 (идущего в дальний фокус второй линзы – после преломления этот луч пойдет параллельно оптической оси системы). Поэтому радиус изображения Солнца, даваемого объективом (r'), можно найти из подобия треугольников: $\dfrac{r'}{r} = \dfrac{|O_2F_2|}{|F_1F_2|} = \dfrac{F}{L} \Rightarrow r' = \dfrac{F^2}{L} tg(\alpha)$. Поскольку изображение, создаваемое одной линзой, имело такой же радиус, то $r' = F' \cdot tg(\alpha) = \frac{F^2}{L} tg(\alpha) \Rightarrow F' = \frac{F^2}{L} = \frac{3}{2} F$.

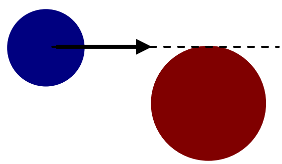
ОТВЕТ: $F' = \frac{F^2}{L} = \frac{3}{2} F$.

БИЛЕТ № 06

Задание 1:

Вопрос: Гладкая шайба, скользящая по горизонтальной поверхности, столкнулась с такой же (по размеру и массе) покоящейся шайбой. Вектор ее скорости в результате удара повернулся на $30°$. Под каким углом к направлению движения налетающей шайбы направлен вектор скорости другой шайбы после удара?

Задача: Гладкая цилиндрическая шайба покоится на гладкой горизонтальной поверхности. В нее врезается шайба, изготовленная из того же материала, той же высоты, радиус которой в $n = 1{,}5$ раза меньше, чем у покоящейся. Линия движения центра налетающей шайбы касается боковой поверхности покоящейся. Под какими углами к направлению движения налетающей шайбы будут двигаться шайбы после упругого удара?

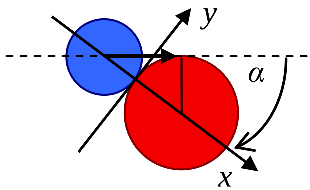


Ответ на вопрос: Будем считать удар упругим. Тогда закон сохранения импульса для двух одинаковых шайб $m\vec{v}_0 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ($\vec{v}_{1,2}$ - скорости налетающей и первоначально покоящейся шайб после удара). Аналогичное сокращение масс произойдет при записи закона сохранения энергии, и поэтому $\vec{v}_0^2 = \vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2 = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)^2 \Rightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$, то есть скорости шайб после удара перпендикулярны, и искомый угол $\beta = 90° - 30° = 60°$. При частично неупругом ударе угол между векторами скоростей должен быть меньше $90°$, и поэтому

$\beta < 60°$. Однако степень неупругости должна быть не слишком велика – иначе угол поворота скорости не сможет быть таким заметным.

***ПРИМЕЧАНИЕ*:** В соответствии с указаниями, данными участникам, для зачета вопроса достаточно было разобрать случай упругого соударения.

Решение задачи: Рассмотрим момент соударения шайб. Поскольку сил трения нет, то силы взаимодействия шайб направлены перпендикулярно поверхности соприкосновения – по оси x (см. рисунок). Поэтому проекции их скоростей на ось y сохраняются. Заметим, что треугольник, образованный центрами шайб и точкой касания линии движения центра налетающей шайбы и боковой поверхности покоящейся, прямоугольный, и его гипотенуза равна сумме радиусов шайб. Поэтому $\sin(\alpha) = \frac{R}{R+r} = \frac{n}{n+1}$. Значит, проекции скоростей шайб после удара на ось y: $V_y = 0$, $v_y = v_0 \sin(\alpha) = \frac{n v_0}{n+1}$. Кроме того, отношение масс шайб $\frac{M}{m} = n^2$. С учетом этого закон сохранения проекции импульса на ось x дает:



$$m v_0 \cos(\alpha) = m v_x + M V_x \Rightarrow v_0 \cos(\alpha) = v_x + n^2 V_x.$$

Так как энергия движения шайб по оси y не изменилась, то энергия движения по оси x тоже осталась неизменной:

$$\frac{m v_0^2 \cos^2(\alpha)}{2} = \frac{m v_x^2}{2} + \frac{M V_x^2}{2} \Rightarrow v_0^2 \cos^2(\alpha) = v_x^2 + n^2 V_x^2.$$

Решая полученную систему, и учитывая, что $\cos(\alpha)=\sqrt{1-\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2n+1}}{n+1}$, находим, что $v_x=-\dfrac{(n^2-1)\sqrt{2n+1}}{(n+1)(n^2+1)}v_0$. Следовательно, налетающая шайба после удара движется под углом $\beta=\dfrac{\pi}{2}+arctg\left(\dfrac{(n^2-1)\sqrt{2n+1}}{n(n^2+1)}\right)$ к оси x (покоящаяся шайба после удара движется по оси x). Итак: первоначально покоящаяся шайба движется под углом $\alpha=\arcsin\left(\dfrac{n}{n+1}\right)=\arcsin(0{,}6)\approx 37°$ к направлению скорости налетающей шайбы. Поскольку $\beta=\dfrac{\pi}{2}+arctg\left(\dfrac{20}{39}\right)\approx 117°$, то вектор скорости налетающей шайбы поворачивается на угол $\gamma=\beta-\alpha=\dfrac{\pi}{2}+arctg\left(\dfrac{20}{39}\right)-\arcsin(0{,}6)\approx 80°$.

ОТВЕТ: первоначально покоящаяся шайба движется под углом $\alpha=\arcsin(0{,}6)\approx 37°$ к направлению скорости налетающей шайбы, вектор скорости налетающей шайбы поворачивается на угол $\gamma=\dfrac{\pi}{2}+arctg\left(\dfrac{20}{39}\right)-\arcsin(0{,}6)\approx 80°$ (поскольку калькуляторами на олимпиаде пользоваться не разрешается, явное вычисление числовых значений обратных тригонометрических функций не требовалось).

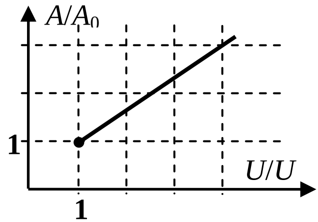
Задание 2:

Вопрос: Как выглядит диаграмма изобарного процесса над одноатомным идеальным газом в координатах $A-U$

(«совершенная газом работа – внутренняя энергия»), выходящая из точки (A_0, U_0)?

Задача: Давление одного моля одноатомного идеального газа изохорически изменили от начального до некоторого значения. Затем изобарически уменьшили объем газа в $n = 3$ раза. После этого газ изохорически перевели в конечное состояние. Зная, что температура газа в конечном состоянии в $k = 1{,}2$ раза превышает его температуру в начальном состоянии и что полное количество теплоты, которым обменялся газ с внешними телами, равно нулю, найти отношение максимального давления газа к минимальному в этом процессе.

Ответ на вопрос: Внутренняя энергия одноатомного идеального газа $U = \frac{3}{2} pV$. Работа в изобарном процессе $A = p\Delta V = \Delta(pV) = \frac{2}{3}\Delta U$, поэтому уравнение диаграммы этого процесса можно записать как $A = A_0 + \frac{2}{3}(U - U_0)$ (см. рисунок).



Решение задачи: Пусть p_0 и V_0 - начальные значения давления и объема, p_1 - промежуточное значение давления, а p_2 - конечное. В соответствие с уравнением состояния и данными задачи:

$$\left\{\begin{array}{c} V_2 = V_1 = \dfrac{V_0}{n} \\ p_2 V_2 = RT_2 = kRT_0 = k \cdot p_0 V_0 \end{array}\right\} \Rightarrow p_2 = kn \cdot p_0 > p_0 .$$

Кроме того, поскольку во всем процессе работа совершается только при изобарическом сжатии $A = p_1\left(\frac{V_0}{n} - V_0\right) = -\frac{n-1}{n} p_1 V_0$, а изменение внутренней энергии одноатомного идеального газа

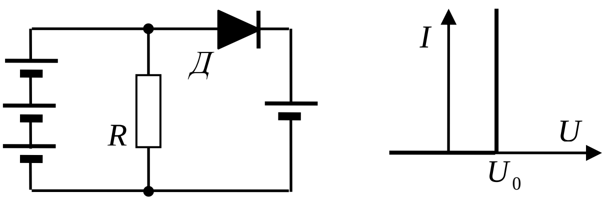
$\Delta U = \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_0V_0) = \frac{3}{2}(k-1)p_0V_0$. В соответствии с первым началом термодинамики $Q = -p_1\frac{n-1}{n}V_0 + \frac{3}{2}(k-1)p_0V_0 = 0$, и из этого уравнения можно выразить давление в промежуточном состоянии: $p_1 = \frac{3n}{2(n-1)}(k-1)p_0 < p_0$. Значит, оно и является минимальным давлением, и $\frac{p_{\max}}{p_{\min}} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{2k(n-1)}{3(k-1)} = 8$.

ОТВЕТ: $\frac{p_{\max}}{p_{\min}} = \frac{2k(n-1)}{3(k-1)} = 8$.

Задание 3:

Вопрос: Резистор и идеальный диод соединены последовательно и подключены к полюсам источника, величина напряжения которого остается постоянной, а полярность изменяется на противоположную каждую секунду. Как изменится тепло, выделяющееся в резисторе за 10 секунд, если его с тем же диодом подключить к полюсам этого источника параллельно?

Задача: В схеме, показанной на рисунке слева, диод *Д* не является идеальным – его вольтамперная характеристика



показана на рисунке справа. Все источники одинаковы, их внутреннее сопротивление равно r, а сопротивление резистора $R = 2r$. Найдите зависимость мощности тепловыделения в резисторе от величины ЭДС источников. Пороговое напряжение диода U_0 считать известным.

Ответ на вопрос: При последовательном подключении ток через резистор течет только в той половине каждого периода (равного 2 с), когда диод открыт, а при параллельном подключении – только когда диод заперт (сопротивление идеального диода в открытом состоянии равно нулю). Величина этого тока в обоих случаях равна частному от деления напряжения источника на сопротивление резистора. Поэтому средняя мощность тепловых потерь за период и количество тепла, выделяющегося за 5 полных периодов, не изменятся.

Решение задачи: В этой схеме возможны два состояния диода: он может быть открыт либо заперт. Рассмотрим сначала ситуацию, когда диод заперт. В этом случае ток в ветви с диодом отсутствует, а ток через резистор $I = \dfrac{3\mathrm{E}}{R+3r} = \dfrac{3\mathrm{E}}{5r}$ (E – величина ЭДС источников). Следовательно, мощность тепловыделения в резисторе $P = \left(\dfrac{3\mathrm{E}}{5r}\right)^2 R = \dfrac{18\,\mathrm{E}^2}{25r}$. Для того, чтобы диод действительно был заперт, напряжение на резисторе должно удовлетворять требованию $IR = \dfrac{6}{5}\mathrm{E} \le \mathrm{E} + U_0 \Rightarrow \mathrm{E} \le 5U_0$. При $\mathrm{E} > 5U_0$ диод открыт, и через него течет некоторый ток I_1. Тогда (в силу непрерывности тока) в ветви с тремя источниками должен течь ток $I + I_1$, поэтому для этого состояния диода:

$$\begin{cases} IR = U_0 + \mathrm{E} + I_1 r \\ IR = 3\mathrm{E} - (I + I_1)3r \end{cases} \Rightarrow I = \frac{3(2\mathrm{E} + U_0)}{11r} \Rightarrow P = \frac{18(2\mathrm{E} + U_0)^2}{121r}.$$

ОТВЕТ: $$P = \begin{cases} \dfrac{18\,\mathrm{E}^2}{25r}, & \mathrm{E} \le 5U_0 \\ \dfrac{18(2\mathrm{E} + U_0)^2}{121r}, & \mathrm{E} > 5U_0 \end{cases}.$$

Задание 4:

Вопрос: Чему может быть равно увеличение (отношение размера изображения к размеру предмета), даваемое тонкой рассеивающей линзой?

Задача: Точечный источник света размещен на главной оптической оси тонкой рассеивающей линзы. Расстояние между источником и его изображением равно L_1. Если передвинуть источник в точку, где находится его изображение, то изображение сместится в ту же сторону на расстояние L_2. Найти оптическую силу линзы (напомним, что у рассеивающей линзы она считается отрицательной).

Ответ на вопрос: Согласно формуле тонкой линзы, расстояние от изображения до линзы b связано с расстоянием от предмета до линзы: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}\Rightarrow b=\frac{aF}{a-F}$. Для поперечного увеличения $\Gamma_{\perp}=-\frac{b}{a}=\frac{F}{F-a}$. У рассеивающей линзы фокусное расстояние считается отрицательным, и поэтому $\Gamma_{\perp}=\frac{|F|}{|F|+a}$. Как видно, поперечное увеличение тонкой рассеивающей линзы для любого действительного объекта положительно (изображение всегда прямое) и меньше 1.

Решение задачи: Пусть a - расстояние до линзы от первоначального положения источника. Линза рассеивающая, поэтому расположенное на расстоянии L_1 от источника изображение – мнимое, поэтому расстояние от изображения до линзы следует считать отрицательным (пусть оно будет $-b$). Тогда $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=-\frac{1}{|F|}$. Аналогично обозначая расстояние от второго изображения до линзы $-c$, получим уравнение $\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=-\frac{1}{|F|}$. Кроме того, очевидно $L_1=a-b$, $L_2=b-c$.

Решая полученную систему, находим: $D = -\dfrac{1}{|F|} = -\dfrac{(L_1 - L_2)^2}{2L_1L_2(L_1 + L_2)}$.

ОТВЕТ: $D = -\dfrac{(L_1 - L_2)^2}{2L_1L_2(L_1 + L_2)}$.

Задания отборочного этапа олимпиады школьников «Покори Воробьёвы горы!» по физике

2014-2015 учебный год

7 – 9 классы

Часть I

Эта часть представляла собой индивидуальное для каждого участника тестовое задание (причем все варианты тестового задания были равнозначны). Ниже приводится в качестве примера разбор одного из вариантов.

Вопрос 1 *(5 баллов)***.**

Четыре приятеля взяли одинаковые чашки горячего кофе с одинаковой температурой, по два кусочка сахара и по одному пакетику сливок комнатной температуры. Все они начали пить кофе через 5 минут, хотя действовали по-разному. Первый растворил в кофе сахар и сливки на первой минуте ожидания, второй – на последней минуте ожидания, третий растворил сахар на первой минуте ожидания, а сливки добавил на последней, а четвертый добавил сливки на первой минуте ожидания, а сахар растворил на последней. Кто из них пил самый холодный кофе?

Варианты ответа:

а) первый, б) второй, в) третий, г) четвертый, д) все пили кофе одинаковой температуры.

Правильный ответ: б) второй.

Комментарий. И растворение сахара, и добавление сливок понижает температуру кофе (а сливки еще создают жировую плену на его поверхности). В результате эти действия замедляют его остывание. Следовательно, для получения наиболее горячего кофе необходимо произвести эти действия как можно раньше, а для получения наиболее холодного – как можно позже.

Вопрос 2 *(5 баллов)*.

Из однородной проволоки изготовлена спираль, составленная из прямолинейных отрезков убывающей длины: первый отрезок – 11 см, второй – 9 см, третий – 8 см, четвертый и пятый – по 7 см, шестой – 5 см, седьмой – 4 см, восьмой – 3 см, девятый и десятый – по 2 см. Соседние отрезки перпендикулярны друг другу (рисунок 1). Известно, что, благодаря тепловому расширению, длина отрезка из этой проволоки увеличивается на 0,1% при нагревании на 1ºС.

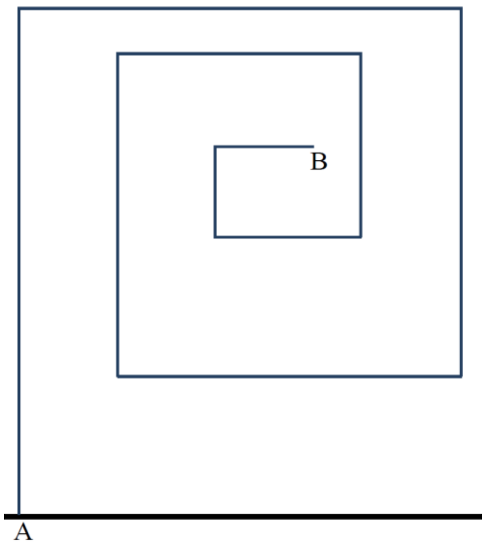


Рисунок 1.

Конец А спирали жестко закреплен на не расширяющейся при нагревании подставке. На сколько миллиметров сместится от начального положения конец В при нагревании спирали на 10ºС? Ответ запишите с округлением до целого значения.

Правильный ответ: 1.

Комментарий. При нагревании на 10ºС все размеры в «спирали» увеличиваются на 1%, и точка А остается неподвижной. В частности, увеличивается в этой же пропорции длина отрезка АВ. Изначально смещение от точки А к В по горизонтали составляло (9-7+5-3+2) см, то есть 6 см, а по вертикали – (11-8+7-4+2) см = 8 см. Поэтому начальная длина этого отрезка по теореме Пифагора 10 см, а после нагревания на 10ºС – 10,1 см. Итак, точка В сместится в направлении от точки А на 1 мм.

Вопрос 3 *(5 баллов)***.**

Мистер Икс прячется в кладовке. Внешняя поверхность двери между этой кладовкой и очень большим темным залом зеркальная. Точно напротив зеркальной двери у противоположной стены стоит мистер Игрек с зажженной свечой в руках. Дверь начинает медленно открываться внутрь кладовки. Ширина двери $D = 70$ см. Мистер Икс стоит у стены кладовки, лицом в сторону двери, и от его лица до края двери $L = 72$ см (см. рисунок 2). В тот момент, когда ширина открывшегося проема составила $d = 42$ см, мистер Икс своим правым глазом увидел свечу. Определите расстояние x между стенкой и правым глазом мистера Икса. Ответ запишите в сантиметрах целым числом.

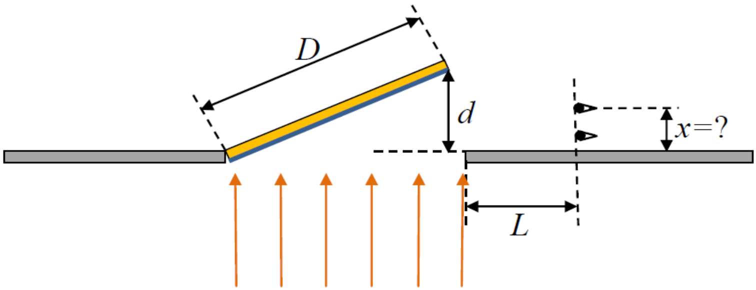
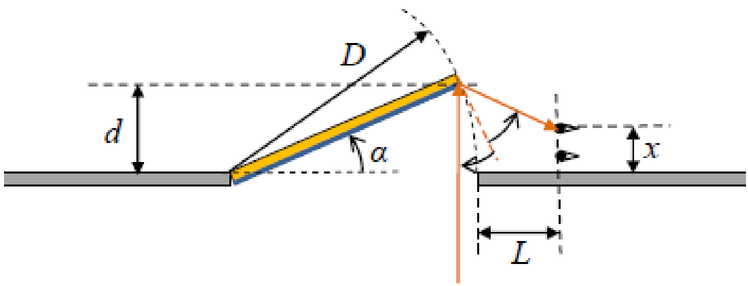


Рисунок 2.

Правильный ответ: 17 (принимался также ответ 16).

Комментарий. Для учеников младших классов наиболее простой способ решения – графический. Выполнив в разумном масштабе построение с помощью циркуля, линейки и транспортира, с учетом закона отражения света (в правый глаз



мистера Икса первым попадает луч, отраженный от края двери, и при этом падающие лучи идут практически перпендикулярно стене, а угол падения равен углу отражения), можно измерить расстояние x на полученном чертеже.

Аналитическое решение было возможно только для тех участников, которые были знакомы с тригонометрическими функциями. Поскольку $\sin(\alpha)=\dfrac{d}{D}$, и при этом, как видно из рисунка, $d - x = [L + D - D\cos(\alpha)]\dfrac{\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$, то есть

$x = d - [L + D - D\cos(\alpha)]\dfrac{1 - 2\sin^2(\alpha)}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}$, то

$x = d - [L + D - \sqrt{D^2 - d^2}\,]\dfrac{D^2 - 2d^2}{2d\sqrt{D^2 - d^2}} \approx 16{,}9$ см. При округлении до целого получаем ответ $x \approx 17$ см. Учитывая возможные погрешности при построении, в качестве правильного во всех вариантах принимался любой целый ответ, отличающийся от точного менее чем на 1 см.

Вопрос 4 *(15 баллов)*.

При изменении силы тока, протекающего через спираль лампы накаливания, изменяется равновесная температура спирали. Из-за этого меняется ее сопротивление, и в результате для лампы накаливания не действует закон Ома в обычной форме: ток через лампу не пропорционален приложенному напряжению. Рассмотрим схему, показанную на рисунке 3. Между клеммами *A* и *B* поддерживается неизменное напряжение. Если замкнуть клеммы *C* и *D* проводом с пренебрежимо малым сопротивлением, то практически идеальный амперметр в схеме покажет силу тока, равную $I = 4{,}20$ А. Допустим, что у нас есть две одинаковые лампочки, для которых связь силы тока с приложенным напряжением дается формулой $I(U) = I_0\sqrt{\dfrac{U}{U_0}}$. Если соединить эти лампочки последовательно и подключить к клеммам *C* и *D*, амперметр покажет ток $I_1 = 0{,}70$ А. Каковы будут показания амперметра, если подключить к клеммам *C* и *D* эти же две лампочки, но соединенные параллельно? Ответ запишите в амперах, в десятичной форме, с двумя знаками после запятой.

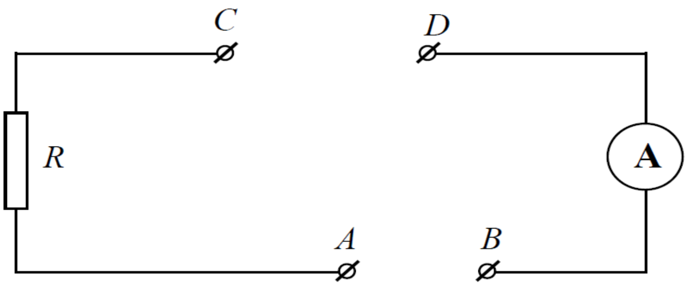


Рисунок 3.

Правильный ответ: 1,68.

Комментарий. Опыт с коротким замыкание клемм C и D позволяет записать для напряжения между клеммами A и B: $U_{AB} \approx IR$. При последовательном подключении ламп ток в них одинаков и равен I_1, а напряжения на лампах одинаковы и равны $U(I_1) = U_0\left(\frac{I_1}{I_0}\right)^2$. Поэтому: $2U_0\left(\frac{I_1}{I_0}\right)^2 = U_{AB} - I_1R = (I - I_1)R$. Если при параллельном включении через амперметр течет ток I_2, то ток в каждой из ламп равен $\frac{I_2}{2}$, и поэтому $U_0\left(\frac{I_2}{2I_0}\right)^2 = U_{AB} - I_2R = (I - I_2)R$. Разделив эти соотношения друг на друга, получаем уравнение для определения I_2: $I_2^2 + \frac{8I_1^2}{I - I_1}I_2 - \frac{8II_1^2}{I - I_1} = 0$. Физический смысл имеет положительный корень, поэтому $I_2 = \frac{2I_1}{I - I_1}[\sqrt{4I_1^2 + 2I(I - I_1)} - 2I_1] = 1{,}68\,\text{А}$.

Максимальный балл за часть I: 30 баллов.

Часть II

1. ***«Тетрадные измерения»*** (*15 баллов*). Возьмите лист из стандартной тетради «в клеточку». Как, не пользуясь ничем, кроме ножниц, двух деревянных планок и самого листа, измерить его толщину? Опишите методику измерений, выполните их для имеющегося у Вас подходящего листа. Какое значение толщины Вы получили? Какова точность Вашего результата (постарайтесь сделать так, чтобы она была достаточно хорошей и используйте для этого все разрешенное оборудование)?

Решение:

Ножницами можно вырезать из листа «полоски» шириной в одну-две-три клетки. Если складывать полоски по «гармошкой», а затем с помощью планок плотно прижимать «гармошки» друг к другу, то расстояние между планками будет соответствовать толщине большого числа листов бумаги. Можно добиться того, чтобы это расстояние оказалось равно стороне одной клетки листа, который используется еще и как линейка – длина этой стороны примерно 5 мм. Источники ошибки – отличие длины стороны от 5 мм (допускается оценка участником возможного разброса без специального основания) и разброс количества слоев бумаги в 5 мм. Лучше всего поставить эксперимент с «прижатием» хотя бы три – пять раз. «Реалистичные» значения: сторона клетки $a = (5 \pm 0{,}2)$ мм, количество «слоев» в 5 мм варьируется на 4-8 от измерения к измерению (при достаточно качественном прижатии). Конкретное количество слоев зависит от сорта бумаги – в изученных образцах оно колебалось от 80 до 100. Например: если $a = (5 \pm 0{,}1)$ мм, а $N = (94 \pm 3)$, то толщина листа $d = \dfrac{a}{N} \approx 0{,}0532$ мм. Ошибку измерения можно оценить, обратив внимание, что $\dfrac{0{,}1}{5} = 0{,}02$ и $\dfrac{3}{94} \approx 0{,}03$, так что суммарная ошибка не превышает 5%: $d = (0{,}053 \pm 0{,}003)$ мм. На самом деле, с учетом законов статистики, стандартное отклонение $\dfrac{\Delta d}{d} \approx 0{,}036$, и реально

точность даже несколько выше: $d = (0{,}053 \pm 0{,}002)$ мм, но на уровне требований школьной программы оба подхода следует считать правильными.
ОТВЕТ: $d = (0{,}053 \pm 0{,}002)$ мм.

2. ***«Гонки по наклонной»*** (*15 баллов*). Два ученика 7 класса – Петр и Василий – поднимались, стоя на эскалаторе, двигавшемся со скоростью u. Доехав до середины подъема, они, сговорившись заранее, одновременно перебросили свои портфели на параллельный эскалатор, который двигался вниз с такой же скоростью. Сразу после этого они побежали за своими портфелями разными путями. Петр побежал по своему эскалатору вверх, где быстро перескочил на спускающийся эскалатор и побежал по нему вслед за портфелями. Василий побежал по своему эскалатору вниз, где также быстро перескочил на встречный эскалатор и побежал по нему навстречу портфелям. Оба бежали с максимальными для себя скоростями, которые для обоих мальчиков одинаковы: по неподвижному эскалатору вверх они могут бежать со скоростью V_1, а вниз – со скоростью V_2. При каком соотношении между u, V_1 и V_2 Петр и Василий одновременно добегут до портфелей, причем их встреча произойдет на спускающемся эскалаторе? Перечислить все возможные варианты (приняв во внимание, что по условию задачи все скорости отличны от нуля!).

Решение:

Вычислим время «погони» для Петра. Оно состоит из времени подъема по своему эскалатору $t_1 = \dfrac{L}{2(V_1 + u)}$ (здесь L – длина эскалатора, а u – скорость его движения) и времени спуска t_2 по встречному эскалатору до портфелей. Поскольку за время подъема Петра портфели удалились от верха эскалатора на расстояние $s = ut_1 = \dfrac{uL}{2(V_1 + u)}$, а Петр догоняет портфели со скоростью V_2, то $t_2 = \dfrac{1}{V_2}\left[\dfrac{L}{2} + s\right] = \dfrac{L(V_1 + 2u)}{2V_2(V_1 + u)}$. Полное время погони

$t_П = t_1 + t_2 = \dfrac{L(V_1 + V_2 + 2u)}{2V_2(V_1 + u)}$. Аналогично можно вычислить и время погони для Василия: $t_1' = \dfrac{L}{2(V_2 - u)}$, $s' = ut_1' = \dfrac{uL}{2(V_2 - u)}$, $t_2' = \dfrac{1}{V_1}\left[\dfrac{L}{2} - s'\right] = \dfrac{L(V_2 - 2u)}{2V_1(V_2 - u)}$. Следовательно, $t_В = t_1' + t_2' = \dfrac{L(V_1 + V_2 - 2u)}{2V_1(V_2 - u)}$. Мальчики одновременно добегут до портфелей, если $t_П = t_В \Rightarrow \dfrac{(V_1 + V_2 + 2u)}{V_2(V_1 + u)} = \dfrac{(V_1 + V_2 - 2u)}{V_1(V_2 - u)}$. Это соотношение приводится к виду:

$$u(V_2 - V_1)(V_2 - V_1 - 2u) = 0.$$

По условию $u \neq 0$, поэтому возможные соотношения между скоростями, обеспечивающие одновременность встречи – это $V_2 = V_1$ и $V_2 = V_1 + 2u$. Для того, чтобы встреча произошла на эскалаторе, необходимо, чтобы Василий достигал нижней точки своего эскалатора раньше, чем портфели доедут до нижней точки своего, то есть $V_2 - u > u \Rightarrow V_2 > 2u$. Поскольку по условию $V_1 > 0$, то при $V_2 = V_1 + 2u$ это требование выполнено, а при $V_2 = V_1$ оно ограничивает возможные значения скоростей.

ОТВЕТ: должно быть $V_2 = V_1 > 2u$ либо $V_2 = V_1 + 2u$.

3. ***«Тепловой подъемник»*** *(20 баллов)*. Талантливый инженер Савелий Умкин сконструировал подъемник, представлявший собой вертикальную гладкую теплоизолирующую трубу, герметично закрытую с нижнего конца, внутри которой находится подвижный горизонтальный легкий поршень. Под поршнем находится вода, а подъем поршня происходит за счет ее испарения. Однажды зимой инженер включил нагреватель своей машины, когда под поршнем были равные количества воды и льда в равновесии. В процессе нагрева воды до $t_1 = 100°C$ он постепенно нагружал поршень так, чтобы он оставался на месте. После того, как температура достигла этого значения, инженер перестал нагружать поршень, и тот поехал вверх. Поршень достиг конца трубы, где ударился о специальные упоры и сбросил груз точно к тому моменту, когда вся вода испарилась. Определите КПД подъемника в описанном цикле, то есть отношение работы пара над поршнем в процессе подъема к количеству тепла, сообщенному воде от нагревателя. Использовать следующие данные: удельная теплота плавления льда $\lambda \approx 334$ кДж/кг, удельная теплоемкость жидкой воды $c \approx 4200$Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды $r \approx 2480$кДж/кг, плотность насыщенного водяного пара при $100°C$ $\rho \approx 0{,}59$ кг/м^3, давление насыщенного водяного пара при этой температуре $p \approx 101$кПа.

Решение. Поскольку в начальном состоянии находились в равновесии вода и лед, то начальная температура была равна $t_0 = 0°C$. Когда температура достигла $t_1 = 100°C$, часть воды уже испарилась, и давление на поршень создавал насыщенный водяной пар, давление которого при этой температуре равно $p_1 \approx 101$кПа. Это давление было немного больше внешней нагрузки (веса груза и внешнего давления), и поршень (как сказано в условии) поехал вверх. В процессе подъема поршня давление (а значит, и температура) вплоть до полного испарения жидкости поддерживалось неизменным. Если пренебречь объемом воды и льда по сравнению с объемом образовавшегося пара, то высота подъема поршня $h \approx \dfrac{V_{пара}}{S} = \dfrac{m}{S\rho}$, где S – площадь сечения трубы, а m – общая масса воды под поршнем. Следовательно, работа пара над поршнем в процессе подъема $A = p_1 S \cdot h = \dfrac{m p_1}{\rho}$. Количество тепла, сообщенное воде от нагревателя, состоит из теплоты плавления льда $Q_1 = \dfrac{m}{2}\lambda$, теплоты нагревания воды $Q_2 = cm(t_1 - t_0)$ и теплоты испарения воды $Q_3 = mr$. Поэтому $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = m\left[\dfrac{\lambda}{2} + c(t_1 - t_0) + r\right]$. Теперь можно определить КПД подъемника:

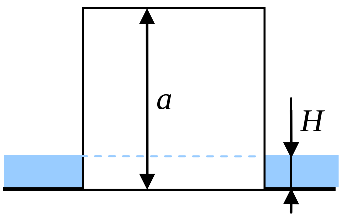
$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{2p_1}{\rho[\lambda + 2c(t_1 - t_0) + 2r]} \approx 0{,}0558 \approx 5{,}6\% .$$

ОТВЕТ: $\eta = \dfrac{2p_1}{\rho[\lambda + 2c(t_1 - t_0) + 2r]} \approx 0{,}0558 \approx 5{,}6\%$.

4. ***«Пружина против Архимеда»*** *(20 баллов).* На дне бассейна лежит куб с длиной ребра a из материала, плотность которого в пять раз меньше плотности воды. К центру нижней грани куба прикреплен конец невесомой пружины, длина которой в недеформированном состоянии равна $l = 4a$. Второй конец пружины закреплен на дне бассейна (кольца пружины достаточно мягкие, а проволока, из которой она изготовлена, достаточно тонкая, так что куб, несмотря на пружину, лежит на дне практически ровно, приподнимаясь над дном на расстояние, много меньшее a). В бассейн налили воду до уровня H (относительно дна бассейна). Какая часть объема куба будет находиться под водой в состоянии равновесия? Известно, что при подвешивании куба на этой пружине к потолку (в воздухе) удлинение пружины $\Delta l = \dfrac{a}{4}$.

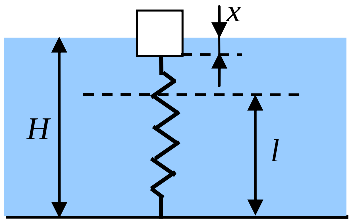
Решение:

Важно последовательно проследить, что будет происходить с кубом при повышении уровня воды. Поначалу, при достаточно низком уровне, куб будет лежать на дне. В этом случае под водой будет находиться часть объема, соответствующая глубине слоя воды:



$\dfrac{V_n}{V} = \dfrac{a^2 H}{a^3} = \dfrac{H}{a}$. Отрыв куба от дна бассейна произойдет, когда величина силы Архимеда сравняется с величиной действующей на куб силы тяжести:

$F_A = \rho a^2 Hg = mg = \frac{\rho}{5} a^3 g \Rightarrow H_1 = \frac{a}{5}$. Таким образом, при $H > \frac{a}{5}$ куб оторвется от дна и будет всплывать вместе с подъемом уровня жидкости. Пока пружина не натянется, будет поддерживаться равновесие сил Архимеда и тяжести, и поэтому глубина погружения куба будет оставаться неизменной, и $\frac{V_n}{V} = \frac{1}{5}$. Пружина натянется, когда высота уровня воды сравняется с суммой



$l = 4a$ и глубины погружения, то есть при $H_2 = \frac{21}{5} a$. Далее условие равновесия сил принимает вид:

$$F_A = mg + k\Delta l \Rightarrow \rho a^2 xg = \frac{\rho}{5} a^3 g + k(H - 4a - x),$$

где x – глубина погружения куба, а k – коэффициент жесткости пружины, удлинение которой $\Delta l = H - l - x = H - 4a - x$.

Поскольку, согласно условию, $k\frac{a}{4} = mg = \frac{\rho}{5} a^3 g$, то $k = \frac{4}{5}\rho a^2 g$, и поэтому

$$x = \frac{a}{5} + \frac{4}{5}(H - 4a - x) \Rightarrow x = \frac{4H - 15a}{9} \Rightarrow \frac{V_n}{V} = \frac{4H}{9a} - \frac{5}{3}.$$

По смыслу этой величины она не может быть больше единицы, поэтому эта формула применима только до уровня, при котором $\frac{4H}{9a} - \frac{5}{3} = 1 \Rightarrow H_3 = 6a$. При большем уровне воды пружина уже целиком удерживает куб под водой. Объединяя все результаты, получаем ответ.

ОТВЕТ: $$\frac{V_n}{V} = \begin{cases} \dfrac{H}{a}, & при\, H \le \dfrac{a}{5} \\ \dfrac{1}{5}, & при\, \dfrac{a}{5} < H \le \dfrac{21a}{5} \\ \dfrac{4H}{9a} - \dfrac{5}{3}, & при\, \dfrac{21a}{5} < H \le 6a \\ 1, & при\, H > 6a \end{cases}.$$

Максимальный балл за часть II: 70 баллов.

Задание заключительного этапа олимпиады школьников «Покори Воробьёвы горы!» по физике

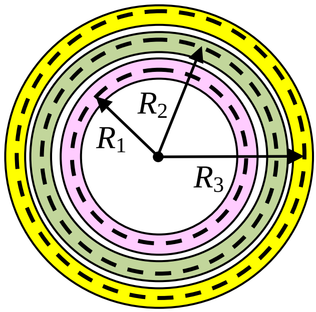
2014-2015 учебный год

7 – 9 классы

Задание 1

Вопрос. Тело прошло первую половину пути со скоростью 3 м/с, а вторую – со скоростью 6 м/с. Чему равна его средняя скорость на этом пути?

Задача. Юные техники собрали трек для испытания своих моделей. Круглый трек состоит из трех дорожек. Внутренняя дорожка покоится, средняя движется по часовой стрелке со скоростью 1 м/с, а внешняя движется в ту же сторону, что и средняя, со скоростью 1,9 м/с. Когда по треку по часовой стрелке запустили модель автомобильчика, оказалось, что наименьшее время понадобилось автомобилю для совершения круга по средней дорожке, а наибольшее – по внутренней дорожке. Определить скорость модели с ошибкой не более 0,2 м/с, если радиусы дорожек $R_1 = 5$ м, $R_2 = 7$ м, $R_3 = 9$ м. Какова наилучшая возможная точность?



Решения:

Вопрос. $V_{cp} = \dfrac{s}{(s/2V_1)+(s/2V_2)} = \dfrac{2V_1V_2}{V_1+V_2} = 4$ м/с.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Задача. Пусть V – скорость автомобильчика в м/с. Тогда времена совершения круга определяются соотношениями $t_1 = \dfrac{2\pi R_1}{V}$, $t_2 = \dfrac{2\pi R_2}{1+V}$ и $t_3 = \dfrac{2\pi R_3}{1{,}9+V}$. По условию $t_2 < t_3 < t_1$.

Ясно, что наиболее строгие границы для возможных значений скорости дадут «крайние» неравенства:

$$t_2 < t_3 \Rightarrow \frac{R_2}{1+V} < \frac{R_3}{1{,}9+V} \Rightarrow V > \frac{43}{20}\text{ м/с},$$

$$t_3 < t_1 \Rightarrow \frac{R_3}{1{,}9+V} < \frac{R_1}{V} \Rightarrow V < \frac{19}{8}\text{ м/с}.$$

Среднее значение для полученного интервала $V \approx \frac{181}{80}\text{ м/с} \approx 2{,}26$ м/с. Возможный разброс значений меньше 0,2 м/с (он меньше 0,12 м/с).

ОТВЕТ: $V \approx (2{,}26 \pm 0{,}12)$ м/с. *Максимальная оценка: 20 баллов.*

Задание 2

Вопрос. Кастрюля с водой стоит на газовой плите. От чего зависит скорость увеличения внутренней энергии воды? Предположим, что нагрев 1 литра воды при закрытой крышке от $20°C$ до $100°C$ происходит за 2 минуты, а после выключения плиты эта вода остывает до $20°C$ за 20 минут. Оцените (в процентах) величину ошибки, которая будет допущена, если мы посчитаем, что эта скорость не зависит от температуры кастрюли с содержимым.

Задача. К дню рождения мамы Вова (ученик 8 класса) решил сварить компот. Он смешал в кастрюле воду, изюм, орехи, мед и килограмм варенья, и поставил кастрюлю на плиту. Через $T = 25$ минут компот закипел. Вова испугался и долил туда холодной воды. До какой температуры охладился компот, если в следующий раз он закипел через $\tau = 4$ минуты? Компот кипит при $t_1 = 100°C$, температура изначальных ингредиентов и холодной воды $t_0 = 20°C$. Можно считать, что скорость поступления тепла от плиты к содержимому кастрюли и скорость утечки тепла из кастрюли в окружающую среду практически постоянны.

Решения:

Вопрос. Скорость увеличения внутренней энергии воды зависит от количества тепла, поступающего в единицу времени в кастрюлю от плиты (оно определяется мощностью плиты, температурой и геометрическими и физическими свойствами плиты и кастрюли) и количества тепла, рассеивающегося из кастрюли в окружающую среду (зависит от тех же свойств кастрюли и разности температур кастрюли и окружающей среды). Ясно, что при изменении температуры кастрюли сильнее изменяется поток тепла в окружающую среду, чем поток тепла от плиты (равновесная температура плиты заведомо больше 100ºС, и к тому же при нагревании кастрюли несколько увеличивается и равновесная температура плиты). Поэтому основная ошибка в указанном приближении возникает именно из-за пренебрежения изменением рассеиваемого тепла. Как видно из данных, в среднем рассеиваемый поток тепла составляет не более 10% от поступающего от плиты. Средняя разность температур кастрюли и окружающей среды 40ºС, и при анализе остывания или нагревания в «крайних» областях (около 20ºС или около 100ºС), отличие скорости увеличения внутренней энергии от средней будет соответствовать ошибке в вычислении потока тепла порядка среднего значения рассеиваемого потока. Если P_H - мощность нагрева, а P - средняя мощность потерь, то средняя скорость увеличения внутренней энергии есть $P_H - P$, вблизи 20ºС она равна P_H, а вблизи 100ºС - $P_H - 2P$. Итак, указанная ошибка порядка 10%. *Максимальная оценка: 5 баллов.*

Примечание. Согласно нашим рассуждениям, влияние изменения температуры кастрюли на поток тепла от плиты меньше, чем на поток тепла в окружающую среду, но он все же есть. Ясно, что при его учете ошибка должна возрасти менее чем в два раза. Поэтому при «грубом» оценивании можно добавить некую меньшую ошибку, связанную с учетом этого фактора (например, установить, что суммарная ошибка будет в районе 15%).

Задача. Пусть N – скорость поступления тепла в кастрюлю (мощность, отдаваемая плитой минус мощность потерь в окружающую среду), которая считается неизменной. Обозначим также C_K – теплоемкость кастрюли вместе с компотом, C_B –

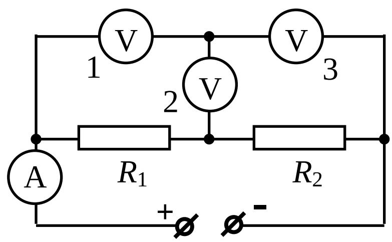
теплоемкость долитой воды. Тогда уравнение теплового баланса для закипания компота: $NT = C_K(t_1 - t_0)$, откуда выразим $\frac{N}{C_K} = \frac{t_1 - t_0}{T}$. Уравнение теплового баланса для охлаждения компота: $C_K(t_1 - t) = C_B(t - t_0)$, где t - искомая температура. Отсюда следует, что $\frac{C_B}{C_K} = \frac{t_1 - t}{t - t_0}$. Наконец, запишем уравнение теплового баланса для второго закипания компота: $N\tau = (C_K + C_B)(t_1 - t)$. Разделив обе части этого равенства на C_K и используя ранее полученные соотношения, получаем: $\frac{N}{C_K}\tau = \left(1 + \frac{C_B}{C_K}\right)(t_1 - t) \Rightarrow t = \frac{Tt_1 + \tau t_0}{T + \tau} \approx 89°C$.

ОТВЕТ: $t = \frac{Tt_1 + \tau t_0}{T + \tau} \approx 89°C$. *Максимальная оценка: 20 баллов.*

Задание 3

Вопрос. Если вольтметр подключить непосредственно к полюсам батареи, то он не будет показывать разность потенциалов между полюсами «ненагруженной» батарейки. С чем это связано? Больше или меньше показания вольтметра указанной разности потенциалов? Если параллельно вольтметру подключить второй такой же, то что произойдет с показаниями вольтметра? Ответ объяснить.

Задача. Ученик подключил к аккумулятору два резистора с сопротивлениями $R_1 = 40$ Ом и $R_2 = 60$ Ом, амперметр и три одинаковых вольтметра по схеме, показанной на рисунке. Амперметр и вольтметры не

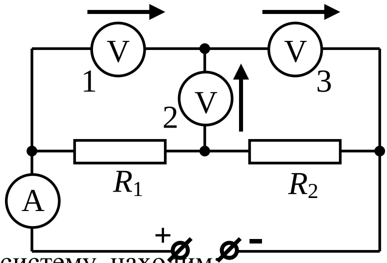


идеальны – в частности, внутренние сопротивления вольтметров равны $R_V = 0{,}5$ Мом (1Мом = 1000000 Ом). Амперметр показывает ток $I = 0{,}6$ А. Каковы показания вольтметров? Цена деления шкалы у вольтметров $\Delta V = 0{,}1$ В.

Решения

Вопрос. Это связано с тем, что вольтметр неидеален, то есть имеет конечное внутреннее сопротивление R, и батарейка имеет ненулевое внутреннее сопротивление r. Если разность потенциалов, создаваемая на полюсах ненагруженной батарейки, равна U_0, то ток через вольтметр и батарейку будет равен $I = \dfrac{U_0}{R + r}$, и напряжение на вольтметре $U = IR = \dfrac{R}{R + r} U_0 < U_0$, то есть показания вольтметра меньше U_0. Если параллельно вольтметру подключить второй такой же, то их общее сопротивление станет в два раза меньше, и ток в цепи возрастет: $I' = \dfrac{U_0}{(R/2) + r}$, поэтому напряжение на вольтметрах (а значит, и показания вольтметра) уменьшится: $U' = U_0 - I'r < U_0 - Ir = U$.
Максимальная оценка: 5 баллов.

Задача. Внутренние сопротивления вольтметров настолько велики, что ток через них порядка одной десятитысячной доли тока через резисторы, и при вычислении тока через резисторы сопротивлениями вольтметров вообще можно пренебречь (цена шкалы деления вольтметров соответствует измерению напряжений с точностью порядка $\dfrac{0{,}1}{0{,}6 \cdot 100} \approx 0{,}2\%$). Поэтому напряжения на резисторах $U_1 \approx IR_1$ и $U_2 \approx IR_2$. Если $V_{1,2,3}$ – показания вольтметров, соответствующие разностям потенциалов между точками их подключения, то $U_1 = V_1 - V_2$ и $U_2 = V_2 + V_3$ («положительные» направления токов через вольтметры выбраны так, как показано на рисунке – в случае, если «настоящие» направления токов не совпадают с выбранными, соответствующие напряжения на вольтметрах окажутся отрицательными, но это не



помешает нам определить их величину). Кроме того, поскольку ток через вольтметр 3 равен сумме токов через вольтметры 1 и 2, а их сопротивления одинаковы, то $V_3 = V_1 + V_2$. Решая полученную систему, находим:

$$V_1 = \frac{2U_1 + U_2}{3} \approx \frac{I(2R_1 + R_2)}{3} = 28\,\text{В},$$

$$V_2 = \frac{U_2 - U_1}{3} \approx \frac{I(R_2 - R_1)}{3} = 4\,\text{В},$$

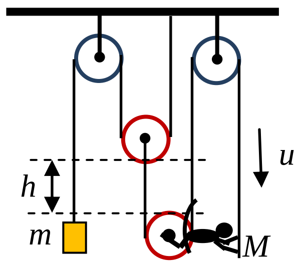
$$V_3 = \frac{U_1 + 2U_2}{3} \approx \frac{I(R_1 + 2R_2)}{3} = 32\,\text{В}.$$

ОТВЕТ: $V_1 \approx 28$ В, $V_2 \approx 4$ В, $V_3 \approx 32$ В. *Максимальная оценка: 20 баллов.*

Задание 4

Вопрос. Предложите вариант системы блоков, с помощью которой, стоя на земле, можно плавно поднимать вверх с земли груз, прикладывая усилие, которое в 8 раз меньше веса груза.

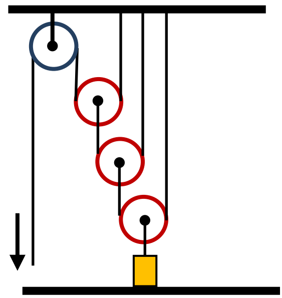
Задача. Обезьянка массы $M = 21$кг повисла, ухватившись за конец легкой нерастяжимой веревки и за один из блоков системы, изображенной на рисунке. При этом система оказалась в равновесии. Затем обезьянка стала выбирать передними лапами веревку так, что конец веревки



Так было до тех пор, пока подвижный блок, за который задними лапами держалась обезьянка, не столкнулся с расположенным над ним подвижным блоком. В момент начала подъема расстояние между этими блоками по вертикали было равно $h = 3$м. Чему равна масса груза m? Найти время подъема. Какую работу совершила обезьянка за все время, прошедшее с момента, когда она еще покоилась, до момента столкновения блоков? Все блоки очень легкие, веревка по ним не скользит. Трения в осях блоков нет.

Решения:

Вопрос. Вариант такой «идеальной» системы приведен на рисунке: каждый из подвижных блоков дает выигрыш в два раза, поэтому система из трех последовательно соединенных подвижных блоков дает выигрыш по силе в 8 раз. Разумеется, при этом требуется выбрать веревки в 8 раз больше высоты подъема груза. *Максимальная оценка: 5 баллов.*



Задача. Пока система находилась в равновесии, вес обезьянки уравновешивался тройной силой натяжения «правой» веревки системы. Поэтому $T = \dfrac{Mg}{3}$. Если рассмотреть равновесие верхнего подвижного блока, на который действует сила натяжения «правой» веревки и удвоенная сила натяжения «левой», то можно заключить, что сила натяжения «левой» веревки $T' = \dfrac{1}{2}T = \dfrac{Mg}{6}$. Именно эта сила уравновешивает вес груза. Значит, $T' = mg \Rightarrow m = \dfrac{M}{6} = 3{,}5$ кг.

Теперь рассмотрим движение системы. При разгоне тел до тех скоростей, с которыми они будут двигаться равномерно, обезьянка за счет своих мускульных усилий увеличит силу натяжения T так, что она станет больше $\dfrac{Mg}{3}$, и за счет этого за время разгона Δt ее направленная вверх скорость станет равной $V = \dfrac{3T - Mg}{M}\Delta t$. Так как верхний подвижный блок легкий, то на для создания у него конечного ускорения нужна очень малая результирующая сила, и поэтому по-прежнему $T' = \frac{1}{2}T$. В результате груз разгонится до скорости $v = \frac{T' - mg}{m}\Delta t = \frac{T - 2mg}{2m}\Delta t = \frac{3T - Mg}{M}\Delta t = V$. Эта скорость тоже направлена вверх. Заметим, что верхний подвижный блок при этом должен опускаться – всякое смещение груза вверх должно при натянутой веревке сопровождаться опусканием этого блока на вдвое меньше расстояние (так как он висит в «петле» веревки, и удлинение этой петли поровну распределяется между ее сторонами). Значит, этот блок наберет скорость $v' = \frac{V}{2}$, направленную вниз. В процессе дальнейшего движения, когда конец «правой» веревки за время t смещается вниз на расстояние ut, то сумма длин трех вертикальных участков этой веревки выше уровня обезьянки уменьшилась точно на такую же величину. С другой стороны, эта длина уменьшается за счет движения обезьянки вместе с нижним блоком вверх (на $3Vt$) и за счет опускания верхнего блока (на $\frac{V}{2}t$). Следовательно, $\left(3V + \frac{V}{2}\right)t = ut \Rightarrow V = \frac{2}{7}u$. Скорость сближения верхнего и нижнего блока в процессе движения равна $\frac{V}{2} + V = \frac{3}{2}V = \frac{3}{7}u$. Значит, время подъема до столкновения блоков $t \approx \frac{7h}{3u} = 7$ с (мы считаем, что $\Delta t << t$).

Работа, совершенная обезьянкой, – единственный источник увеличения механической энергии системы. Поэтому, пренебрегая возможными потерями, найдем, что эта работа пошла на увеличение кинетической энергии системы в процессе разгона и увеличение потенциальной энергии системы в поле тяжести Земли. Вычислим их. Увеличение кинетической энергии

$E_K = \dfrac{(M+m)V^2}{2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{7}{6}M\left(\dfrac{2u}{7}\right)^2 = \dfrac{Mu^2}{21} = 1$ Дж. Двигаясь с одинаковыми скоростями, обезьянка и груз поднимутся на расстояние $s = \dfrac{2}{7}ut = \dfrac{2h}{3}$, поэтому увеличение потенциальной энергии системы $E_P = (M+m)gs = \dfrac{7}{9}Mgh \approx 480{,}2$ Дж (в расчете было использовано значение $g \approx 9{,}8$ м/с^2). Таким образом, работа $A = E_K + E_P = M\left[\dfrac{u^2}{21} + \dfrac{7gh}{9}\right] \approx 481{,}2$ Дж.

Ответ: масса груза $m = \dfrac{M}{6} = 3{,}5$ кг, время подъема $t \approx \dfrac{7h}{3u} = 7$ с, работа обезьянки $A = \dfrac{M(3u^2 + 49gh)}{63} \approx 481{,}2$ Дж. *Максимальная оценка: 20 баллов.*

Задание отборочного этапа олимпиады школьников «Покори Воробьёвы горы!» по физике

2014-2015 учебный год

10-11 классы

Часть I

Как и в 2015-2016 учебном году, эта часть представляла собой тестовое задание. Ниже в качестве примера приводится разбор одного из вариантов.

Вопрос 1 *(5 баллов)*

Комета массы m пересекла орбиту Нептуна со скоростью V, облетела Солнце (минимальное расстояние до него было равно r) и снова вернулась к орбите Нептуна. Считая, что орбита Нептуна – это окружность радиуса R, найдите работу силы тяготения Солнца над кометой за время ее полета внутри этой орбиты. Масса Солнца M, гравитационная постоянная G.

Варианты ответа:

а) $\dfrac{mV^2}{2}$ б) $\dfrac{GmM}{r}$ в) $\dfrac{GmM}{R}$ г) 0 д) $-\dfrac{GmM}{R}$

Правильный ответ: *г.*

Комментарий. Во всех вариантах вопрос сводился к вычислению работы потенциальных сил при перемещении тела между точками с одинаковым значением потенциальной энергии (в данном случае – если считать Солнце шаром со сферически-симметричным распределением масс, потенциальная энергия кометы в поле тяготения Солнца зависит только от расстояния от Солнца до кометы; поэтому в двух разных точках одной круговой орбиты ее величина одинакова). Такая работа всегда равна нулю.

Вопрос 2 *(6 баллов)*

Небольшая шайба, скользящая по гладкой горизонтальной поверхности, проходит точку А в момент времени, принятый за $t=0$. Далее до момента времени $t_1=5$ с на шайбу действует постоянная сила, сонаправленная со скоростью, и к этому моменту скорость шайбы увеличивается в три раза. В этот момент времени сила мгновенно изменяет свое направление на противоположное, оставаясь такой же по абсолютной величине. В какой момент времени t шайба вернется в точку А? Ответ запишите в секундах, округлив до десятых долей секунды.

Правильный ответ: 22,8.

Комментарий. Пусть v_0 - скорость шайбы в момент $t=0$, а координату x будем отсчитывать от точки А в направлении начального движения шайбы. Обозначим a постоянную величину ускорения шайбы. Тогда $v_0+at_1=3v_0 \Rightarrow a=\dfrac{2v_0}{t_1}$. При этом $x(t_1)=v_0t_1+\dfrac{at_1^2}{2}=2v_0t_1$, и закон движения шайбы при $t>t_1$ записывается так: $x(t)=2v_0t_1+3v_0(t-t_1)+\dfrac{a(t-t_1)^2}{2}$, то есть $x(t)=2v_0t_1+3v_0(t-t_1)+\dfrac{v_0(t-t_1)^2}{t_1}$. Тогда искомое время определяется из уравнения $x(t)=0 \Rightarrow (t-t_1)^2-3t_1(t-t_1)-2t_1^2=0$

Следовательно, $t=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}t_1 \approx 22{,}8$ с.

Вопрос 3 *(10 баллов)*

Диаграмма процесса расширения постоянного количества гелия в координатах «давление-объем» есть прямая линия (1-2 на рисунке 1). В этом процессе гелий обменивается с внешним источником количеством теплоты $Q=506$ Дж. Какое количество теплоты нужно отнять от гелия, чтобы вернуть его в исходное состояние посредством изобарного сжатия и изохорного нагревания (2-3-1)? Известно, что абсолютная температура гелия в

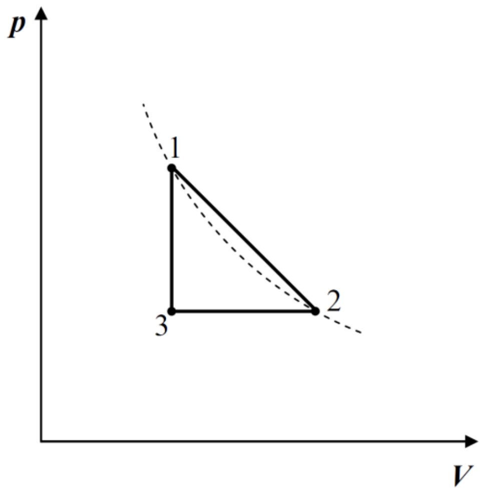


Рисунок 1.

точках 1 и 2 одинакова и $n=1{,}2$ раза больше его температуры в точке 3. Ответ запишите по абсолютной величине, в Джоулях, округлив до целого значения.

Правильный ответ: 460.

Комментарий. В обоих процессах (1-2 и 2-3-1) начальная и конечная температуры совпадают, поэтому внутренняя энергия гелия не изменяется и количество теплоты равно работе гелия:

$$Q=Q_{12}=A_{12}=\frac{p_1+p_2}{2}(V_2-V_1), \quad Q'=Q_{231}=A_{23}=-p_2(V_2-V_1).$$

Следовательно, $|Q'|=\dfrac{2p_2}{p_1+p_2}Q$. Так как процесс 3-1 – изохорный, то $\dfrac{p_1}{p_2}=\dfrac{T_1}{T_3}=n$, и $|Q'|=\dfrac{2}{n+1}Q=460$ Дж.

Вопрос 4 *(8 баллов)*

В схеме, показанной на рисунке 2, все резисторы имеют одинаковое сопротивление $R = 100$ Ом, ЭДС источника равна $E = 27$ В, а его внутреннее сопротивление $r = 16$ Ом. Каковы будут

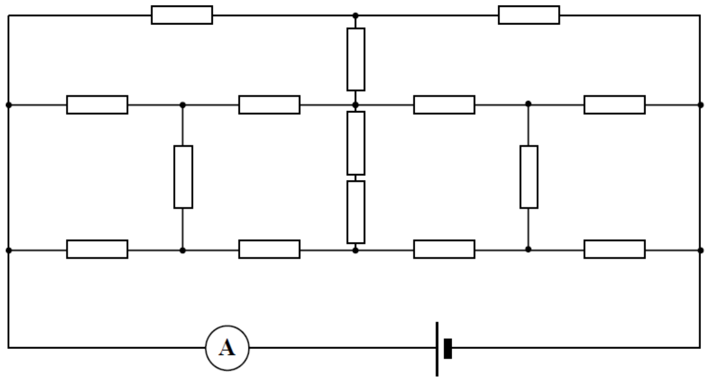
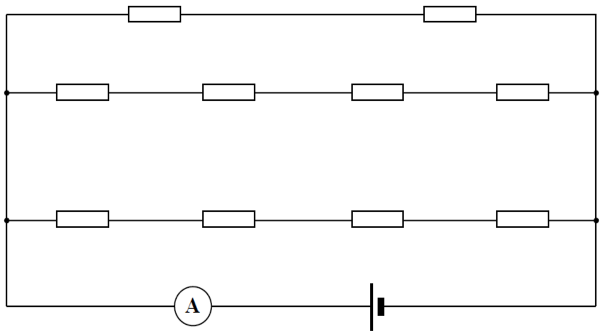


Рисунок 2.

показания амперметра, если его внутреннее сопротивление $r' = 4$ Ом? Ответ запишите в миллиамперах, округлив до целого значения.

Правильный ответ: 225.

Комментарий. В силу симметрии схемы потенциалы точек A и B, потенциалы точек C,D и E, потенциалы F и G равны. Поэтому ток по соединяющим их ветвям схемы не течет и их можно удалить их из схемы без изменения тока через амперметр. В результате получается существенно более простая схема:



$R_{общ} = R$, и поэтому $I = \dfrac{E}{R + r + r'} = 225$мА.

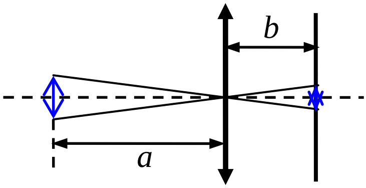
Максимальный балл за часть I: 29 балов.

Часть II
«ПРИКЛЮЧЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАТОРА ТРУРЛЯ».

1. «**Загадочная жидкость**» *(15 баллов)*. Однажды Трурль нашел емкость с неизвестной прозрачной жидкостью. Он взял синий светодиод и поместил его перед тонкой линзой таким образом, что светодиод светил строго по главной оси линзы. Диаметр выходного отверстия («глазка») светодиода $d = 2{,}4$ мм. Оказалось, что четкое изображение «глазка» светодиода на правильно размещенном экране имеет диаметр $d_1 = 1{,}2$ мм. Когда Трурль поместил светодиод и линзу в жидкость (не меняя относительного положения светодиода и линзы), то диаметр четкого изображения «глазка» стал $d_2 = 4{,}2$ мм (при новом положении экрана). Показатель преломления вещества линзы $n = 2{,}5$. Найдите показатель преломления жидкости.

Решение:

Поскольку изображение создавалось на экране, то оно было действительным, и поэтому ясно, что линза была собирающей. Соотношение поперечных размеров изображения и предмета



(«поперечное увеличение») связано с расстоянием от линзы до предмета и до изображения: $\frac{d_1}{d} = |\Gamma| = \frac{b}{a}$. С другой стороны, по формуле тонкой линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \Rightarrow \frac{d_1}{d} = \frac{F}{a-F}$. Из этого соотношения выражаем фокусное расстояние линзы в воздухе F: $F = \frac{ad_1}{d+d_1}$. Аналогичные рассуждения приводят нас к выражению для фокусного расстояния линзы в жидкости F': $F' = \frac{ad_2}{d+d_2}$ (поскольку величина a не изменялась). Оптическая сила линзы $D = \frac{1}{F}$ пропорциональна отличию от 1 коэффициента преломления линзы относительно среды, поэтому:

$$\frac{D'}{D} = \frac{F}{F'} = \frac{\frac{n}{n_0} - 1}{n-1} = \frac{n-n_0}{n_0(n-1)} = \frac{d_1(d+d_2)}{d_2(d+d_1)}$$

(здесь n_0 – показатель преломления жидкости). Из последнего уравнения легко выражается n_0:

$$n_0 = \frac{d_2(d+d_1)}{d_2(d+d_1)+(n-1)d_1(d+d_2)} n = \frac{7}{5} = 1{,}4.$$

Ответ: $n_0 = \frac{d_2(d+d_1)}{d_2(d+d_1)+(n-1)d_1(d+d_2)} n = \frac{7}{5} = 1{,}4$.

2. «**Вариоконд**» *(15 баллов)*. Исследуя свойства синтезированного им диэлектрика, Трурль обнаружил, что его диэлектрическая проницаемость зависит от напряженности электрического поля в нем, причем эта зависимость описывается формулой $\varepsilon = \frac{3}{2}\left[1+\frac{E}{E_0}\right]$, где E_0 – некоторая константа. Тогда он взял два одинаковых воздушных плоских конденсатора с расстоянием между обкладками d, один из них зарядил до напряжения $U_0 = E_0 d$, а другой полностью заполнил диэлектриком. Затем Трурль соединил попарно обкладки конденсаторов проводами. Во сколько раз уменьшится заряд воздушного конденсатора за достаточно большое время после соединения?

Решение:

Пусть емкость воздушного конденсатора равна C_0. Тогда его начальный заряд $q_0 = C_0 U_0$. У конденсатора, заполненного диэлектриком, связь заряда с напряжением нелинейная: $q = C(U)U = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon(U) S}{d} U = \frac{3}{2} C_0 \left(1+\frac{U}{U_0}\right) U$ (здесь учтено, что $\frac{E}{E_0} = \frac{Ed}{E_0 d} = \frac{U}{U_0}$). За достаточно большое время после соединения напряжения на конденсаторах практически выровняются. Если заряд заполненного конденсатора при этом равен q, то заряд воздушного $q' = C_0 U_0 - q$, поэтому напряжение также можно записать как $U = \frac{q'}{C_0} = U_0 - \frac{q(U)}{C_0} = U_0 - \frac{3}{2} U \left(1+\frac{U}{U_0}\right)$, то есть $\left(\frac{U}{U_0}\right)^2 + \frac{5}{3}\frac{U}{U_0} - \frac{2}{3} = 0$. Ясно, что физический смысл имеет только положительный корень полученного квадратного уравнения $\frac{U}{U_0} = \frac{1}{3}$, и $q' = \frac{1}{3} C_0 U_0$ (отрицательный корень $\frac{U}{U_0} = -2$ соответствует случаю, когда конденсатор в процессе разрядки изменяет полярность пластин, и к тому же явно не согласуется с законом сохранения энергии). Значит, $\dfrac{q'}{q_0} = \dfrac{1}{3}$.

Ответ: в три раза.

3. «Планета, которая гуляла сама по себе» *(20 баллов)*. В одном из путешествий Трурль наткнулся на планету, которая, не вращаясь, двигалась равномерно (относительно центра Галактики) в межзвездном пространстве. Планета оказалась твердым шаром с ровной поверхностью и очень тонкой (по сравнению с радиусом планеты) атмосферой из гелия и аргона с относительной влажностью (по аргону) $\phi_0 = 60\,\%$. За счет медленного распада радиоактивных веществ в глубине планеты на ее поверхности и во всей атмосфере поддерживалась постоянная температура, превышающая 90 К. У Трурля был с собой прибор, позволяющий дистанционно регулировать скорость радиоактивного распада, и с помощью него он стал плавно уменьшать температуру поверхности планеты. Когда температура понизилась на $x_1 = 0{,}8\,\%$, на поверхности выпала роса. Опишите рост глубины аргонового океана на поверхности планеты при дальнейшем снижении температуры. На сколько процентов (от начальной) нужно еще снизить температуру поверхности, чтобы глубина океана стала равна половине от максимально возможной? В рассматриваемом диапазоне температур давление насыщенных паров аргона можно считать линейной функцией температуры, а тепловым расширением жидкого аргона можно пренебречь.

Решение:

Давление аргона на поверхность планеты определяется его весом, и поэтому является постоянным: $p_0 = \dfrac{mg}{S}$ (здесь m – масса аргона, g – ускорение свободного падения вблизи поверхности планеты, S – площадь поверхности). Согласно условию, это давление $p_0 = \phi_0 \cdot p_H(T_0)$, где $p_H(T_0)$ – давление насыщенного пара аргона при начальной температуре. Для гелия указанные в условии температуры существенно выше критической, и он не конденсируется. Поэтому парциальное давление гелия просто добавляется к p_0, не влияя на начало конденсации аргона при охлаждении поверхности до температуры T_1, которая определяется из условия $p_0 = p_H(T_1)$. Запишем линейную зависимость давления насыщенных паров аргона от температуры в виде: $p_H(T) = \alpha + \beta T$. Тогда:

$$\left\{\begin{array}{c} p_0 = \phi_0(\alpha + \beta T_0) \\ p_0 = \alpha + \beta T_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha = \dfrac{p_0}{\phi_0}\left[1 - \dfrac{1-\phi_0}{x_1}\right] \\ \beta = \dfrac{p_0}{\phi_0}\dfrac{1-\phi_0}{x_1 T_0} \end{array}\right\},$$

откуда $p_H(T) = \dfrac{p_0}{\phi_0 x_1}\left[\phi_0 + x_1 - 1 + (1-\phi_0)\dfrac{T}{T_0}\right]$. После начала конденсации давление аргона на поверхность планеты остается прежним, но теперь оно складывается из давления слоя жидкого аргона глубиной h, которое равно $p_{ж} = \rho g h$ (ρ – плотность жидкого аргона, растворением гелия в жидком аргоне пренебрегаем) и давления насыщенных аргоновых паров над поверхностью планеты при новой температуре. Таким образом, $p_0 = \rho g h + \dfrac{p_0}{\phi_0 x_1}[x_1 - (1-\phi_0)x]$, где введено обозначение $x \equiv \dfrac{T_0 - T}{T_0}$ (это относительное уменьшение температуры). Из этого уравнения находим, что $h(x) = \dfrac{p_0}{\rho g}\dfrac{1-\phi_0}{\phi_0}\left(\dfrac{x}{x_1} - 1\right)$. Как видно, при дальнейшем понижении температуры (то есть при $x > x_1$) глубина океана растет по линейному закону. Заметим также, что $\dfrac{p_0}{\rho g} = \dfrac{m}{\rho S} = h_{\max}$ как раз и есть максимальная глубина аргонового океана, достигаемая в тот момент, когда весь аргон сконденсируется, и $h(x) = h_{\max}\dfrac{1-\phi_0}{\phi_0}\left(\dfrac{x}{x_1} - 1\right)$. Глубина океана равна половине максимальной при $\frac{1-\phi_0}{\phi_0}\left(\frac{x}{x_1}-1\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{2-\phi_0}{2(1-\phi_0)}x_1\equiv x_2$. Соответственно для достижения этой глубины нужно еще понизить температуру на $\Delta x=x_2-x_1=\frac{\phi_0}{2(1-\phi_0)}x_1=0{,}6\%$.

Ответ: $h(x)=h_{\max}\frac{1-\phi_0}{\phi_0}\left(\frac{x}{x_1}-1\right)$, где $x\equiv\frac{T_0-T}{T_0}$, для достижения глубины океана, равной половине максимальной, нужно понизить температуру еще на $\Delta x=\frac{\phi_0}{2(1-\phi_0)}x_1=0{,}6\%$ от первоначальной.

Примечания:

1) Использование условия постоянства давления, равного $p_0=\frac{mg}{S}$, очень важно – в условии сказано, что линейная зависимость для $p_H(T)$ может быть использована только «в рассматриваемом диапазоне температур», то есть на интервале $[T_2,T_0]$. Поэтому ее продолжение до температуры T_3, определяемой по пересечению прямолинейного графика с осью температур ($\alpha+\beta T_3=0\Rightarrow T_3=\frac{-\alpha}{\beta}$), недопустимо. Ясно, что такое «продолжение» графика «нефизично» – давление пара не может обращаться в ноль при ненулевой температуре. Таким образом, температура T_2 должна определяться именно из требования $m_c=\frac{m}{2}$, а не просто как $\frac{T_1-\alpha/\beta}{2}$, несмотря на то, что в данном случае эти значения совпадают!

2) Использование предположения о «постоянстве объема атмосферы» не имеет под собой почвы – ни с точки зрения условия задачи, ни с точки зрения законов физики. «Тонкая» атмосфера над поверхностью столь «идеальной» планеты может быть достаточно равномерно прогрета, то есть можно считать, что в пределах нее не

слишком сильно меняется абсолютная температура (тем более что на это есть явное указание в условии). При этом давление обязательно будет убывать с высотой, и определенной «верхней» границы у атмосферы вообще может не быть (некоторые из участников даже использовали так называемую *барометрическую формулу*). Но в условиях задачи конденсация всегда будет происходить в нижнем слое атмосферы, на границе с поверхностью планеты (в начале) или океана (затем). Тогда мы можем просто использовать (как это сделано в предложенном выше решении) условие, что при каждой температуре давление аргона над поверхностью океана равно давлению насыщенного пара.

3) Как известно, у аргона разница температур плавления и кипения очень мала – при давлениях, не слишком сильно отличающихся от нормального, она составляет примерно (3 – 4)% от температуры кипения. Но это заметно больше, чем найденное Δx, так что замерзания аргона в опыте Трурля не происходило.

4) Некоторые участники, не обратив внимание на слово «еще» в условии, вместо Δx находили $x_2 = \dfrac{2-\phi_0}{2(1-\phi_0)} x_1 = 1{,}4\%$. В случае, если эта величина была четко определена в работе, такой ответ тоже считался правильным.

4. «**Несвободное падение**» *(21 балл)*. Как-то Трурль раздобыл высокоскоростную видеокамеру и точные электронные весы. Тогда он взял маленький шарик, и измерил его массу. Она оказалась равна $m = (0{,}36 \pm 0{,}01)$ г. Затем экспериментатор стал снимать падение шарика с разных высот h и, используя специальную программу, определять скорость шарика перед ударом о землю V и время падения t. В результате у него получилась следующая таблица (все величины измерены с точностью до единицы последнего указанного разряда):

h, м	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
V, м/с	4,21	5,83	7,03	8,00	8,84
t, с	0,463	0,662	0,818	0,951	1,070

6,00	7,00	8,00	9,00	10,00
9,56	10,22	10,82	11,37	11,88
1,178	1,279	1,374	1,465	1,551

11,00	12,00	13,00	14,00	15,00
12,35	12,80	13,22	13,61	13,98
1,633	1,713	1,790	1,865	1,938

Кроме того, из геофизических данных он нашел, что ускорение свободного падения в районе измерений $g=(9{,}81\pm 0{,}01)$ м/с^2. Предложите физическую модель, описывающую падение шарика и согласующуюся с измерениями Трурля с ошибкой не более 5%. Ваша модель должна описывать действующие на шарик силы с такой же точностью, причем уровень точности должен быть указан явно и обоснован.

Решение:

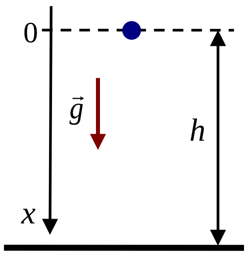
Из значений скорости и времени падения, которые заметно отличаются от $\sqrt{2gh}$ и $\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$, очевидно, что падение действительно не является свободным – логично предположить наличие силы сопротивления воздуха (так как шарик по условию маленький, будем считать архимедову силу пренебрежимо малой). Для описания этой силы можно пробовать разные модели, но наиболее широко используются модели, в которых эта сила линейна или квадратична по скорости тела относительно воздуха. Для выбранной модели необходимо получить связь между измеренными величинами и сравнить ее предсказания с результатами измерений. Рассмотрим линейную модель, то есть будем описывать силу сопротивления формулой $\vec{F}_c=-\alpha\vec{v}$, где $\vec{v}$ - скорость тела (отметим, что для квадратичной модели соответствие между моделью и измерениями оказывается хуже, да и вычисления в ней заметно сложнее, чем в линейной). Направим ось x

вертикально вниз, совместив начало отсчета с начальной точкой падения шарика, и запишем уравнение движения в проекции на эту ось:

$$m\frac{dv_x}{dt}=mg-\alpha v_x \Rightarrow dv_x=g\,dt-\frac{\alpha}{m}v_x dt=g\,dt-\frac{\alpha}{m}dx.$$

Мы получили соотношение между малыми изменениями скорости, времени и координаты. Просуммировав эти изменения от начала падения шарика до удара его о землю, получим:

$$\sum dv_x=V-0=V\,,\ \sum dx=h-0=h\,,\ \sum dt=T\,.$$



Таким образом, связь измеренных в эксперименте величин должна выглядеть так: $V=gT-\frac{\alpha}{m}h$. Если предложенная модель справедлива, то величина

$$\frac{gT-V}{h}=\frac{\alpha}{m}=const.$$

Значения этой комбинации:, рассчитанные по данным из условия, равны:

h, м	V, м/с	T, с	α/m, 1/с
1	4,21	0,463	0,3320
2	5,83	0,662	0,3321
3	7,03	0,818	0,3315
4	8	0,951	0,3323
5	8,84	1,07	0,3313
6	9,56	1,178	0,3327
7	10,22	1,279	0,3324
8	10,82	1,374	0,3324
9	11,37	1,465	0,3335
10	11,88	1,551	0,3335

11	12,35	1,633	0,3336
12	12,8	1,713	0,3337
13	13,22	1,79	0,3338
14	13,61	1,865	0,3347
15	13,98	1,938	0,3355

(вычисления удобно проделать, например, с помощью таблицы Excel). Как видно, разброс значений «константы» получается заметно меньше 5% (и даже меньше 1%): взяв в качестве значения для этой величины среднее из полученных, находим, что

$$\frac{\alpha}{m} = (0{,}3330 \pm 0{,}0025)\,c^{-1}.$$

Отметим, что эта точность лишь немногим хуже точности, с которой известны входящие в формулу для $\frac{\alpha}{m}$ величины. Таким образом, модель с линейной по скорости силой сопротивления воздуха описывает экспериментальные данные с требуемой точностью.

На «школьном» уровне такая схема сопоставления теории и эксперимента считается достаточной. Можно, однако, провести и более серьезную проверку для нашей модели. Для этого нужно вычислить *теоретические значения* высоты и скорости падения по времени падения. Но в таком случае необходимо выйти за рамки школьной программы. Из уравнения движения для шарика следует уравнение для зависимости скорости от времени $\frac{dv_x}{dt} = g - \frac{\alpha}{m}v_x$.Можно убедиться, что этому уравнению удовлетворяет любая функция вида

$$v_x(t) = \frac{mg}{\alpha} + C \cdot \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)$$

с произвольной константой C. Так как $v_x(0)=\frac{mg}{\alpha}+C=0$, то $C=-\frac{mg}{\alpha}$, и поэтому в рамках принятой модели связь скорости и времени падения описывается формулой

$$V(t)=\frac{mg}{\alpha}\left[1-\exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)\right].$$

Интегрирование этого выражения дает и связь высоты с временем падения:

$$h(t)=\int_0^t v_x dt=\frac{m^2 g}{\alpha^2}\left[\frac{\alpha}{m}t+\exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)-1\right].$$

Подставляя в эти формулы найденное значение $\frac{\alpha}{m}=(0{,}3330\pm 0{,}0025)c^{-1}$ и заданное значение $g=(9{,}81\pm 0{,}01)$ м/с^2, для каждого t находим V и h, а также возможный разброс их значений $V_T\pm\Delta V$, $h_T\pm\Delta h$ (их величины указаны в таблице ниже). Как видно, все экспериментальные значения находятся внутри интервалов для теоретических значений, поэтому можно сделать обоснованный вывод, что модель действительно описывает экспериментальные данные.

h, м	VT, м/с	ΔV, м/с	hT, м	Δh, м
1	4,2092	0,0253	0,9995	0,0060
2	5,8282	0,0350	2,0000	0,0120
3	7,0245	0,0422	3,0033	0,0180
4	7,9964	0,0480	4,0027	0,0240
5	8,8303	0,0530	5,0042	0,0301
6	9,5590	0,0574	5,9974	0,0360
7	10,2172	0,0614	6,9963	0,0420
8	10,8164	0,0650	7,9956	0,0480

9	11,3729	0,0683	9,0053	0,0541
10	11,8835	0,0714	10,0054	0,0601
11	12,3569	0,0742	10,9994	0,0661
12	12,8065	0,0769	12,0060	0,0721
13	13,2281	0,0794	13,0084	0,0781
14	13,6285	0,0819	14,0156	0,0842
15	14,0087	0,0841	15,0244	0,0902

Чтобы записать выражение для силы, нужно вычислить коэффициент $\alpha = \frac{\alpha}{m} m \approx 0{,}333 с^{-1} \cdot 0{,}36 г \approx 1{,}20 \cdot 10^{-4}\ кг/с$.

Поскольку измерение массы – самое неточное (ошибка около 3%), то величину силы мы описываем с меньшей точностью, но все равно лучше 5%: $\alpha = (1{,}20 \pm 0{,}04) \cdot 10^{-4}\ кг/с$.

Ответ: экспериментальные данные описываются с требуемой точностью в рамках модели, в которой шарик движется под действием сил тяжести $\vec{F}_g = m\vec{g}$ (m и $\vec{g}$ заданы в условии) и силы сопротивления воздуха $\vec{F}_c = -\alpha\vec{v}$, где $\alpha = (1{,}20 \pm 0{,}04) \cdot 10^{-4}\ кг/с$.

Примечания:

1) Разобранная в предлагаемом решении модель – не единственная «правильная». Более того, можно построить модели, в которых точность описания скоростей и перемещений будет даже выше – например, можно использовать более сложные модельные формулы для силы сопротивления воздуха. В частности, можно предложить, что $\vec{F}_c = -\alpha\vec{v} - \beta v\vec{v}$, или $\vec{F}_c = -\alpha v^{\gamma}\vec{v}$. Поскольку в этих выражениях два «подбираемых» параметра, то они могут описать реальную зависимость точнее, чем в разобранном примере. Недостаток этих моделей в том, что они заметно сложнее для анализа, особенно в части используемых математических методов. Итак, «правильным» считалось не решение, совпадающее с

предложенным выше, а решение, в котором предложенная модель была правильно проанализирована и было доказано, что уровень точности удовлетворяет требованиям условия. Отметим, что из-за достаточно высокой ошибки в определении массы (а ее значение всегда необходимо для вычисления сил по наблюдаемым ускорениям), точность описания кинематических величин должна быть лучше 5%.

2) Модель должна быть именно физической, а не математической, то есть в ней должна быть указана природа сил и объяснено их поведение. Так как по условию опыт Трурля по изучению падения шарика происходил на Земле (обратите внимание на слова «из геофизических данных» в условии задачи), то весьма нелогично было учитывать в модели какие-либо «экзотические» силы неземного происхождения и при этом не учитывать ту же силу сопротивления воздуха. Нефизично считать, что такая сила будет зависеть от высоты над поверхностью Земли из-за неоднородности воздуха (в диапазоне высот до 15 метров!) и при этом не учитывать ее зависимости от мгновенной скорости тела относительно среды – именно от скорости в первую очередь должна зависеть сила сопротивления движению тела в газообразной среде. Не является физической модель, в которой дополнительной силе – независимо от ее предполагаемой природы – в каждый момент времени падения просто приписывается значение, которое при ее действии совместно с силой тяжести отвечает в точности наблюдаемому ускорению. В такой «модели» сила зависит от времени, причем вид описывающей ее поведение функции каждый раз зависит от начальной высоты тела.

3) В условии были описаны действия экспериментатора, поэтому при составлении модели не следовало предполагать, что автор задачи «скрыл» часть этих действий. Дополнительные факторы (кроме заданной в условии силы тяжести), учитываемые в модели, должны были быть естественного, а не «искусственного» происхождения. Например, можно было считать шарик проводящим и учитывать действие на него электрического поля Земли (которая действительно обладает зарядом и создает такое поле), но нельзя было предполагать, что экспериментатор «специально», для «запутывания» участников олимпиады, создавал

дополнительное силовое поле да еще изменял его во время падения шарика по какому-либо довольно сложному закону. Нельзя было считать, что экспериментатор бросал шарик с ненулевыми скоростями, не вдоль вертикали и т.д. Если допустить такие возможности, можно без труда «объяснить» вообще все, что угодно.

4) В разобранном решении анализ модели был проведен на основе математического вывода из уравнения движения соотношений между измеренными величинами. Затем с помощью этих соотношений определялись входящие в модельные выражения для сил константы. Но это тоже не единственно правильный путь! Можно было построить анализ следующим образом. Например, сначала предположить, что на шарик действовала сила сопротивления, зависящая от скорости. Затем из уравнения движения выразить эту силу через мгновенные значения ускорения и скорости: $F_c(v) = m(g - a_x)$. После этого из экспериментальных данных найти максимальное количество точек графика этой зависимости. Для этого следует рассмотреть таблицу данных как таблицу значений скорости от времени в ходе одного падения с высоты 15 м. Тогда среднее на каждом интервале времени значение ускорения $\bar{a}_i = \dfrac{v_{i+1} - v_i}{t_{i+1} - t_i}$ можно поставить в соответствие средней скорости $\bar{v}_i = \dfrac{v_{i+1} + v_i}{2}$. Так находится 14 точек графика: $F_c(\bar{v}) = m(g - \bar{a})$. Если ввести естественное предположение, что на покоящееся по отношению к воздуху тело сила сопротивления не действует, то есть $F_c(0) = 0$, то появляется и 15-я точка. Дальше нужно через эти 15 точек (с учетом «разброса» значений скорости и ускорения) провести график модельной зависимости наилучшим образом. Конечно, в этом методе точность определения констант будет заметно ниже (в основном из-за того, что замена мгновенных значений ускорения и скорости на средние вносит довольно значительную ошибку), но при аккуратном исполнении можно обеспечить требуемую точность – например, с зависимостью $F_c(v) = \alpha v$, в которой коэффициент α подбирается так, чтобы

минимизировать сумму квадратов отклонений экспериментальных точек от теоретической кривой, то есть $S(\alpha) = \sum_i [m(g - \bar{a}_i) - \alpha \bar{v}_i]^2$ (такой метод называется «*методом наименьших квадратов*»).

Отметим, что среди участников были как те, кто действовал методом, описанным в примерном решении, так и те, кто использовал метод из примечания 4, и даже те, кто использовал более сложные зависимости $F_c(v)$.

Максимальный балл за часть II: 71 балл.

Задание заключительного этапа олимпиады школьников «Покори Воробьёвы горы!» по физике

2014-2015 учебный год

10-11 классы

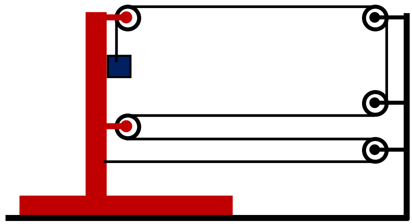
Финальный тур проводился на нескольких площадках по равноценным, но различным заданиям. Приведены примеры финальных заданий с разбором.

БИЛЕТ № 02

Задание 1

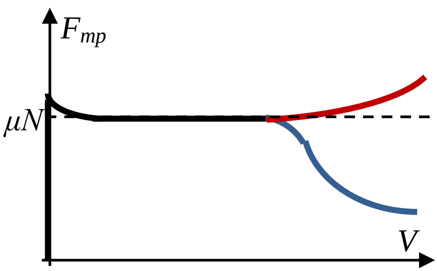
Вопрос. В чем состоит различие между силами трения покоя и трения скольжения? Опишите возможную зависимость силы трения от относительной скорости трущихся поверхностей.

Задача. Один из концов легкой нерастяжимой нити прикреплен к раме массой M, а на другом подвешен груз массы m. С помощью системы идеальных блоков и этой нити груз и рама связаны с неподвижной стенкой. Если раму удерживать, то неподвижный груз касается рамы. Трения между грузом



и рамой нет, а коэффициент трения между рамой и горизонтальной поверхностью равен μ. Найти ускорение рамы после отпускания. Ускорение свободного падения g.

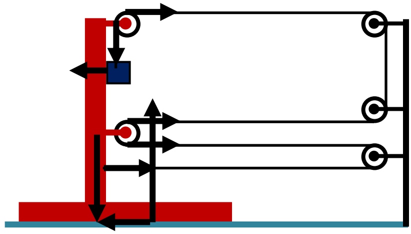
Ответ на вопрос. Все силы трения есть результат межмолекулярных взаимодействий, но обычно разделяют силы трения покоя и силы трения скольжения. Сила трения покоя препятствует проскальзыванию поверхностей и всегда направлена против силы, пытающейся вызвать скольжение. Она равна этой силе по величине и ее момент уравновешивает (вместе с силой нормальной реакции) момент внешних сил, действующих на тело (чтобы обеспечить выполнение условий равновесия). При этом сила трения покоя не может быть произвольной – она принимает значения в интервале от нуля до некоторого максимального значения, зависящего от свойств поверхностей и силы прижатия их друг к другу (от величины действующей между ними силы нормальной реакции). Если внешняя двигающая сила превосходит это максимальное значение, покой нарушается и начинается скольжение. Сила трения скольжения – сила, направленная против скорости относительного движения поверхностей (она препятствует скольжению, которое уже существует). Величина силы трения скольжения в некотором интервале скоростей относительного движения слабо зависит от этой скорости и вычисляется по формуле $F_{тр} = \mu N$, где N - сила нормальной реакции, а величина μ - коэффициент трения, который зависит от свойств поверхностей. Обычно считается, что максимальная величина силы трения покоя примерно совпадает с величиной силы трения скольжения, но на самом деле для большинства поверхностей она несколько больше μN (этот эффект носит название «эффект застоя»), поэтому в области малых скоростей бывает участок, на котором сила трения падает с ростом скорости. При больших скоростях поверхности могут начать разрушаться и даже плавиться (как лед под скользящим лезвием конька), и тогда сила трения может существенно измениться – как в сторону уменьшения, так и в сторону увеличения.



Примерный график зависимости силы трения от относительной скорости поверхностей показан на рисунке.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи. Так как блоки идеальны, а нить легкая и нерастяжимая, то нить во всех точках натянута одинаково с силой T. Со стороны нити на раму действуют силы, горизонтальная составляющая которых равна $4T$, а вертикальная - T (эта сила дополнительно прижимает раму к поверхности). Запишем уравнения движения рамы и груза в проекциях на горизонтальную ось x и вертикальную ось y (на рисунке показаны силы, действующие на раму):



$$\begin{cases} MA = 4T - N - F_{mp} \\ 0 = N' - Mg - T \\ ma_x = N \\ ma_y = T - mg \end{cases}$$

(здесь A - ускорение рамы, $\vec{a}$ - ускорение груза, N - сила нормальной реакции между грузом и рамой, N' - сила нормальной реакции со стороны поверхности, действующая на раму). При скольжении рамы $F_{mp} = \mu N' = \mu(Mg + T)$. Кроме того, здесь есть кинематические связи: так как груз по горизонтали движется вместе с рамой, то $a_x = A$. Так как сдвиг рамы на ΔX вправо приведет к тому, что длина вертикальной части натянутой нити увеличится на $4\Delta X$, то при движении рамы вправо груз будет опускаться и $a_y = -4A$. Решая полученную систему относительно A, найдем: $A = \dfrac{(4-\mu)m - \mu M}{M + (17-4\mu)m} g$. Ясно, что этот ответ имеет смысл только при $\mu \le \dfrac{4m}{M+m}$, в противном случае предположение о скольжении рамы не проходит, и на самом деле $A = 0$.

Ответ: $$A = \begin{cases} \dfrac{(4-\mu)m - \mu M}{M + (17-4\mu)m} g, & \mu \le \dfrac{4m}{M+m} \\ 0, & \mu > \dfrac{4m}{M+m} \end{cases}.$$

Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание 2

Вопрос. Чему может равняться теплоемкость идеального газа? Приведите несколько примеров для известных Вам процессов.

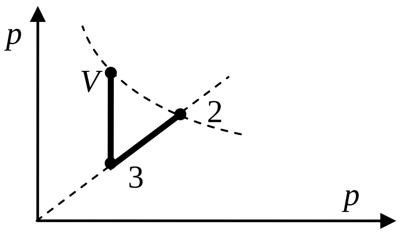
Задача: Некоторое количество азота охлаждают так, что его давление меняется пропорционально его объему. Затем его нагревают при постоянном объеме до начальной температуры. Найдите отношение количества теплоты, отданного газом, к количеству теплоты, полученному им. Азот при рассматриваемых температурах можно считать идеальным газом.

Ответ на вопрос. Теплоемкость – физическая величина, равное отношению количества теплоты, полученного системой в некотором процессе к изменению температуры системы в этом процессе: $C \equiv \dfrac{Q}{\Delta T}$. Поскольку для идеального газа количество теплоты зависит от типа процесса, его теплоемкость может принимать любое значение. Например, при изотермическом расширении газ получает тепло ($Q > 0$), а $\Delta T = 0$, то есть $C = +\infty$. Аналогично для изотермического сжатия $C = -\infty$, для адиабатического процесса $C = 0$. В изохорном процессе изменяется только внутренняя энергия газа. Для ν молей одноатомного идеального газа $U = \dfrac{3}{2}\nu RT$, и поэтому

$C_V \equiv \dfrac{\Delta U}{\Delta T} = \dfrac{3}{2}\nu R$ (R - универсальная газовая постоянная). Для изобарного процесса над одноатомным идеальным газом $Q = p\Delta V + \dfrac{3}{2}\nu R\Delta T = \dfrac{5}{2}\nu R\Delta T$, и $C_p = \dfrac{5}{2}\nu R$.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи. Азот – двухатомный газ, поэтому его внутренняя энергия $U = \dfrac{5}{2}\nu RT$. По условию, охлаждение азота происходит в процессе, который на диаграмме показан как процесс 1-2, в котором давление меняется пропорционально объему, то есть $p_2 = p_1 \dfrac{V_2}{V_1}$. Изменение



температуры азота в этом процессе можно вычислить с использованием уравнения Менделеева-Клапейрона: $\Delta T_{12} = T_2 - T_1 = \dfrac{p_2V_2}{\nu R} - \dfrac{p_1V_1}{\nu R}$. С учетом уравнения процесса найдем, что $\Delta T_{12} = \dfrac{p_1(V_2^2 - V_1^2)}{\nu RV_1}$ (ясно, что эта величина отрицательная). Значит, изменение внутренней энергии $\Delta U_{12} = \dfrac{5}{2}\nu R\Delta T_{12} = \dfrac{5}{2}\dfrac{p_1(V_2^2 - V_1^2)}{V_1}$. Работа в этом процессе вычисляется как площадь под pV–диаграммой процесса $A_{12} = \dfrac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1) = \dfrac{p_1(V_2^2 - V_1^2)}{2V_1} = \dfrac{1}{2}\nu R\Delta T_{12}$. Таким образом, $Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12} = 3\nu R\Delta T_{12}$ (мы фактически выяснили, что молярная теплоемкость азота в таком процессе равна $3R$ и постоянна; этот процесс является разновидностью *политропического* процесса). Процесс 2-3 изохорный, и для него $Q_{23} = \Delta U_{23} = \frac{5}{2}\nu R\Delta T_{23}$. Так как $\Delta T_{12} = -\Delta T_{23}$, то искомое отношение $\frac{|Q_{12}|}{Q_{23}} = \frac{6}{5}$.

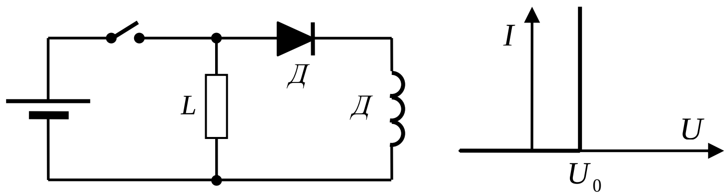
Ответ: $\frac{Q_-}{Q_+} = \frac{|Q_{12}|}{Q_{23}} = \frac{6}{5}$.

Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание 3

Вопрос. Какие физические процессы способствуют тому, что проводимость полупроводникового диода существенно зависит от полярности приложенного напряжения?

Задача. В схеме, показанной на рисунке слева, диод *Д* не является идеальным – его вольтамперная характеристика показана на рисунке справа. В некоторый момент времени, когда ток в катушке был равен нулю, ключ замкнули. Найти силу тока,



который будет течь через резистор спустя достаточно большой промежуток времени. ЭДС и внутреннее сопротивление источника равны соответственно $\mathcal{E}$ и r, сопротивление катушки равно по величине внутреннему сопротивлению источника, сопротивление резистора R и пороговое напряжение диода U_0 считать известными.

Ответ на вопрос. Полупроводниковый диод содержит зону контакта двух материалов с разным типом проводимости или существенно разной концентрацией носителей зарядов. Обычно это полупроводники n- типа (с электронным типом проводимости) и p- типа (с дырочным) или полупроводник и металл. Различие концентраций приводит к диффузии носителей зарядов (электронов и дырок) через границу раздела, и по разные стороны от границы создаются области с ненулевой плотностью зарядов (разного знака). Поэтому вблизи границы возникает направленное в одну сторону электрическое поле (и скачок потенциала). Этот потенциальный барьер и создает разность в условиях прохождения границы раздела зарядами в разном направлении – если носителям зарядов необходимо преодолеть этот барьер (поле зарядов границы тормозит их), то при недостаточной величине приложенного к диоду напряжения они его не пройдут, и ток через диод не потечет (диод будет заперт). При этом в другом направлении носители зарядов будут легко проходить этот диод (диод будет открыт).

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи. Спустя достаточно большое время ($t >> \dfrac{R+2r}{L}$) в данной схеме будут течь практически постоянные токи, и ЭДС индукции в катушке будет равно нулю. Таким образом, катушка будет играть роль резистора с сопротивлением r. Токи в этой схеме зависят от состояния диода. Если диод будет заперт, то ток будет течь только через резистор, и сила тока $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R+r}$. Этот режим реализуется, если напряжение на резисторе меньше U_0, то есть $\dfrac{\mathcal{E}}{R+r}R < U_0 \Rightarrow \mathcal{E} < U_0\left(1+\dfrac{r}{R}\right)$. При $\mathcal{E} \geq U_0\left(1+\dfrac{r}{R}\right)$ диод открывается, и тогда напряжение на нем постоянно и равно U_0. Тогда для токов в схеме справедливы уравнения:

$$\left\{\begin{array}{c} I_R R = \mathcal{E} - Ir \\ I_R R = U_0 + I_L r \\ I = I_R + I_L \end{array}\right\} \Rightarrow I_R = \frac{\mathcal{E} + U_0}{2R + r},$$

Мы нашли ток при всех состояниях диода.

Ответ: $$I_R = \begin{cases} \dfrac{\mathcal{E}}{R + r}, & \mathcal{E} < U_0\left(1 + \dfrac{r}{R}\right) \\ \dfrac{\mathcal{E} + U_0}{2R + r}, & \mathcal{E} \geq U_0\left(1 + \dfrac{r}{R}\right) \end{cases}.$$

Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание 4

Вопрос. Есть ли связь между параксиальным приближением (в рамках которого углы между оптической осью системы и падающими на нее лучами являются малыми) и приближением тонкой линзы?

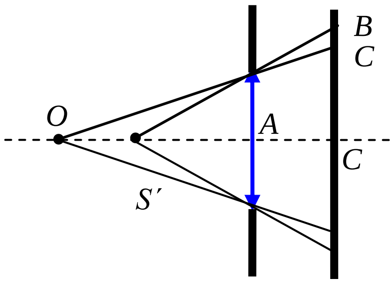
Задача. В отверстие радиусом $R = 1{,}5$ см в тонкой непрозрачной перегородке вставлена собирающая линза. Точечный источник света расположен на главной оптической оси линзы по одну сторону от перегородки. По другую сторону находится экран. Экран, соприкасающийся вначале с линзой, отодвигают от линзы. При этом радиус светлого пятна на экране плавно увеличивается и на расстоянии $L = 18$ см от перегородки достигает значения $r_1 = 3$ см. Если линзу убрать, оставив экран на месте, то радиус пятна на экране станет $r_2 = 4{,}5$ см. Определите фокусное расстояние линзы.

Ответ на вопрос. Да. При выводе формулы тонкой линзы помимо предположения о малости ее толщины использовалось именно параксиальное приближение (синусы и тангенсы углов считались примерно равными самим углам в радианной мере).

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи. Поскольку при отодвигании экрана радиус светлого пятна плавно увеличивается, то лучи, вышедшие из линзы, расходятся, а это возможно только если изображение источника – мнимое. После линзы лучи идут от этого изображения, и поэтому расстояние от линзы до изображения (напомним, что для мнимого изображения это расстояние считается отрицательным):

$$-b = |OS'| = (-b + L)\frac{R}{r_1}.$$



Выражая отсюда b, найдем $b = -\dfrac{LR}{r_1 - R}$. После убирания линзы светлое пятно создают лучи, идущие напрямую от источника., и аналогично предыдущему для расстояния от источника для линзы получим $a = \dfrac{LR}{r_2 - R}$.

Теперь из формулы линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{r_2 - r_1}{LR} \Rightarrow F = \frac{LR}{r_2 - r_1} = 18\,\text{см}.$$

ОТВЕТ: $F = \dfrac{LR}{r_2 - r_1} = 18$ см.

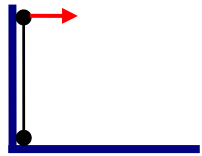
Максимальная оценка: 20 баллов.

БИЛЕТ № 05.

Задание 1

Вопрос: Опишите условия, при которых справедлив закон сохранения полной механической энергии.

Задача. Гантель из двух массивных одинаковых шариков и легкого жесткого стержня поставлена вертикально в гладкий угол между вертикальной стеной и горизонтальным полом. Верхний шарик подталкивают от стены, сообщая ему скорость v_0 (но не

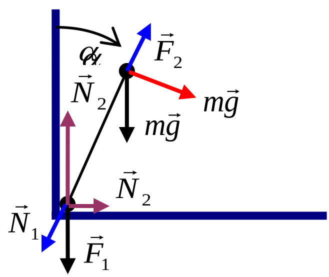


сообщая скорости нижнему шарику). Каким будет угол наклона стержня к вертикали в тот момент, когда сила давления нижнего шарика на стенку будет максимальна? Длина стержня L, ускорение свободного падения g.

Ответ на вопрос. Закон сохранения полной механической энергии справедлив для замкнутых механических систем, в которых все действующие силы являются потенциальными (то есть нет непотенциальных сил). Отметим, что одного условия замкнутости не достаточно – если среди внутренних сил есть, например, силы трения, то механическая энергия системы убывает (переходит в тепло). Более того, в некоторых случаях оно не является необходимым – например, если в системе «Земля – спутник» пренебречь движением Земли и силами сопротивления среды, то можно записать закон сохранения механической энергии для одного спутника, но с учетом его потенциальной энергии в поле тяжести Земли.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи. Рассмотрим момент времени, когда стержень отклонился от вертикали на угол α. Пренебрегая кинетической энергией нижнего шарика, из закона сохранения энергии найдем, что (пока нижний шарик не отрывается от стенки) скорость верхнего шарика



удовлетворяет соотношению

$$\frac{mv^2}{2} + mgL\cos(\alpha) = \frac{mv_0^2}{2} + mgL \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2gL[1-\cos(\alpha)].$$

Центростремительное ускорение этого шарика создается «радиальной» компонентой силы тяжести и силой упругости стержня. Так как верхний шарик движется по окружности радиуса L, то $m\frac{v^2}{L} = mg\cos(\alpha) - F_1$, и $F_1 = mg[3\cos(\alpha) - 2] - m\frac{v_0^2}{L}$ (сила упругости считается положительной, когда стержень сжат). На нижний шарик действуют силы тяжести, упругости стержня $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, и силы нормальных реакций стенки и пола. Из условия равновесия нижнего шарика по горизонтали $N_1 = -F_2\sin(\alpha) = mg\sin(\alpha)[3\cos(\alpha) - 2 - n]$, где $n \equiv \frac{v_0^2}{gL}$. Таким образом, сила давления шарика на стенку максимальна, когда достигает максимума функция $f(\alpha) = \sin(\alpha)[3\cos(\alpha) - 2 - n]$. Отметим, что при $\alpha_0 = \arccos\left(\frac{n+2}{3}\right)$ сила давления обращается в ноль, то есть в процессе дальнейшего движения нижний шарик отрывается от стены. Поэтому искомое значение угла должно находиться в интервале значений угла от 0 до α_0, причем при $n \geq 1 \Leftrightarrow v_0 \geq \sqrt{gL}$ отрыв происходит сразу после «толчка», и в этом случае нижний шарик не давит на стену – ответа на вопрос задачи не существует. Записывая уравнение $f'(\alpha) = 6\cos^2(\alpha) - (n+2)\cos(\alpha) - 3 = 0$, и выбирая положительное значение косинуса, найдем, что для искомого угла $\cos(\alpha) = \frac{2 + n + \sqrt{76 + 4n + n^2}}{12}$ (как видно, при $v_0 = \sqrt{gL}$ и это значение угла обращается в 0). Итак, давление максимально при

$$\alpha = \arccos\left[\frac{2gL + v_0^2 + \sqrt{76g^2L^2 + 4gLv_0^2 + v_0^4}}{12gL}\right] \text{ при } v_0 < \sqrt{gL}.$$

ОТВЕТ: $\alpha = \arccos\left[\dfrac{2gL + v_0^2 + \sqrt{76g^2L^2 + 4gLv_0^2 + v_0^4}}{12gL}\right]$ при $v_0 < \sqrt{gL}$, а при $v_0 \geq \sqrt{gL}$ шарик на стенку не давит.

Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание 2

Вопрос. В Альпах дует ветер, который местные жители называют «фен». Он сухой и горячий, хотя рождается над холодным морем и переваливает ледниковые поля Альп. Объясните, почему он сухой и горячий.

Задача. Прочный баллон емкостью $V = 20$ л заполнили смесью метана (CH_4) и кислорода (O_2) при температуре $t_0 = 28°C$. В баллоне произвели маломощный разряд, вызвавший химическую реакцию $CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O$, а затем остудили его содержимое до температуры $t_1 = 100°C$. После этого на стенках сосуда выступили мелкие капельки воды общей массой $m \approx 1$г, а давление в баллоне стало равно $p \approx 1{,}775 \cdot 10^5$ Па. Найти давление в баллоне до начала реакции. Какими могли быть массы газов, закаченных в баллон? Молярные массы считать равными: для метана $\mu_1 \approx 16$ г/моль, воды $\mu_2 \approx 18$г/моль и кислорода $\mu_3 \approx 32$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R \approx 8{,}31$Дж/моль·К.

Ответ на вопрос. При прохождении ледниковых полей водяной пар, содержащийся в воздушных массах, конденсируется (поэтому воздух становится намного суше), а за счет теплоты конденсации этот воздух нагревается. В результате спускающийся в долину ветер оказывается сухим и горячим.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи. Поскольку в конечном состоянии на стенках сосуда выступили мелкие капельки росы, то водяной пар в баллоне стал насыщенным, и его давление $p_1 \approx 10^5$ Па. Поэтому количество водяного пара $\nu_1 = \dfrac{p_1 V}{RT} \approx 0{,}6452$моля. Вместе с жидкой частью ($\dfrac{1г}{18г/моль} \approx 0{,}0556$моля) количество воды в баллоне $\nu_B \approx 0{,}7$ моля. Оставшуюся часть давления создает смесь газов (CO_2 и либо метан, либо кислород, не израсходованные в реакции), общее количество которых $\nu_2 = \dfrac{(p - p_1)V}{RT} \approx 0{,}5$ моля. До начала процесса все вещества в баллоне находились в газообразном состоянии, и первоначальное давление $p_0 = \dfrac{(\nu_B + \nu_2)RT_0}{V} \approx 1{,}5 \cdot 10^5$ Па. В соответствии с уравнением реакции количество CO_2 в два раза меньше количества воды и равно 0,35 моля, и поэтому второй газ в смеси содержится в количестве 0,15 моля. Таким образом, изначально в баллоне были либо 0,35 моля (5,6 г) метана и 0,85 моля (27,2 г) кислорода, либо 0,5 моля (8 г) метана и 0,7 моля (22,4 г) кислорода.

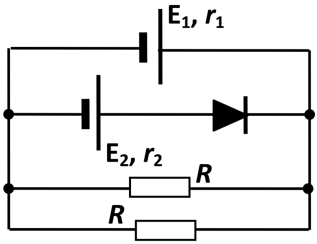
Ответ: $p_0 = \dfrac{(\nu_B + \nu_2)RT_0}{V} \approx 1{,}5 \cdot 10^5\,Па$, изначально в баллоне были либо 5,6 г метана и 27,2 г кислорода, либо 8 г метана и 22,4 г кислорода.

Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание 3

Вопрос. Источник напряжения каждые $T = 2$ с меняет свою полярность (величина ЭДС и внутреннее сопротивление при этом не изменяются). К нему подключен резистор. В одном случае идеальный диод включается в эту схему последовательно с резистором, в другом – параллельно. Чем отличается ток через резистор в этих случаях?

Задача. В схеме, приведенной на рисунке, диод можно считать идеальным. ЭДС аккумуляторов равны $Е_1 = 36$В и



$\mathrm{E}_2 = 32\,\text{В}$, их внутренние сопротивления $r_1 = 5\,\text{Ом}$ и $r_2 = 2$ Ом соответственно. Нагрузкой являются два резистора с одинаковым сопротивлением $R = 50$ Ом, соединенные параллельно. Во сколько раз изменится выделяющаяся на нагрузке мощность P, если подключить в качестве нагрузки эти же два резистора, соединенные последовательно?

Ответ на вопрос. При последовательном подключении ток течет через резистор только при той полярности подключения источника, когда диод открыт, а при параллельном подключении – когда диод заперт (поскольку мы считаем диод идеальным, то в открытом состоянии весь ток короткого замыкания источника течет через диод, и при этом напряжение на диоде равно нулю). Величина тока и длительность периодов его протекания и отсутствия при этом не отличаются.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи. Если диод открыт, то токи I_1 и I_2, текущие в ветвях с ЭДС, удовлетворяют соотношением закона Ома (при сопротивлении нагрузки R_H):

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{E}_1 - I_1 r_1 = IR_H \\ \mathrm{E}_2 - I_2 r_2 = IR_H \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} I_1 = \frac{\mathrm{E}_1}{r_1} - \frac{R_H}{r_1} I \\ I_1 = \frac{\mathrm{E}_2}{r_2} - \frac{R_H}{r_2} I \end{aligned}\right. .$$

Подставляем эти соотношения в закон непрерывности тока $I = I_1 + I_2$ и находим, что $I = \dfrac{\mathrm{E}_1 r_2 + \mathrm{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + R_H (r_1 + r_2)}$, и поэтому мощность, выделяющаяся при открытом диоде

$P = I^2 R_H = \left(\frac{\mathrm{E}_1 r_2 + \mathrm{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + R_H (r_1 + r_2)} \right)^2 R_H$. Условие, что диод открыт, выполняется, если $I_2 > 0$, то есть если $\mathrm{E}_2 > R_H I \Rightarrow R_H < \frac{\mathrm{E}_2}{\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2} r_1$. При $R_H > \frac{\mathrm{E}_2}{\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2} r_1$ диод заперт, и тогда ток в нагрузке $I = \frac{\mathrm{E}_1}{r_1 + R_H}$, а выделяющаяся мощность

$$P' = \left(\frac{\mathrm{E}_1}{r_1 + R_H} \right)^2 R_H .$$

При значениях R и r_1, заданных в условии, всегда $\frac{\mathrm{E}_2}{\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2} r_1 = 40$ Ом, то есть при использовании в качестве нагрузки параллельно соединенных резисторов ($R_H = \frac{R}{2} = 25$ Ом) диод открыт, а при последовательно соединенных ($R_H = 2R = 100$ Ом) – заперт. Поэтому

$$n \equiv \frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{[\mathrm{E}_1 r_2 + \mathrm{E}_2 r_1][r_1 + 2R]}{\mathrm{E}_1 [2 r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)]} \right)^2 = \frac{41209}{12321} \approx 3{,}34.$$

Ответ: в первом случае мощность в $n = \left(\frac{[\mathrm{E}_1 r_2 + \mathrm{E}_2 r_1][r_1 + 2R]}{\mathrm{E}_1 [2 r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)]} \right)^2 = \frac{41209}{12321} \approx 3{,}34$ раза больше.

Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание 4

Вопрос. В чем состоит приближение тонкой линзы? Дайте полный ответ.

Задача. Тонкая плосковыпуклая линза немного погружена в воду своей горизонтальной плоской стороной (выпуклая поверхность линзы находится в воздухе). На линзу падает сверху узкий вертикальный пучок света, ось которого проходит точно через вершину выпуклой поверхности. Этот пучок фокусируется в воде на глубине $h = 27$см. Оптическая сила линзы в воздухе $D = 5$дптр. Найти показатель преломления воды.

Ответ на вопрос. При выводе формулы тонкой линзы используется два приближения. Во-первых, толщиной линзы пренебрегали по сравнению с радиусами кривизны сферических поверхностей линзы. Во-вторых, считалось, что все рассматриваемые лучи падают на линзу под малыми углами к ее главной оптической оси (параксиальное приближение – в ходе вычислений тангенсы этих углов заменялись на сами углы в радианной мере). Поэтому приближение тонкой линзы объединяет оба эти требования.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи. Из условия ясно, что ось пучка совпадает с главной оптической осью линзы и является параксиальным (угол падения крайнего луча на выпуклую поверхность линзы, как и угол преломления его для плоской поверхности малы). Преломление луча на выпуклой поверхности и ход луча внутри линзы не зависит от того, погружена плоская сторона в воду или нет, поэтому крайний луч в обоих случаях выйдет из линзы в одной и той же точке (обозначим расстояние от этой точки до оси r) и попадет в фокус линзы, то есть в воздухе он пересечет оптическую ось на расстоянии $F = 1/D$ от линзы, а в воде – на расстоянии h. Поэтому тангенс угла преломления этого луча для плоской поверхности равен $tg(\beta) = \dfrac{r}{F} = Dr$ в воздухе и $tg(\beta') = \dfrac{r}{h}$ в воде. Для малых углов тангенсы примерно равны самим углам в радианной мере, как и синусы, поэтому $\dfrac{tg(\beta')}{tg(\beta)} = \dfrac{1}{Dh} \approx \dfrac{\sin(\beta')}{\sin(\beta)}$. С другой стороны, по закону преломления: $\sin(\beta') = \frac{n_Л}{n}\sin(\alpha)$, $\sin(\beta) = n_Л \sin(\alpha)$, где $n_Л$ - показатель преломления материала линзы, n- воды, а α- одинаковый в обоих случаях угол падения крайнего луча на плоскую поверхность (показатель преломления воздуха мы приняли равным 1). Следовательно, $n \approx Dh = 1{,}35$.

Ответ: $n \approx Dh = 1{,}35$.

Максимальная оценка: 20 баллов.

БИЛЕТ № 09.

Задание 1

Вопрос. На некотором участке пути тела результирующая сила, действующая на него, пропорциональна расстоянию до края этого участка (и направлена к этому краю). Какими функциями описывается закон движения тела на этом участке?

Задача. Вертикальное колено изогнутой под прямым углом гладкой трубки постоянного сечения заполнено жидкостью, которую можно считать практически идеальной. Высота этого колена равна L (и она заметно больше диаметра трубки), а переливание жидкости в горизонтальное колено не допускается

благодаря удерживаемой неподвижно легкой пробке. В некоторый момент пробку аккуратно отпускают. За какое время после этого пробка вылетит из трубки? Длина горизонтального колена $L' = \frac{3}{2}L$, поверхностное натяжение не учитывать.

Ответ на вопрос. Если ввести координатную ось x, направленную вдоль заданного участка пути выбрать на ней начало отсчета, совмещенное с краем участка, то уравнение движения тела $ma_x = -kx$ является уравнением гармонических колебаний, поэтому закон движения $x(t)$ описывается функциями синуса и косинуса.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи. Будем следить за движением пробки в проекции на горизонтальную координатную ось x. Ускорение появляется благодаря давлению вертикального столба жидкости, которое обращается практически в ноль, когда вся жидкость перельется в горизонтальное колено. Поэтому совместим начало отсчета координаты x с положением пробки именно в этот момент времени. С учетом неразрывности течения жидкости, в любой момент времени вместе с пробкой (с теми же скоростью и ускорением) будет двигаться вся жидкость, и поэтому

$$(m+\rho SL)\,a_x = \rho S\,h(x)\,g = -\rho Sg\,x \quad \Rightarrow \quad x_t'' + \frac{\rho S\,g}{m+\rho S\,L}x = 0$$

(здесь $h(x)$ - высота столба жидкости в вертикальном колене как функция x). Так как пробка легкая, то это уравнение сводится к $x_t'' + \dfrac{g}{L}x = 0$, и поэтому закон движения пробки от момента старта (когда $x(0) = -L$, $v_x(0) = 0$) до момента переливания жидкости в горизонтальное колено ($x(t_1) = 0$) – гармонический: $x(t) = -L\cdot\cos(\omega t)$, $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$. Переливание закончится в момент времени t_1: $x(t_1) = 0 \Rightarrow \cos(\omega t_1) = 0 \Rightarrow t_1 = \dfrac{\pi}{2\omega} = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{L}{g}}$. Далее пробка и жидкость, очевидно, будут двигаться с постоянной скоростью (высота столба жидкости уменьшилась до нуля) $V = v_x(t_1) = \omega L\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \omega L = \sqrt{gL}$. Поэтому оставшийся путь по трубке пробка пройдет за время $t_2 = \dfrac{L/2}{V} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{L}{g}}$, и полное время движения пробки по трубке $t = t_1 + t_2 = \dfrac{\pi+1}{2}\sqrt{\dfrac{L}{g}}$.

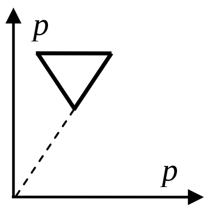
Ответ: за время $t = \dfrac{\pi+1}{2}\sqrt{\dfrac{L}{g}}$.

Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание 2

Вопрос. Чему может быть равен КПД тепловой машины при заданном соотношении температур нагревателя и холодильника?

Задача. На рисунке в координатах $p - V$ представлен цикл одноатомного идеального газа, являющегося рабочим телом тепловой машины. Диаграмма цикла имеет вид равнобедренного треугольника, основание которого параллельно оси объемов, а продолжение одной из сторон проходит через начало координат. Известно, что при изобарном расширении абсолютная температура газа возрастает в $n = 2$ раза. Найти КПД этого цикла.



Ответ на вопрос. При заданном соотношении температур нагревателя и холодильника (при различных вариациях формы цикла) КПД тепловой машины может принимать различные значения от нуля до максимально возможного: $0 < \eta \le \eta_{\max}$. Максимально возможный КПД $\eta_{\max} = 1 - \dfrac{T_X}{T_H}$ соответствует идеальной тепловой машине, работающей по циклу Карно, состоящему из двух адиабат и двух изотерм.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи. Пусть точки цикла пронумерованы так, что 12 – это процесс изобарного расширения, 23 – процесс с диаграммой, проходящей через начало координат, а давление и объем газа в точке 1 равны p и V. Тогда, согласно условию: $p_2 = p$, $T_2 = nT_1 \Rightarrow V_2 = nV_1$, $V_3 = \dfrac{V_1 + V_2}{2} = \dfrac{n+1}{2}V$. Поскольку точки 2 и 3 лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, то $\dfrac{p_3}{p_2} = \dfrac{V_3}{V_2} = \dfrac{n+1}{2n} \Rightarrow p_3 = \dfrac{n+1}{2n}p$. Теперь можно вычислить теплоту любого из процессов. При заданном $n = 2$ тепло поступает к рабочему телу только на участке 12, поэтому теплота нагревателя

$$Q_H = Q_{12} = p(V_2 - V_1) + \frac{3}{2}p(V_2 - V_1) = \frac{5}{2}(n-1)pV.$$

Работа в цикле $A = \dfrac{1}{2}(V_2 - V_1)(p_1 - p_3) = \dfrac{(n-1)^2}{4n}pV$. В результате для КПД получаем: $\eta = \dfrac{A}{Q_H} = \dfrac{n-1}{10n} = 5\%$.

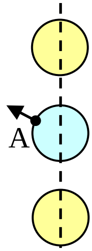
Ответ: $\eta = \dfrac{n-1}{10n} = 5\%$.

Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание 3

Вопрос. Напряженность статического электрического поля вблизи поверхности Земли около 100 В/м. Чему равна разность потенциалов между концами металлического шеста высотой 2,5 м, установленного вертикально?

Задача. Три шара радиуса $a = 40$ см расположены так, что их центры находятся на одной прямой на расстоянии $3a = 120$ см друг от друга. Крайние шары – непроводящие, и по поверхности каждого из них равномерно распределен заряд $q = 1$ мкКл. Средний шар –



– проводящий, и его заряд равен $-2q = -2$ мкКл. От точки А на поверхности среднего шара оторвался без начальной скорости ион с удельным зарядом $\beta = 2{,}5 \cdot 10^6$ Кл/кг, и удалился на большое расстояние от шаров. До какой скорости он при этом разогнался? Излучением пренебречь. Константа в законе Кулона $k \approx 9 \cdot 10^9$ Н·м^2/Кл^2.

Ответ на вопрос. Проводящий (металлический) шест является эквипотенциальным – все его точки имеют одинаковый потенциал. Поэтому разность потенциалов между любыми двумя его точками равна нулю.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи. Электрические силы потенциальны, поэтому работа этих сил не зависит от пути перемещения тела – только от разности потенциалов конечной и начальной точек. Проводящий шар эквипотенциален – вместо потенциала точки А можно взять потенциал любой другой точки шара – например, его центра. Под действием поля зарядов крайних шаров заряды на проводящем шаре перераспределятся сложным образом, но это не повлияет на потенциал центра – полный заряд поверхности шара неизменен. Потенциал центра проводящего шара считается по принципу суперпозиции $\varphi_A = 2 \cdot \dfrac{kq}{3a} + \dfrac{k(-2q)}{a} = -\dfrac{4}{3}\dfrac{kq}{a}$. Потенциал точек «на большом расстоянии» от нашей системы зарядов равен нулю, и поэтому увеличение кинетической энергии иона

$\frac{mv^2}{2} = \mp(0-\varphi_A)\beta m = \mp\frac{4kq\beta m}{3a} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{8kq\beta}{3a}}$. Видно, что для удаления «на большое расстояние» без начальной скорости ион должен был быть отрицательно. Подставляя числовые значения, получим: $v \approx 387$ км/с.

Ответ: $v = \sqrt{\frac{8kq\beta}{3a}} \approx 387$ км/с.

Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание 4

Вопрос. Чему может быть равно увеличение (отношение размера изображения к размеру предмета), даваемое тонкой собирающей линзой?

Задача. Тонкая линза, используемая в качестве лупы, дает на поверхности стола четкое изображение нити лампы, висящей под высоким потолком комнаты, если линза находится на расстоянии $l = 6$ см. С каким увеличением будет наблюдаться текст на лежащей на столе странице, если глаз наблюдателя будет находиться на расстоянии $L = 30$ см от рассматриваемого изображения?

Ответ на вопрос. Из построения хода лучей для линзы ясно, что поперечное увеличение предмета равно отношению расстояний от линзы до изображения b и от линзы до источника a: $\Gamma_\perp = -\frac{b}{a}$ (увеличение принимают отрицательным, когда изображение перевернуто.). Из формулы линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \Rightarrow b = \frac{aF}{a-F} \Rightarrow \Gamma_\perp = \frac{F}{F-a}$. Для разных действительных источников $a > 0$ мы можем получить $\Gamma_\perp > 1$

(при $0 < a < F$), $\Gamma_{\perp} < 0, |\Gamma_{\perp}| > 1$ (при $F < a < 2F$) и $\Gamma_{\perp} < 0, |\Gamma_{\perp}| < 1$ (при $a > 2F$).

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи. Прежде всего заметим, что при использовании тонкой собирающей линзы в качестве лупы (то есть для рассматривания прямых увеличенных изображений) мы должны наблюдать мнимое изображение с заметным увеличением, для чего предмет должен находится чуть ближе к линзе, чем ее фокальная плоскость. Поскольку расстояние до нити лампы очень велико, то ее изображение в первом опыте должно наблюдаться в фокальной плоскости линзы. Значит, фокусное расстояние линзы $F \approx l$. Во втором опыте расстояние от глаза до изображения заметно больше фокусного расстояния линзы, и глаз должен находиться достаточно близко к линзе, поэтому можно считать, что расстояние от линзы до изображения примерно равно L. Теперь, воспользовавшись формулой линзы, найдем соответствующее расстояние от линзы до рассматриваемых фрагментов текста a: $\frac{1}{a} - \frac{1}{L} \approx \frac{1}{l} \Rightarrow a \approx \frac{Ll}{L+l}$ (как обычно, расстояние до мнимого изображения считается в этой формуле отрицательно). Значит, $|\Gamma_{\perp}| \approx \frac{L}{a} \approx \frac{L}{l} + 1 = 6$.

Ответ: $|\Gamma_{\perp}| \approx \frac{L}{l} + 1 = 6$.

Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание отборочного этапа олимпиады школьников «Покори Воробьёвы горы!» по физике

2013-2014 учебный год

7-9 классы

В задании отборочного этапа была небольшая тестовая часть (*с максимальной оценкой 5 баллов*), после выполнения которой участник приступал к основному заданию. Каждое задание было индивидуальным – числовые данные во всех условиях изменялись (в пределах допустимых значений). Приведен пример заданий основной части.

1. «Железнодорожные измерения» *(10 баллов)*. Школьник 7 класса Василий Петров купил новую рулетку и поехал на дачу. За окном электрички мелькали столбы телеграфной линии. Вася решил измерить расстояние между столбами. Для этого он измерил длину вагона, оказавшуюся равной L м. Затем, выбрав длинный перегон, на котором, по его расчетам, поезд должен был идти с постоянной скоростью, Вася зашагал из одного конца вагона в другой, считая столбы, проносившиеся мимо него. Он насчитал N_1 столбов. Развернувшись, Вася зашагал обратно с той же скоростью относительно вагона, и в этот раз насчитал N_2 столбов. Чему же равно искомое расстояние?

Решение:

Предположим для определенности, что $N_1 > N_2$ (это означает, что первый раз Вася шел по ходу движения поезда, а второй раз – против, и поэтому во второй раз столбы относительно него двигались медленнее). Обозначим скорость движения Васи относительно вагона u, а скорость движения поезда на этом перегоне V. Оба раза время движения Васи $t = \dfrac{L}{u}$. При первом движении столбы сместились относительно Васи на расстояние $(V+u)t = N_1 D$, где D - искомое расстояние между столбами. Аналогично во втором случае $(V-u)t = N_2 D$. Вычитая эти соотношения, найдем: $2ut=(N_1-N_2)D=2u\dfrac{L}{u}=2L \Rightarrow D=\dfrac{2L}{N_1-N_2}$. При $N_1<N_2$ (в первый раз Вася идет против хода поезда) надо просто поменять местами N_1 и N_2. Общий ответ для всех случаев $D=\dfrac{2L}{|N_2-N_1|}$.

Ответ: $D=\dfrac{2L}{|N_2-N_1|}$.

2. «Школьная плотность» *(10 баллов)*. Американский школьник взял стеклянную банку объемом $V=0{,}5$ кварты и массой $m_0=0{,}6$ фунта, наполнил ее до краев водой, а затем опустил туда камень массой m_K фунта, выковырянный из стены школы. Масса банки с водой и камнем оказалась равной m_1 фунта. Определить плотность материала, из которого была сделана школа. Ответ дать в Международной системе единиц, округлив до целого значения. (1 кварта = 0,946 л, 1 фунт = 453,6 г, плотность воды $\rho_B=1000$кг/м^3).

Решение:

При взвешивании в банке находились камень с объемом V_K и вода с объемом $V_B=\dfrac{m_1-m_K-m_0}{\rho_B}$. Следовательно, объем камня $V_K=V-\dfrac{m_1-m_K-m_0}{\rho_B}$, а его плотность

$$\rho_K=\frac{m_K}{V_K}=\frac{\rho_B m_K}{\rho_B V-m_1+m_K+m_0}\ .$$

Подставляя имеющие числовые значения, находим:

$$\rho_K\approx\frac{453{,}6\cdot m_K}{0{,}74516-0{,}4536\cdot(m_1-m_K)}$$

(где массы выражены в фунтах).

Ответ:

$$\rho_K = \frac{m_K}{V_K} = \frac{\rho_B m_K}{\rho_B V - m_1 + m_K + m_0} \approx \frac{453{,}6 \cdot m_K}{0{,}74516 - 0{,}4536 \cdot (m_1 - m_K)}.$$

3. «На вкус и цвет…» *(10 баллов).* Красная планета Плюм заселена разноцветными бракадашками. Что бы получить очередного бракадашку яйцо опускают в глубокий колодец, на дне которого находится неизвестная жидкость, называемая «живая вода». Цвет бракадашки зависит от температуры живой воды (см. таблицу). Колодец с живой водой священен, из него нельзя зачерпывать воду и в него нельзя опускать ничего кроме яиц бракадашек и специального груза из неизвестного на Земле сплава.

t, °C	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80	80 - 90	90-100
цвет	черный	фиолетовый	синий	голубой	зеленый	желтый	оранжевый	красный	коричневый	белый

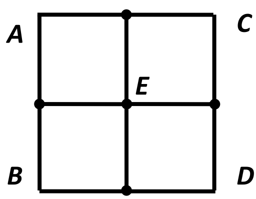
Алисе надо обязательно узнать какого цвета бракадашки будут вылупляться сегодня. У нее есть калориметр, который очень хорошо сохраняет температуру, и градусник. Наполнив калориметр водой с температурой, равной $t_1 = 20°C$, она опустила туда груз, который до этого находился в колодце с живой водой. Через некоторое время в калориметре устанавливается температура, равная $t_2 = 22{,}7°C$. Измерив t_2, Алиса снова поместила груз в колодец, а потом опять поместила его в калориметр. Тогда температура воды в калориметре оказалась равной $t_3 = 25{,}2°C$. После этого в колодец отправилось яйцо бракадашки. Какого цвета вылупится бракадашка?

Решение:

Ясно, что для определения цвета необходимо найти t - температуру живой воды на момент проведения опыта. Уравнение теплового баланса для процесса нагревания груза после первого погружения: $C(t-t_2)=C_K(t_2-t_1)$, где C и C_K – теплоемкости груза и калориметра с водой соответственно. При втором погружении $C(t-t_3)=C_K(t_3-t_2)$. Из этих равенств находим: $\dfrac{t-t_3}{t-t_2}=\dfrac{t_3-t_2}{t_2-t_1} \Rightarrow t=\dfrac{t_2^2-t_1t_3}{2t_2-t_1-t_3}$. Для заданных числовых значений: $t=\dfrac{t_2^2-t_1t_3}{2t_2-t_1-t_3}=56{,}45°C$, что соответствует <u>желтому</u> цвету бракадашки.

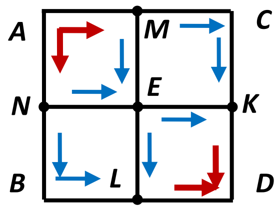
ОТВЕТ : $t=\dfrac{t_2^2-t_1t_3}{2t_2-t_1-t_3}=56{,}45°C$, цвет – желтый.

4. «Сопротивляющиеся квадраты» *(20 баллов).* Из кусков однородной металлической проволоки изготовили рамку в форме квадрата, «рассеченного» на четыре одинаковых меньших квадрата (см. рисунок). Сопротивление рамки, измеренное между точками A и D, оказалось равно $R = 24$ Ом. Найти сопротивление рамки между точками B и E.



Решение:

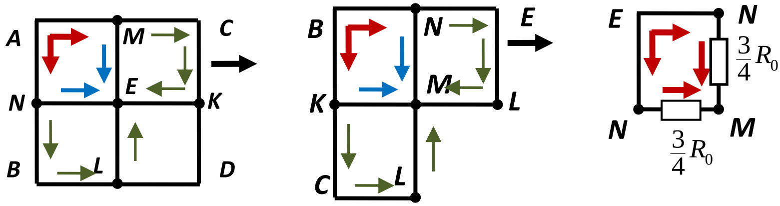
Рассмотрим сначала подключение к точкам A и D внешнего напряжения U (для определенности будем считать, что к точке A подключен «плюс» источника, а к точке D - «минус»). Пусть общий ток, стекающий с полюса источника $\frac{U}{R} \equiv I$. Из симметрии схемы ясно, что по двум сторонам рамки от точки A растекаются одинаковые токи (по $\frac{I}{2}$), и к точке D стекаются токи по $\frac{I}{2}$. Кроме того, по перемычкам рамки от периметра до точки E стекаются



(две перемычки, ближние к A- ME и NE) или растекаются (две перемычки, ближние к D - EL и EK) одинаковые токи, силу которых обозначим I'. Тогда через точку C течет ток $\frac{I}{2} - I'$. Обозначив R_0 сопротивление половины стороны рамки, запишем две формулы для напряжения между точками M и K: $I' \cdot 2R_0 = \left(\frac{I}{2} - I'\right) \cdot 2R_0 \Rightarrow I' = \frac{I}{4}$. Значит, общее напряжение $U = IR$ равно

$$U = U_{AM} + U_{ME} + U_{EK} + U_{KD} = R_0\left(\frac{I}{2} + \frac{I}{4} + \frac{I}{4} + \frac{I}{2}\right) = \frac{3I}{2} R_0,$$

поэтому $R_0 = \frac{2}{3} R$. Для подключения внешнего напряжения U к точкам A и E заметим, что в силу симметрии напряжение между точками K и L равно нулю, и соединяющий их участок проволоки (содержащий точку D) можно убрать. Поскольку сопротивление участка, на котором соединены параллельно сопротивления R_0 и $3R_0$, равно $\frac{3}{4} R_0$, то схему можно преобразовать:



Таким образом, в этом случае сопротивление равно $R' = \frac{7}{8}R_0 = \frac{7}{12}R = 14$ Ом.

Ответ: $R' = \frac{7}{8}R_0 = \frac{7}{12}R = 14$ Ом.

5. «Эксперимент по переписке» *(20 баллов)*. Однажды Петр Васечкин получил письмо от своего знакомого (Василия Петрова), который описывал поставленный им эксперимент. Василий сконструировал «пушку», которая выстреливала небольшие колечки таким образом, что они начинали скользить по горизонтальной ровной поверхности. Василий выстреливал из пушки небольшое кольцо 1 так, что оно испытывало лобовое соударение с другим кольцом 2, которое покоилось на этой поверхности. После удара кольца разлетались, и Василий измерял путь, пройденный кольцами по поверхности до полной остановки. Оказалось, что $s_1 = (S1 \pm 0{,}5)$мм, а $s_2 = (S2 \pm 0{,}5)$ мм. Петров утверждал, сто он с очень высокой точностью измерил коэффициенты трения колец о поверхность, которые равны μ_1 и μ_2 соответственно. Чему равно отношение масс колец $\frac{m_2}{m_1}$, использованных в опыте? Какова возможная ошибка определения этой величины (это второй вопрос!). Ответ на первый вопрос округлите до разряда, соответствующего точности измерения, а ответ на второй – до первой значащей цифры.

Решение:

Для лобового соударения упругих колечек их скорости сразу после удара в проекции на направление первоначального движения первого колечка $v_{1,2}$ определяются законами сохранения энергии и импульса:

$$\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_0 \\ \dfrac{m_1v_1^2}{2} + \dfrac{m_2v_2^2}{2} = \dfrac{m_1v_0^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_0 \\ v_2 = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}v_0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x \equiv \frac{|v_1|}{|v_2|} = \frac{1}{2}\left|1 - \frac{m_2}{m_1}\right|.$$

После удара каждое из колец движется под действием силы трения скольжения – его скорость уменьшается, причем величина ускорения равна μg. Поэтому тормозной путь связан с начальной скоростью $s = v\dfrac{v}{\mu g} - \dfrac{\mu g}{2}\left(\dfrac{v}{\mu g}\right)^2 = \dfrac{v^2}{2\mu g}$. Значит, отношение длин путей колец $\dfrac{s_1}{s_2} = \dfrac{\mu_2 v_1^2}{\mu_1 v_2^2} = \dfrac{\mu_2}{\mu_1}x^2$. Из этого соотношения выражаем $x = \sqrt{\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\dfrac{s_1}{s_2}}$. Поскольку нам известны только величины путей, но экспериментатор не указал, в какую сторону после удара движется первое колечко, то возможны две ситуации:

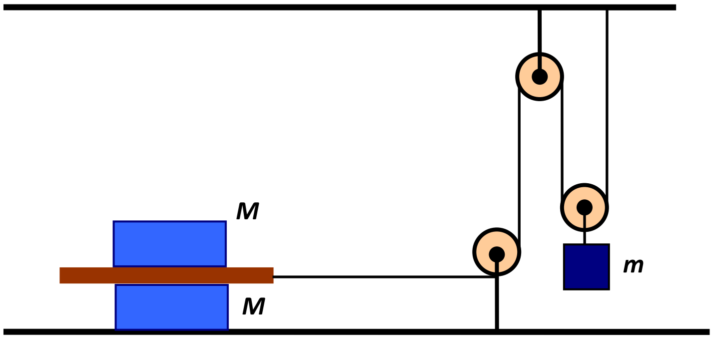
1) первое колечко отлетает назад ($v_1 < 0$) при $m_2 > m_1$, и в этом случае $\dfrac{m_2}{m_1} = 1 + 2x$;

2) первое колечко продолжает двигаться вперед ($v_1 > 0$) при $m_2 < m_1$, и в этом случае $\dfrac{m_2}{m_1} = 1 - 2x$;

Что касается точности этих ответов, то она определяется точностью вычисления x, и, поскольку коэффициенты трения измерены очень точно, то возможная неточность связана только с неточностями в определении $s_{1,2}$. По порядку величины можно считать, что максимальная возможная ошибка в определении $\frac{m_2}{m_1} \equiv y$ соответствует максимальной ошибке в определении путей: $\Delta y \approx 2\Delta x \approx x\left(\frac{\Delta s_1}{s_1} + \frac{\Delta s_2}{s_2}\right) = x\left(\frac{0{,}5}{S_1} + \frac{0{,}5}{S_2}\right)$.

Ответ: Существует два варианта ответа: на первый вопрос: $\frac{m_2}{m_1} = 1 \pm 2x$, где $x = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{s_1}{s_2}}$, и один ответ на второй вопрос $\Delta\left(\frac{m_2}{m_1}\right) \approx x\left(\frac{0{,}5}{S_1} + \frac{0{,}5}{S_2}\right)$.

6. «Тянем-потянем» *(25 баллов)* Система тел, изображенная на рисунке, удерживается неподвижной. Найти ускорение, с которым начнет опускаться груз массы m после отпускания. Доска, зажатая между двумя одинаковыми брусками с массами M, очень легкая. Поверхность, на которой находятся бруски с доской, горизонтальна и коэффициент трения нижнего бруска о поверхность равен $\mu_1 = 0{,}25$. Коэффициент трения между доской и каждым из брусков $\mu_2 = 0{,}75$, нить практически невесомая и нерастяжимая. Все блоки невесомы и вращаются без трения. Второй вопрос: каким станет это ускорение, если массу груза увеличить вдвое? Считать ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/с^2.



Решение:

У каждого участника были заданы свои значения масс (кроме того, в части вариантов были другие значения коэффициентов трения). Ответ очень сильно зависит от конкретных значений параметров задачи, поэтому проведем общее исследование для всех вариантов с данными $\mu_{1,2}$.

Так как доска очень легкая, то силы нормальной реакции, действующие на доску со стороны брусков, равны $N_2 \approx N_1 = Mg$, и максимальное значение силы трения покоя $F_2 \approx F_1 = 0{,}75 \cdot Mg$. На нижний брусок со стороны поверхности действует сила нормальной реакции $N_3 \approx 2Mg$, и здесь $F_3 \approx 0{,}5 \cdot Mg$, то есть скольжение начнется именно на этой поверхности – когда сила натяжения нити превысит это значение, доска начнет двигаться вместе с обоими брусками. В состоянии покоя груз создает натяжение нити, равное $T = 0{,}5 \cdot mg$, поэтому доска остается в покое при $m \le M$, а при $m > M$ движется.

Рассмотрим теперь совместное движение доски и обоих брусков. Всякое смещение груза вниз вызывает вдвое большее смещение доски, то есть при ускорении груза a ускорение доски с брусками равно $2a$. Уравнения движения позволяют определить ускорение:

$$\left\{ \begin{array}{c} 2M \cdot 2a = T - 0{,}5 \cdot Mg \\ ma = mg - 2T \end{array} \right\} \Rightarrow a = \frac{m - M}{m + 8M} g .$$

Но здесь необходимо учесть, что такое движение возможно, пока сила трения между доской и нижним бруском (который тормозит сила трения скольжения со стороны поверхности) может сообщать ему ускорение $2a$, то есть

$$F_2 = 2Ma + 0{,}5\cdot Mg = \frac{M(5m+4M)}{2(m+8M)}g .$$

С другой стороны, эта сила не должна превосходить $0{,}75\cdot Mg$, и поэтому полученная формула правильно описывает ускорение груза при $\frac{M(5m+4M)}{2(m+8M)}g \le \frac{3}{4}Mg \Rightarrow m \le \frac{16}{7}M$.

При $m > \frac{16}{7}M$ доска начинает скользить по нижнему бруску, а сила трения между ними становится силой трения скольжения. Верхний брусок по-прежнему движется вместе с доской, и уравнение движения этой системы тел $M\cdot 2a = T - 0{,}75\cdot Mg$, и вместе с уравнением движения груза $ma = mg - 2T$ оно позволяет получить новую формулу для ускорения $a = \frac{2m-3M}{2(m+4M)}g$. Снова нам нужно проверить, что сила трения между доской и верхним бруском может сообщать ему вдвое большее ускорение, не превышая $0{,}75\cdot Mg$: $F_1 = 2Ma \le 0{,}75\cdot Mg \Rightarrow m \le \frac{24}{5}M$. Таким образом, новая формула верна при $\frac{16}{7}V < m \le \frac{24}{5}M$.

Наконец, при $m > \frac{24}{5}M$ доска уже выскальзывает между брусков. Ее тормозит суммарная сила трения, равная теперь $1{,}5\cdot Mg$, и тянет вперед сила натяжения нити. Так как доска очень легкая, то $T \approx 1{,}5\cdot Mg$, и ускорение груза определяется из его уравнения движения $ma = mg - 2T \approx (m-3M)g \Rightarrow a = \frac{m-3M}{m}g$.

Объединяя все случаи, получаем общую формулу:

$$a=\begin{cases} 0, & m\le M \\ \dfrac{m-M}{m+8M}g, & M<m\le\dfrac{16}{7}M \\ \dfrac{2m-3M}{2(m+4M)}g, & \dfrac{16}{7}M<m\le\dfrac{24}{5}M \\ \dfrac{m-3M}{m}, & m>\dfrac{24}{5}M \end{cases}.$$

При решении задачи необходимо воспользоваться этой формулой дважды – сначала для заданной в условии массы груза m, а затем для удвоенной: $m\to 2m$. Во всех вариантах данные были выбраны так, чтобы m и $2m$ относились к разным интервалам значений массы груза в общей формуле.

Задание заключительного этапа олимпиады школьников «Покори Воробьёвы горы!» по физике

2013-2014 учебный год.

7-9 классы

Приведены качественные вопросы (*максимальная оценка 5 баллов*), условия и решения задач (*максимальная оценка 20 баллов*).

Задание 1

Вопрос. Что такое масса тела, вес тела и сила тяжести, действующая на тело вблизи Земли? Как они связаны между собой?

Задача. Вору и мошеннику Наземникусу удалось пробраться в сейф, полный золотых слитков и слитков из неизвестного сплава одинакового размера. С помощью волшебного заклинания Наземеникус может незаметно выбраться из сейфа, прихватив с собой золота не больше своей массы. Если Наземникус попробует унести чуть больше, его немедленно схватят тролли, охраняющие сейф. Наземникус прихватил с собой тонкий прочный стержень длиной 1 метр и массой 0,3 кг с отверстием, находящемся на расстоянии 25 см от левого конца стержня и гирю массой 1 кг. Закрепив стержень через имеющееся отверстие, Наземникус соорудил импровизированные весы и узнал, что 1) золотой слиток, подвешенный в левому концу стержня перевешивает слиток из неизвестного сплава, подвешенный к правому концу; 2) слиток из неизвестного сплава вместе с гирей, подвешенные к правому концу, перевешивают золотой слиток, подвешенный к левому концу; 3) гиря, подвешенная к правому концу стрежня, перевешивает слиток из неизвестного сплава, подвешенный к левому концу; 4) слиток из неизвестного сплава, подвешенный к правому концу, перевешивает гирю, подвешенную к левому концу. Больше измерений Наземникусу провести не удалось. Определите, какое максимальное количество золотых слитков может взять с собой Наземникус, чтобы наверняка не быть пойманным, если его масса 70 кг (он использует только данные произведенных взвешиваний!).

Решение задачи. Условие равновесия "весов" Наземникуса: $x_1 g l_1 = M g l_2 + x_2 g l_3$, откуда $x_1 = 0{,}3 + 3x_2$, где x_1 и x_2 - масса тел, подвешенных к левому и правому концам стержня, соответственно; $l_1 = 25$см - расстояние от точки закрепления стрежня до его левого конца, $l_2 = 25$см - расстояние от точки закрепления стрежня до его центра, $l_3 = 75$см - расстояние от точки закрепления стрежня до его правого конца, M - масса стержня. Подставляем то, что получилось при взвешиваниях:

1) $m_1 > 0{,}3 + 3m_2$ (m_1 - масса золотого слитка, m_2 - масса слитка из неизвестного сплава в килограммах).

2) $m_1 < 3{,}3 + 3m_2$

3) $m_2 < 3{,}3$

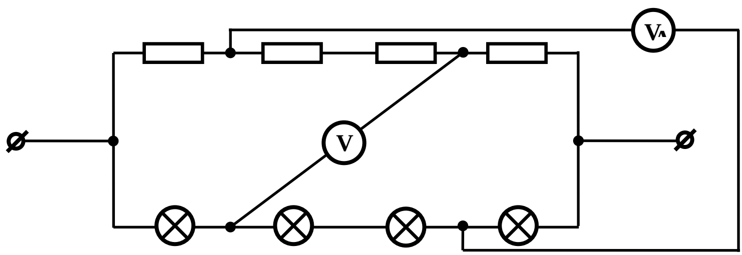
4) $m_2 > 0{,}23$ ($1<0{,}3+3m_2$)

Максимально возможное при таких условиях значение m_1 составляет 13,2 кг. Соответственно, безопасно вынести из хранилища Наземникус может 5 слитков (точно не больше 66 кг).

Ответ: 5 слитков.

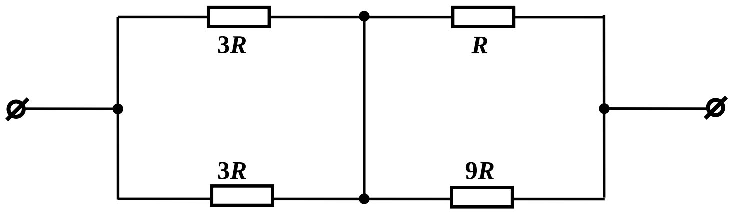
Задание 2

Вопрос. Напряжение и сила тока в электрической цепи. Закон Ома.



Задача. На внешних клеммах цепи, схема которой показана на рисунке, поддерживается постоянное напряжение $U = 48$ В. Сопротивления всех резисторов в схеме одинаковы и равны $R = 10$ Ом, сопротивления всех ламп в схеме также можно считать одинаковыми и равными $R_1 \approx 3R = 30$ Ом. К цепи подключены амперметр и вольтметр, которые можно считать практически идеальными (то есть присутствие амперметра практически не влияет на силу тока в его участке цепи, а присутствие вольтметра практически не влияет на напряжение между точками, к которым он подключен), сопротивления соединительных проводов пренебрежимо малы. Найти показания приборов.

Решение задачи. Прежде всего нужно заметить, что сопротивлении идеального амперметра равно нулю (соответствующий участок цепи можно закоротить), а идеального вольтметра - бесконечно велико (участок можно разомкнуть), и для расчета токов и напряжений можно использовать схему



Полное сопротивление цепи $R_n = \dfrac{3R \cdot 3R}{3R + 3R} + \dfrac{R \cdot 9R}{R + 9R} = 2{,}4R = 24$ Ом, и полный ток в цепи $I = \dfrac{5U}{12R} = 2$ А. Этот ток делится поровну между сопротивлениями $3R$ (по $I_1 = \dfrac{5U}{24R} = 1$ А) и в соотношении 1:9 между сопротивлениями $9R$ и R ($I_2 = \dfrac{U}{24R} = 0{,}2$ А и $I_3 = \dfrac{3U}{8R} = 1{,}8$ А соответственно). Из баланса токов в узлах «закороченной» ветви видно, что через амперметр течет ток («снизу вверх») $I_A = I_3 - I_1 = \dfrac{U}{6R} = 0{,}8\,\text{А}$. Напряжение на вольтметре равно разности напряжений на трех лампах «слева» и одного резистора «слева»: $U_V = I_1 3R + I_2 6R - I_1 R = \left(3\dfrac{5}{24} + 6\dfrac{1}{24} - \dfrac{5}{24}\right)U = \dfrac{2}{3}U = 32\,\text{В}$.

Ответ: $I_A = \dfrac{U}{6R} = 0{,}8\,\text{А}$, $U_V = \dfrac{2}{3}U = 32\,\text{В}$.

Задание 3

Вопрос. Каким условиям должна удовлетворять лодка, чтобы ее можно было использовать для плавания по воде?

Задача. Наземникус решил спрятать один из вынесенных золотых слитков в глубоком цилиндрическом колодце, площадь поперечного сечения которого $S = 0{,}5\,\text{м}^2$. В колодце была вода и поддерживалась температура $0°C$. Наземникус поместил слиток в кусок льда, причем лед со слитком плавал на поверхности воды в колодце, не касаясь стенок. Из-за небольшого повышения температуры лед все-таки растаял, и уровень воды в колодце понизился на $\Delta h_1 \approx 9{,}48$ мм (вода из колодца не выливается и в колодец не поступает). После извлечения слитка из колодца уровень понизился еще на $\Delta h_2 \approx 0{,}52$ мм. Найдите массу золотого слитка и определите его плотность (слитки содержат небольшое количество примесей, и их плотность может отличаться от «табличной» плотности чистого золота). Плотность воды в колодце $\rho_0 = 1{,}00\,\text{г/см}^3$, тепловым расширением всех материалов при небольшом нагревании пренебречь.

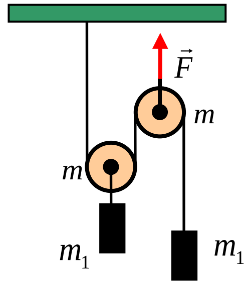
Решение задачи. Пусть V_0 - начальный объем воды в колодце, m_0 - начальная масса льда, m - масса золотого слитка. До того, как лед начал таять, объем под поверхностью воды был равен сумме V_0 и объема вытесненной воды, который, согласно закону Архимеда, равен $\dfrac{m_0+m}{\rho_0}$. Итак, $V_1=V_0+\dfrac{m_0+m}{\rho_0}$. После таяния льда из него образуется вода объемом $\dfrac{m_0}{\rho_0}$, а слиток золота объемом $\dfrac{m}{\rho}$ (ρ - плотность слитка) тонет. Поэтому объем под поверхностью $V_2=V_0+\dfrac{m_0}{\rho_0}+\dfrac{m}{\rho}$, и понижение уровня воды в колодце $\Delta h_1=\dfrac{V_1-V_2}{S}=\dfrac{m}{S}\left(\dfrac{1}{\rho_0}+\dfrac{1}{\rho}\right)$. После извлечения слитка объем под поверхностью уменьшится еще на объем слитка ($V_3=V_0+\dfrac{m_0}{\rho_0}$), и $\Delta h_2=\dfrac{V_2-V_3}{S}=\dfrac{m}{S\rho}$. Из этих соотношений легко выразить: $m=\rho_0 S(\Delta h_1+\Delta h_2)\approx 5$ кг, и $\rho=\dfrac{m}{S\,\Delta h_2}=\rho_0\dfrac{\Delta h_1+\Delta h_2}{\Delta h_2}\approx 19{,}2$ г/см^3.

Ответ: $m=\rho_0 S(\Delta h_1+\Delta h_2)\approx 5$ кг, $\rho=\rho_0\dfrac{\Delta h_1+\Delta h_2}{\Delta h_2}\approx 19{,}2$ г/см^3 (как видно, на самом деле Наземникус мог вынести 13 слитков – не завися от ошибок округления).

Задание 4

Вопрос. Подвижный блок. Опишите соотношение сил и перемещений при использовании подвижного блока.

Задача. Из двух одинаковых цилиндрических роликов массы m, двух одинаковых грузов массы $m_1=3m$ и легкой прочной нерастяжимой нити собрали механическую систему, показанную на рисунке. Один конец нити закреплен на «потолке», ролики не вращаются, нить скользит по роликам без трения. Найти величину силы $\vec{F}$, с которой нужно тянуть вверх ось правого ролика, чтобы



левый груз в этой системе двигался с постоянной по величине скоростью? Каким при этом будет ускорение правого груза? Ускорение свободного падения g считать известным.

Решение задачи. При постоянной скорости ускорение левого груза вместе с прикрепленным к нему роликом равно нулю. Следовательно, сумма приложенных к этой системе тел сил равна нулю – удвоенная сила натяжения нити уравновешивает суммарный вес тел, и величина силы натяжения $T = 2mg$. Теперь из уравнения движения для правого груза можно найти его ускорение: $3ma = 3mg - T = mg \Rightarrow a = \frac{1}{3}g$ (оно направлено вниз). Поскольку нить нерастяжима, сумма длин ее вертикальных участков должна оставаться неизменной, поэтому в любой момент времени сумма скоростей грузов (в проекции на вертикаль) должна равняться удвоенной скорости правого ролика, и, следовательно, сумма их ускорений равна удвоенному ускорению этого ролика: $0 + a = 2a' \Rightarrow a' = \frac{1}{2}a = \frac{1}{6}g$. Остается записать уравнение движения для правого ролика $ma' = 2T + mg - F$ и найти из него величину силы: $F = 4mg + mg - \frac{mg}{6} = \frac{29}{6}mg$.

Ответ: величина силы $F = \dfrac{29}{6}mg$, ускорение правого груза $a = \dfrac{1}{3}g$ направлено вниз.

Задание отборочного этапа олимпиады школьников «Покори Воробьёвы горы!» по физике

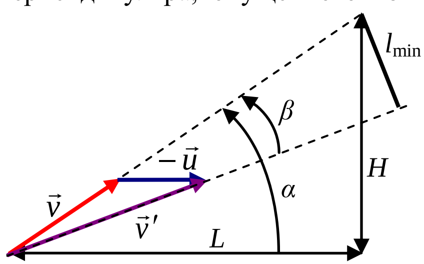
2013-2014 учебный год.

10- 11 классы

У старших классов в 2013/14 году задание отборочного этапа также состояло из тестового вопроса (*с максимальной оценкой 5 баллов*) и основного задания, которое было индивидуальным (использовалось три равноценных варианта, в каждом из которых числовые данные варьировались от работы к работе). Приведен пример основного задания.

1. «Из истории физики» *(15 баллов)*. Однажды Галилео Галилей бросал камешки с Пизанской башни. Один из камешков он бросил горизонтально со скоростью u из точки, находящейся на высоте H над поверхностью земли. Камешек полетел в направлении мальчика, стоящего на расстоянии L от башни. В то же мгновение этот мальчик бросил свой камешек с помощью пращи со скоростью v, причем вектор этой скорости был направлен на точку вылета камня Галилея. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите, каким будет минимальное расстояние между камешками в процессе полета.

Решение. В системе отсчета, связанной с камнем Галилея, камень мальчика движется равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{u}$. Поэтому $l_{\min}$ соответствует длине перпендикуляра, опущенного из точки положения камня Галилея на линию движения камня мальчика. Как видно из построения,



$$l_{\min} = \sqrt{L^2 + H^2} \cdot \sin\beta .$$

С другой стороны, по теореме синусов

$\sin\beta = \sin\alpha\dfrac{u}{v'} = \sin\alpha\dfrac{u}{\sqrt{v^2+u^2+2uv\cos\alpha}}$. Учитывая, что $\sqrt{L^2+H^2}\cdot\sin\alpha = H$ и что $\cos\alpha = \dfrac{L}{\sqrt{L^2+H^2}} = \dfrac{4}{5}$, получаем:

$$l_{\min} = \frac{uH}{\sqrt{u^2+v^2+uv\cdot 2L/\sqrt{L^2+H^2}}} = \frac{uH}{\sqrt{u^2+v^2+8uv/5}}.$$

Ответ: $l_{\min} = \dfrac{uH}{\sqrt{u^2+v^2+8uv/5}}$.

2. «Заряженная гирлянда» *(15 баллов)*. Гирлянда из 2014 одинаковых металлических шариков подвешена на длинном непроводящем тросе. Расстояние между шариками много больше их диаметра, и они удалены от других тел, которые могут влиять на электростатические поля. На все шарики нанесен одинаковый заряд Q. Еще один металлический шарик (меньшего размера) закреплен на изолирующей ручке. Этим шариком поочередно касаются всех шаров гирлянды. Известно, что после касаний абсолютная величина заряда шарика, которого касались вторым, оказалась на n% больше, чем шарика, которого касались первым. Чему после всех касаний будет равен заряд маленького шарика (с точностью до нКл)?

Решение. При касании двух проводящих тел их общий заряд распределяется между ними в пропорции, определяемом геометрическими параметрами (размерами и относительным положением тел). При касании двух шаров, удаленных от остальных тел, эта пропорция определяется только соотношением их радиусов и поэтому одинакова для всех касаний в нашей системе. Пусть меньший шарик получает долю z от общего заряда. Очевидно, что больший шар получает при этом долю $1-z$ от общего заряда, причем z должно быть меньше 0,5. Тогда после первого касания заряд меньшего шарика $q_1 = zQ$, а заряд первого шара после этого касания $Q_1 = (1-z)Q$. После касания второго шара $q_2 = z(Q+zQ) = z(1+z)Q$, причем

$$Q_2 = (1-z)(Q+zQ) = (1-z^2)Q.$$

В соответствии с условием задачи $\dfrac{Q_2}{Q_1} = 1+z = 1+\dfrac{n}{100} \Rightarrow z = \dfrac{n}{100}$.

Продолжая аналогичные рассуждения, найдем, что

$$q_3 = z[Q + z(1+z)Q] = z(1+z+z^2)Q, \ldots$$
$$q_{2014} = z(1+z+z^2+\ldots+z^{2013})Q.$$

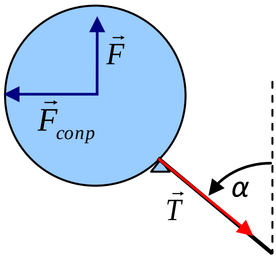
С точностью, требуемой в ответе, для всех возможных n сумма в скобках равна полной сумме геометрической прогрессии: $1+z+z^2+\ldots+z^{2013} \approx \dfrac{1}{1-z}$. Поэтому $q_{2014} \approx \dfrac{z}{1-z}Q = \dfrac{n}{100-n}Q$.

Можно обойтись без суммирования прогрессии. Для этого, рассмотрев два касания и установив, что $z = \dfrac{n}{100} < 0{,}1$, нужно заметить, что передаваемый при касании заряд будет быстро убывать с ростом номера касания. Поэтому при достаточно больших номерах $k >> 1$ ситуация должна стать «практически установившейся» - в рамках требуемой точности передача заряда становится пренебрежимо малой. Это означает, что для таких k $\dfrac{q_k}{Q_k} = \dfrac{z}{1-z}$ и $Q_k \approx Q$, откуда $q_k \approx \dfrac{z}{1-z}Q = \dfrac{n}{100-n}Q$ при $k >> 1$.

Ответ: $q \approx \dfrac{n}{100-n}Q$.

3. «Шарик и ветер» *(15 баллов).* Наполненный гелием воздушный шарик имеет форму, близкую к сферической. Если отпустить его в безветренную погоду, скорость его установившегося (то есть равномерного) подъема будет равна v_0. Этот шарик привязали к багажнику велосипеда. Когда велосипедист на этом велосипеде ехал навстречу ветру со скоростью v относительно земли, нить шарика отклонилась от вертикали на постоянный угол. Найдите этот угол, если скорость ветра в этот момент u. Считать, что при движении шарика в воздухе величина действующей на него силы сопротивления пропорциональна квадрату его скорости относительно воздуха.

Решение. При равномерном подъеме шарика сила сопротивления воздуха уравновешивает его подъемную силу, равную разности силы Архимеда и веса шарика, поэтому: $\beta v_0^2 = F \equiv F_A - mg$.



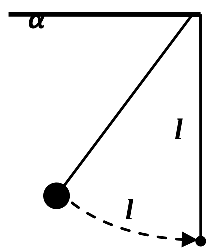
Во время движения вместе с велосипедом, в системе отсчета, связанной с этим велосипедом, равновесие шарика обеспечивается силой натяжения нити, которая уравновешивает подъемную силу и горизонтальную силу сопротивления воздуха. Отметим, что условие постоянства угла наклона нити α указывает на возможность пренебрежения весом самой нити. Таким образом:

$$\begin{cases} T\sin\alpha = \beta(v+u)^2 \\ T\cos\alpha = F = \beta v_0^2 \end{cases}.$$

Разделив эти соотношения друг на друга, находим, что $tg(\alpha) = \dfrac{(v+u)^2}{v_0^2} \Rightarrow \alpha = arctg\left[\dfrac{(v+u)^2}{v_0^2}\right]$.

Ответ: $\alpha = arctg\left[\dfrac{(v+u)^2}{v_0^2}\right]$.

4. «Тяжелый удар» *(25 баллов)* На двух невесомых нерастяжимых нитях почти одинаковой длины l подвешены рядом два небольших шарика, один из которых очень тяжелый, а другой – очень легкий. Тяжелый шарик отводят в сторону, так что его нить составляет угол α с вертикалью, и отпускают без начальной скорости. В результате происходит упругий лобовой удар тяжелого шарика по легкому, причем перед ударом скорость тяжелого шарика направлена горизонтально. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите максимальную высоту подъема легкого шарика после удара. Кронштейн, на котором подвешены нити, не мешает движению легкого шарика и его нити.



Решение. Рассмотрим сначала движение тяжелого шара до удара о легкий. В этом случае его потенциальная энергия переходит в кинетическую, и перед ударом тяжелый шар движется горизонтально со скоростью V_0, определяемой из уравнения

$$Mgl\,[1-\cos(\alpha)] = \frac{MV_0^2}{2} \Rightarrow V_0 = \sqrt{2gl[1-\cos(\alpha)]}\,.$$

Теперь рассмотрим удар. Лучше всего анализировать его в системе отсчета, связанной с нелетающим тяжелым шаром: в этой СО легкий шар налетает на тяжелый со скоростью V_0, и в результате упругого лобового удара отскакивает обратно с то же скоростью. Соответственно, относительно Земли сразу после удара легкий шар движется со скоростью $v_0 = 2V_0 = 2\sqrt{2gl[1-\cos(\alpha)]}$. Наконец, перейдем к анализу движения легкого шара. Пока нить натянута, он движется по окружности радиуса l под действием сил тяжести и натяжения нити. В положении, в котором его нить отклонилась от вертикали на угол φ, центростремительная компонента его ускорения определяется из уравнения $m\dfrac{v^2}{l} = T - mg\cos\varphi$. С другой стороны, из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + mgl(1-\cos\varphi) = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v^2 = v_0^2 - 2gl(1-\cos\varphi)\,.$$

Угол, при котором скорость обратится в ноль, $\cos\varphi_0 = 1 - \frac{v_0^2}{2gl} = 4\cos\alpha - 3$, (из этого соотношения, в частности, видно, что для заданных α легкий шар поднимается выше точки подвеса!). Можно найти закон изменения силы натяжения нити в процессе движения: $T = mg\cos\varphi + m\frac{v^2}{l} = \frac{m}{l}[v_0^2 + gl(3\cos\varphi - 2)]$, и найти, для какого угла перестает выполняться предположение о том, что нить натянута (по обращению силы натяжения нити в ноль): $T = 0 \Rightarrow \cos\varphi_1 = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{v_0^2}{gl}\right) = \frac{2}{3}[4\cos\alpha - 3]$. Для заданных α всегда $\varphi_1 < \varphi_0$, то есть нить провисает, когда легкий шар еще продолжает подъем! После провисания нити шар движется только под действием силы тяжести, то есть по параболе. Стартовая скорость для такого движения

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gl(1-\cos\varphi_1)} = \sqrt{\frac{v_0^2 - 2gl}{3}} = \sqrt{\frac{2gl}{3}(3 - 4\cos\alpha)},$$

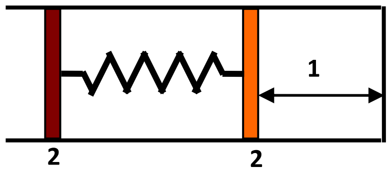
а угол вылета по отношению к горизонту $\beta = \pi - \varphi_1 \Rightarrow \cos\beta = \frac{2}{3}(3 - 4\cos\alpha)$. Максимальная высота подъема соответствует минимальному модулю скорости $v_{\min} = v_1\cos\beta$. Итак:

$$h_{\max} = \frac{v_0^2 - v_{\min}^2}{2g} = 4l(1-\cos\alpha) - \frac{4l}{27}(3 - 4\cos\alpha)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad h_{\max} = \frac{4\cos(\alpha)[9 - 8\cos(\alpha)]^2}{27}l.$$

Ответ: $h_{\max} = \frac{4\cos(\alpha)[9 - 8\cos(\alpha)]^2}{27}l$. Ответ без учета провисания нити (но в остальных отношениях правильный) оценивался в 10 баллов.

5. «Пар и газ против пружины» *(10 баллов).* В гладкой горизонтальной трубе, закрытой с одного конца, находятся два вертикальных поршня (см. рисунок). Поршень 1 можно передвигать в трубе, фиксируя в разных положениях. Поршень 2 свободно скользит в трубе. Объем между поршнями вакуумирован, и между ними вставлена невесомая пружина. Между поршнем 2 и закрытым торцом трубы находятся воздух с относительной влажностью ϕ_0 %. Первоначально поршень 1 находится от торца трубы на расстоянии, равном длине недеформированной пружины, а поршень 2 – на расстоянии x_0. Температура системы поддерживается постоянной. Известно, что при заполнении объема между поршнем 2 и торцом трубы только насыщенным водяным паром при этой же температуре поршень 2 (при том же положении поршня 1) располагался на расстоянии, в два раза меньшем. На какое расстояние надо сдвинуть поршень 1, чтобы расстояние между поршнем 2 и торцом трубы уменьшилось в n раз?



Решение. Пусть давление насыщенных паров воды при температуре системы $p_H(t) \equiv p_0$. В соответствии с условием, $p_0 S = k\dfrac{x_0}{2} \Rightarrow \dfrac{p_0 S}{k} = \dfrac{1}{2}x_0$ (здесь S и k - сечение трубы и коэффициент жесткости пружины). Запишем условие равновесия поршня 2 в начальном состоянии:

$$\left(\phi_0 p_0 + \frac{\nu RT}{x_0 S}\right)S = kx_0 \Rightarrow \phi_0\frac{x_0}{2} + \frac{\nu RT}{kx_0} = x_0 \Rightarrow \frac{\nu RT}{k} = \frac{x_0^2(2-\phi_0)}{2}$$

(теперь ν - количество молей сухого воздуха между поршнем 2 и торцом трубы). Поскольку во всех вариантах $n\phi_0 > 100\%$, то в процессе изотермического сжатия этого объема обязательно начнется конденсация водяного пара, пар в конечном состоянии будет насыщенным. Пренебрегая объемом образовавшейся воды (используем «естественное» предположение, что температура системы далека от критической), запишем условие равновесия поршня 2 в конечном состоянии, в котором деформация пружины равна $l+\dfrac{x_0}{n}$):

$$\left(p_0+n\frac{\nu RT}{x_0 S}\right)S=k\left(l+\frac{x_0}{n}\right)\Rightarrow\frac{x_0}{2}+n\frac{x_0(2-\phi_0)}{2}=l+\frac{x_0}{n},$$

и поэтому $l=\dfrac{(2-\phi_0)n^2+n-2}{2n}x_0$. Записывая относительную влажность в процентах ($\phi_0\to\phi_0/100$), получаем ответ.

Ответ: $l=\dfrac{n^2(2-\phi_0/100)+n-2}{2n}x_0$.

Задание заключительного этапа олимпиады школьников «Покори Воробьёвы горы!» по физике

2013-2014 учебный год.

10-11 классы

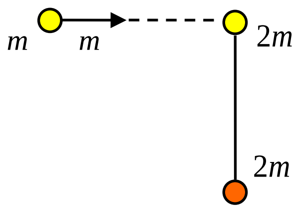
Приведены качественные вопросы (*максимальная оценка 5 баллов*), условия и решения задач (*максимальная оценка 20 баллов*) для одного из семи использованных равноценных вариантов.

БИЛЕТ № 07

Задание 1

Вопрос. Импульс материальной точки. Импульс системы материальных точек. Закон сохранения импульса.

Задача. На гладком горизонтальном столе лежат стальные шарики массами m и $2m$, связанные натянутой невесомой нерастяжимой нитью длины l. Еще один шарик массы m налетает на систему со скоростью v_0 (перпендикулярно натянутой нити), и происходит абсолютно упругий лобовой удар (см. рисунок). Найти величину силы натяжения нити и ускорение шарика массы $2m$ после удара.



Решение задачи. Удар небольших стальных шариков происходит быстро, за это время шарик $2m$ не успевает набрать заметной скорости. Тогда удар шариков одинаковой массы можно рассчитывать как обычный лобовой удар, при котором налетающий шарик остановится, а другой получит скорость v_0. Тогда скорость центра масс шариков, связанных нитью: $mV = mv_0/3m = v_0/3$. Итак, центр масс движется поступательно со скоростью $v_0/3$, и относительно него шарики движутся по окружности с угловой скоростью $\omega = \dfrac{v_0 - v_0/3}{2l/3} = \dfrac{v_0}{l}$. Тогда натяжение нити найдем, рассмотрев движение шарика m по окружности (относительно центра масс): $T = m\omega^2 \dfrac{2l}{3} = \dfrac{2mv_0^2}{3l}$. Таким получается натяжение в момент удара, и далее оно остается постоянным. Ускорение шарика $2m$ также остается постоянным по величине: $a_2 = \dfrac{T}{2m} = \dfrac{v_0^2}{3l}$.

Ответ: $T = \dfrac{2mv_0^2}{3l}$, $a_2 = \dfrac{v_0^2}{3l}$.

Задание 2

Вопрос. Насыщенные и ненасыщенные пары. Зависимость давления насыщенного пара от температуры.

Задача. В очень прочном баллоне объемом $V = 50$ л находится 96 г смеси метана CH_4 с кислородом O_2. При температуре $t_1 = 28°C$ давление в баллоне равнялось $p_1 = 200$ кПа. Слабая электрическая искра подожгла метан, вызвав реакцию $CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O$. После завершения реакции содержимое баллона охладили до температуры $t_2 = 100°C$. Каким стало давление в баллоне? Нормальное атмосферное давление $p_0 \approx 101$кПа.

Решение задачи. Начальное давление и масса газа в баллоне создаются суммой парциальных вкладов метана и кислорода, то есть:

$$\left\{\begin{array}{c} 16\nu_1 + 32\nu_2 = 96 \\ (\nu_1 + \nu_2)RT_1 = p_1V \Rightarrow \nu_1 + \nu_2 = \dfrac{p_1V}{RT_1} \approx 4\,моля \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \nu_1 \approx \nu_2 \approx 2\,моля.$$

В ходе реакции израсходуется 1 моль метана и два моля кислорода, и образуется 1 моль углекислого газа и два моля воды. Итак, в баллоне после охлаждения содержится 2 моля метана и углекислого газа, которые создают давление $p_2' = 2\dfrac{RT_2}{V} \approx 124$кПа. Если бы вся вода (2 моля) находилась в газообразном состоянии, водяные пары создавали бы такое же давление, что невозможно, так как это значение больше давления насыщенного пара при температуре T_2 . Значит, часть воды будет в жидком состоянии, а давление пара равно давлению насыщенного пара, то есть $p_0 \approx 101$кПа. Полное давление в баллоне $p_2 = p_2' + p_0 \approx 225$кПа.

Ответ: $p_2 = 2\dfrac{RT_2}{V} + p_0 \approx 225$кПа.

Задание 2

Вопрос. Электрические заряды. Взаимодействие электрически заряженных тел. Потенциальность электростатических сил.

Задача. Два одинаковых тела массой m и с зарядом q каждое удерживают на горизонтальной плоскости на расстоянии d друг от друга. Какое расстояние l пройдет каждое из тел, если их отпустить? Какую максимальную скорость u приобретут тела в процессе движения? Коэффициент трения тел о плоскость равен μ. Электрическая постоянная равна ε_0.

Решение задачи. Изменение энергии системы ΔE в процессе перемещения равно работе силы трения $A = -2\mu mgl$, с учетом чего получаем: $\dfrac{kq^2}{d+2l}-\dfrac{kq^2}{d}=-2\mu mgl$, где $k\equiv\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ – коэффициент пропорциональности в законе Кулона, из этого уравнения находим, что $l=\dfrac{kq^2}{2\mu mgd}-\dfrac{d}{2}$. Ответ существует, если $\mu<\dfrac{kq^2}{mgd^2}$ (иначе тела не придут в движение). Запишем закон сохранения энергии в произвольный момент времени, когда расстояние между телами равно $d+2x$: $-2\mu mgx=\dfrac{kq^2}{d+2x}-\dfrac{kq^2}{d}+2\dfrac{mu^2}{2}$, откуда найдем квадрат скорости тел в этот момент $u^2=\dfrac{kq^2}{dm}-\dfrac{kq^2}{(d+2x)m}-2\mu gx$. Найдем максимум функции $u^2(x)$, приравняв производную этого выражения по x нулю: $\dfrac{kq^2}{(d+2x)^2}-\mu mg=0$. Следовательно, $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{kq^2}{\mu mg}}-d\right)$. Подставляем это значение в выражение для скорости и получаем максимальную величину скорости $u_m=\sqrt{\dfrac{kq^2}{md}-2q\sqrt{\dfrac{\mu gk}{m}}+\mu gd}$.

Ответ: $l=\dfrac{kq^2}{2\mu mgd}-\dfrac{d}{2}$, $u_m=\sqrt{\dfrac{kq^2}{md}-2q\sqrt{\dfrac{\mu gk}{m}}+\mu gd}$ при условии, что $\mu<\dfrac{kq^2}{mgd^2}$. Если $\mu\geq\dfrac{kq^2}{mgd^2}$, то $l=0$, $u_m=0$.

Задание 4

Вопрос. Тонкие линзы. Формула линзы. Увеличение, даваемое линзами.

Задача. При помощи тонкой линзы на экране создано изображение булавки, расположенной на главной оптической оси линзы перпендикулярно ей. При этом отношение линейных размеров изображения и самой булавки было равно $|\Gamma| = 2$. Не двигая булавку, линзу переместили на расстояние $s = 20$ см вдоль ее оптической оси (линза при этом не приближалась к булавке, и в любом положении оставалось справедливым приближение тонкой линзы). После перемещения и подбора положения экрана отношение размеров стало равно $|\Gamma'| = 1$. Найти оптическую силу линзы.

Решение задачи. Так как изображение создается на экране, то оно действительное. Следовательно, линза является собирающей, а изображение перевернутое. В этом случае увеличение обычно считают отрицательным, причем $\Gamma = -\frac{b}{a}$, и с учетом формулы линзы $b = \frac{aF}{a-F} \Rightarrow \Gamma = \frac{F}{F-a}$. Следовательно, для первого изображения $\frac{F}{F-a} = -2 \Rightarrow a = \frac{3}{2}F$. После перемещения линзы $a \to a+s \Rightarrow \frac{F}{F-a-s} = -1 \Rightarrow F = 2s$. Следовательно, оптическая сила линзы $D = \frac{1}{2s} = 2{,}5$ Дптр.

Ответ: $D = \frac{1}{2s} = 2{,}5$ Дптр.