Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Задания Олимпиады школьников
«Покори Воробьёвы горы!»

Математика

Задания отборочных этапов олимпиады школьников «Покори Воробьёвы горы!» по математике (2013/14, 2014/15 и 2015/16 учебные годы)

10-11 классы

1.1. Прямая, параллельная выделенной стороне треугольника площади 16, отсекает от него треугольник площади 9. Найдите площадь четырёхугольника, три вершины которого совпадают с вершинами меньшего треугольника, а четвертая лежит на выделенной стороне.

1.2. Сколькими способами тренер может скомплектовать хоккейную команду, состоящую из одного вратаря, двух защитников и трёх нападающих, если в его распоряжении есть 2 вратаря, 5 защитников и 8 нападающих?

1.3. Продукт, содержавший первоначально 99% воды, за некоторое время высох и стал содержать 97% воды. Во сколько раз он усох (то есть уменьшил свой вес)?

1.4. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой. На стороне AC как на диаметре построена окружность. Из вершины B проведена касательная к окружности, отличная от BC, и D – точка касания. Точка H является основанием перпендикуляра, проведенного из точки D на сторону AC. Найдите отношение $DE : EH$, где E – точка пересечения DH и AB.

1.5. Найдите сумму корней уравнения

$$\cos^2 x + \cos^2 3x - 2\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x = \sin^2 4x,$$

принадлежащих отрезку $[\pi; 2\pi]$. В ответе укажите целое число, ближайшее к найденной сумме.

1.6. Три сестры пришли на рынок и продавали поштучно цыплят. Первая принесла 12 цыплят, вторая – 18, третья – 32 цыпленка. Каждая из них часть товара продала утром, а часть – вечером. Утренняя цена одного цыпленка была у всех сестёр одинаковая, и вечерняя цена тоже одинаковая, но более низкая (положительная). К вечеру весь товар был распродан, и дневная выручка (за утро и вечер) у всех сестёр оказалась одинаковой: 1700 руб. Найдите суммарную вечернюю выручку (в рублях) всех сестёр.

1.7. Найдите все значения $a > 0$, при которых существуют положительные решения неравенства

$$\frac{x^3}{a+2013^{4/3}x}+\frac{2013^{4/3}x}{a+x^3}\le\frac{3}{2}-\frac{a}{x(x^2+2013^{4/3})}.$$

В ответе укажите сумму всех найденных целых значений a.

1.8. Найдите сумму всех двузначных чисел, у каждого из которых сумма квадратов цифр на 37 больше произведения цифр.

1.9. Найдите сумму всех целых значений аргумента x, при которых соответствующие значения функции

$$y = x^2 + x(\log_2 18 - \log_3 12) - \log_3 16 - 4\log_2 3$$

не превосходят 8.

1.10. Три пирата Джо, Билл и Том нашли клад, содержащий 70 одинаковых золотых монет, и хотят разделить их так, чтобы каждому из них досталось не менее 10 монет. Сколько существует способов это сделать?

1.11. Найдите сумму цифр числа $\sqrt{\underbrace{111\ldots11}_{2014}-\underbrace{22\ldots2}_{1007}}$.

1.12. В треугольной пирамиде *SABC* рёбра *SB, AB* перпендикулярны и $\angle ABC = 120^{\circ}$. Точка *D* на ребре *AC* такова, что отрезок *SD* перпендикулярен по меньшей мере двум медианам треугольника *ABC* и $CD = AB = 44\sqrt[3]{4}$. Найдите *AD*.

1.13. Для функции $f(x) = 2013 - 8x^3 + 12x^2 - 14x - a - \sin 2\pi x$ найдите количество целых значений a, при каждом из которых уравнение $\underbrace{f(f(\ldots f}_{2013\text{ раз}}(x)\ldots)) = 2x - 1$ на отрезке $[50; 51]$ имеет единственное решение.

1.14. Петя заметил, что поезд прошел мимо него за 25 секунд, а мост длиной 60 метров – за 28 секунд. Найдите скорость поезда (в метрах в секунду), считая, что она остается одной и той же в течение всего времени наблюдения.

1.15. Найдите $f(2013)$, если для любых действительных x и y справедливо равенство $f(x - y) = f(x) + f(y) - 2xy$.

1.16. Окружность касается сторон угла в точках *A* и *B*. Расстояния от лежащей на окружности точки *C* до сторон угла равны 2 и 8. Найдите расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

1.17. Найдите делимое, если каждый знак * в приведённой записи деления чисел «в столбик» обозначает какую-либо цифру:

```
********|      ?
***     |***8**
  ***
  ***
    **
    **
     ***
     ***
       0
```

1.18. Найдите все положительные a, при которых уравнение

$$\frac{2\pi a+\arcsin(\sin x)+2\arccos(\cos x)-ax}{\operatorname{tg}^2 x+1}=0$$

имеет ровно три различных решения, принадлежащих множеству $(-\infty; 7\pi]$. В ответе укажите сумму всех найденных a.

1.19. Найдите наименьшее натуральное m, для которого существует такое натуральное n, что наборы последних 2014 цифр в десятичной записи чисел $a=2015^{3m+1}$ и $b=2015^{6n+2}$ одинаковы, причем $a<b$.

1.20. Из вершины *B* треугольника *ABC* проведена прямая, пересекающая сторону *AC* в точке *E*. Найдите высоту *BF* треугольника *ABC*, если известно, что центр описанной вокруг треугольника *ABC* окружности лежит на луче *BE*, $AF\cdot FE=5$, а отношение котангенсов углов *EBC* и *BEC* соответственно равно 3/4. В ответе укажите длину высоты, при необходимости округлив ее до двух знаков после запятой.

1.21. Найдите значение a, при котором минимальна сумма всех действительных корней уравнения

$$\frac{f(a)\cdot x^2+1}{x^2+g(a)}=\sqrt{\frac{xg(a)-1}{f(a)-x}},$$

где

$$f(a)=a^2-\sqrt{21}a+26,\ g(a)=\tfrac{3}{2}a^2-\sqrt{21}a+27.$$

В ответе укажите найденное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

1.22. Многогранник с n вершинами, вписанный в сферу радиуса R, назовем *кристаллическим*, если можно выбрать такой набор из $n-1$ вершины этого многогранника, что все тетраэдры с вершинами в любых 4 точках этого набора равновелики. Каков максимальный объём кристаллического многогранника? В ответе укажите найденное число, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

1.23. На соревнованиях по бегу нужно пробежать дистанцию в 3 одинаковых круга, при этом круг содержит целое число километров. Тренер заметил, что второй круг спортсмен пробежал за 22 минуты. За сколько минут спортсмен пробежит всю дистанцию, если время прохождения им каждого километра, начиная со второго, увеличивается в арифметической прогрессии?

1.24. В подземелье у гномов в один ряд стоят 2016 сундуков с сокровищами: некоторые из них закрыты, некоторые – открыты. Гном по имени Открывай проходит вдоль ряда и открывает каждый сундук, который до этого был закрыт, Затем гном по имени Закрывай подходит к каждому второму сундуку и, если он открыт, закрывает его. Потом гном Открывай подходит к каждому третьему сундуку и, если он закрыт, открывает его. Затем гном Закрывай подходит к каждому четвертому сундуку и, если он открыт, закрывает его, и так далее. Всего гномы Закрывай и Открывай сделали 2016 проходов вдоль ряда. Сколько сундуков окажутся после всего этого закрытыми?

1.25. К равнобедренному треугольнику ABC с основанием AC достроили другой равнобедренный треугольник CBD с основанием CD так, что оба треугольника не имеют общих точек, кроме точек стороны BC. Точка E – точка пересечения прямой AD с окружностью, описанной вокруг треугольника ABC. Найдите отношение основания CD к радиусу этой окружности, если $\cos\angle DCE = 6/7$ и $\cos\angle CBD = 9/10$.

1.26. Определите, сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2016}.$$

1.27. Решите уравнение

$$(\cos x - 1)(2 + \sin x + 4\cos x) = 5(1 + \cos x)(2 - \sin x + 2\cos x)$$

1.28. Четырехугольная призма $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ с одинаковыми ребрами, равными a, вписана в пирамиду $SABC$ так, что точка S_1 лежит на ребре SA, точка P – на ребре SB, точка R - на ребре SC, а точка Q_1 принадлежит плоскости ABC. Найдите ребро SA пирамиды, если известно, что $SB = b,\ SC = c$.

1.29. Назовем натуральное число m *замечательным*, если существует такое натуральное число k, не превосходящее 2015, что $m^2 - k + ([\cos m])^2 + 2m[\cos m]$ является полным квадратом (здесь $[\cos m]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $\cos m$). Найдите все замечательные числа.

5-9 классы

2.1. (7–9 классы)**.** Коля участвует в телевизионной игре «Стать миллионером». На вопрос даётся 4 варианта ответа: *A*, *B*, *C*, *D*. Коля получает 4 подсказки: 1) Правильный ответ – *A* или *B*; 2) Правильный ответ – *C* или *D*; 3) Правильный ответ – *B*; 4) Ответ *D* – неправильный.

Известно, что три подсказки ошибочны и только одна правильная. Какой вариант ответа в таком случае правильный?

2.2. (7–8 классы)**.** Петров выписывает нечётные числа: 1, 3, 5, ..., 2013, а Васечкин – чётные 2, 4, ..., 2012. Каждый посчитал сумму всех цифр всех своих чисел и сказал отличнице Маше. Маша вычла из результата Петрова результат Васечкина. Сколько у неё получилось?

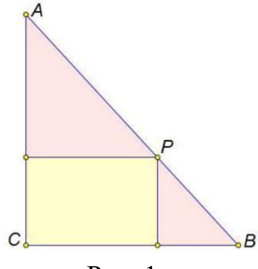


Рис. 1

2.3. (7 класс)**.** Леночка собралась испечь пирог на день рождения. Она раскатала тесто равномерным слоем в виде равнобедренного прямоугольного треугольника ABC. Потом она подумала, что теста хватит на два пирога и провела два прямолинейных разреза, параллельных катетам треугольника (см. рис. 1). Получилось два треугольника и один прямоугольник. Из прямоугольника Леночка испекла пирог с клубникой, а треугольники слепила вместе, раскатала и сделала пирог с капустой. Может ли получиться так, что в пироге с клубникой теста больше, чем в пироге с капустой?

2.4. (7–9 классы)**.** Знаменитый скейтер Тони Хок катается на скейтборде (отрезок AB) в рампе, которая представляет собой полуокружность с диаметром PQ (рис. 2). Точка M – середина скейтборда, C – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на диаметр PQ. Какие значения может принимать угол $\angle ACM$, если известно, что угловая мера дуги AB равна 24° ?

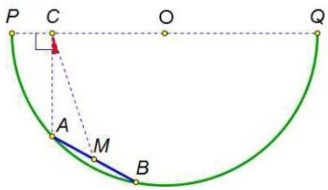


Рис. 2

2.5. (7 класс)**.** Может ли число $n^2 + 2n + 2014$ делиться (нацело) на 121 при некотором целом n?

2.6. (8 класс)**.** В школе учится не менее 150 мальчиков, а девочек – на 15% больше чем мальчиков. Когда мальчики поехали на сборы, потребовалось 6 автобусов, причём в каждом автобусе ехало одинаковое количество школьников. Сколько всего человек учится в школе, если известно, что общее число учащихся не больше 400?

2.7. (8–9 классы)**.** В школьной спартакиаде участвовали команды $8^{\text{А}}$, $8^{\text{Б}}$ и $8^{\text{В}}$ классов. В каждом из соревнований какая-то из этих команд заняла 1-е место, какая-то – 2-е и какая-то – 3-е. По окончании спартакиады были подсчитаны очки: x очков присуждалось за 1-е место, y – за второе и z – за третье ($x > y > z > 0$ – целые числа).

В итоге команда $8^{\text{А}}$ получила 22 очка, а команды $8^{\text{Б}}$ и $8^{\text{В}}$ – по 9 очков.

Сколько всего было соревнований и кто занял второе место в соревновании по метанию гранаты, если известно, что первое место по прыжкам через «козла» заняла команда $8^{\text{В}}$?

2.8. (9 класс)**.** Найдите сумму всех натуральных чисел, имеющих ровно четыре натуральных делителя, три из которых (из делителей) меньше 15, а четвертый – не меньше 15.

2.9. (9 класс)**.** В уравнении $x^2 + px + q = 0$ за один шаг разрешается один из коэффициентов (p или q) увеличивать или уменьшать на 1. Можно ли из уравнения $x^2 - 2013x - 13 = 0$ за какое-то количество шагов получить уравнение $x^2 + 13x + 2013 = 0$, чтобы ни одно промежуточное уравнение не имело целых корней?

2.10. (9 класс)**.** Изобразите на координатной плоскости множество таких точек (p, q), что уравнение $x^2 + 2px + q = 0$ имеет два корня, один из которых больше 2, а другой – меньше 0.

2.11. (9 класс)**.** Найдите площадь треугольника, если известно, что радиус вписанной окружности равен 1, а длины всех трёх высот выражаются целыми числами.

2.12. (5-9 классы). На столе стоит 2014 коробок, в некоторых из них есть конфеты, а остальные пусты.

На первой коробке написано: «Все коробки пустые».

На второй – «По крайней мере, 2013 коробок пустые».

На третьей – «По крайней мере, 2012 коробок пустые».

...

На 2014-й – «По крайней мере, одна коробка пустая».

Известно, что надписи на пустых коробках ложны, а на коробках с конфетами – истинные.

Определите количество коробок с конфетами.

2.13. (5-7 классы). Сережа собирает игрушечные железные дороги. У него есть несколько наборов, в каждом из которых разное количество вагонов. Если все наборы объединить в один состав, то в нем будет 112 вагонов. Если взять три самых маленьких набора, то в них будет 25 вагонов, а в трех самых больших – 50 вагонов. Сколько наборов у Сережи? Сколько вагонов в самом большом наборе?

2.14. (5-8 классы). Имеется 10 отрезков, длина каждого из которых выражается целым числом, не превосходящим некоторого N.

a) Пусть N=100. Приведите пример набора из 10 отрезков, такого, что ни из каких трех нельзя сложить треугольник.

b) Найдите максимальное N, при котором можно гарантировать, что найдутся три отрезка, из которых можно сложить треугольник.

2.15. (5-8 классы). Можно ли найти 100 последовательных натуральных чисел, первое из которых делится на 3, второе – на 5, третье – на 7, ... , 100-е – на 201?

2.16. (8, 9 классы). Какова наибольшая возможная площадь четырехугольника $ABCD$, у которого AB=1, BC=8, CD=7 и DA=4?

2.17. (8, 9 классы). Найдите наименьшее возможное значение $|2015\, m^5 - 2014\, n^4|$, если m и n – натуральные числа.

2.18. (9 класс). Целые числа a, b и c таковы, что

$$a\left(1-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + b\left(1-\frac{\sqrt{7}}{2}\right) + c = 5.$$

Каково минимальное значение $|a+b+c|$ при этом условии?

2.19. (9 класс). Найдите q, при котором $x^2 + x + q = 0$ имеет два различных действительных корня, удовлетворяющих соотношению $(x_1)^4 + 2x_1(x_2)^2 - x_2 = 19$.

2.20. (5–8 классы). В ряд стоят 8 чисел так, что сумма каждых трех соседних чисел равняется 50. Известны первое и последнее числа из этих восьми. Заполните оставшиеся шесть пустых мест ряда в следующем случае: 11 _ _ _ _ _ _ 12.

2.21. (5–9 классы). С помощью четырех арифметических действий (а также, при необходимости, расставляя скобки) запишите число 2016, используя последовательно цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

2.22. (5–8 классы). В школьном тесте – 4 раздела, каждый из которых содержит одинаковое количество вопросов. Андрей правильно ответил на 20 вопросов. При этом процент его верных ответов оказался больше 60, но меньше 70. Сколько вопросов было в тесте?

2.23. (7–9 классы). Найдите все четырехзначные числа, которые на 7182 меньше числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке.

2.24. (7–9 классы). Сколько существует различных прямоугольных треугольников, один из катетов которых равен $\sqrt{2016}$, а другой катет и гипотенуза выражаются натуральными числами?

2.25. (9 класс). Отрезок $[-3; 9]$ является множеством значений функции $f(x)$, отрезок $[-1; 6]$ является множеством значений функции $g(x)$. На какую наибольшую величину могут отличаться наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) \cdot g(x)$?

2.26. (9 класс). Число $n + 2015$ делится на 2016, а число $n + 2016$ делится на 2015. Найдите наименьшее натуральное n, при котором это возможно.

Ответы и решения

10-11 классы

1.1. *Ответ:* 12.

Решение. Пусть ABC – исходный треугольник, D, E – точки пересечения прямой, параллельной стороне AC, со сторонами AB и BC соответственно и F – точка на стороне AC. Высоту в треугольнике DBE, проведённую из точки B на сторону DE, обозначим через h_1, а высоту в треугольнике FDE, проведенную из точки F на сторону DE, обозначим через h_2. Из условия следует подобие треугольников ABC и DBE; пусть коэффициент подобия равен k, так что $k=\sqrt{S_{DBE}/S_{ABC}}$. Тогда $k=\dfrac{h_1}{h_1+h_2} \Leftrightarrow \dfrac{h_2}{h_1}=\dfrac{1-k}{k} \Leftrightarrow \dfrac{S_{FDE}}{S_{DBE}}=\dfrac{h_2}{h_1}=\dfrac{1-k}{k}$. Следовательно, искомая площадь равна

$$S_{FDBE}=S_{DBE}+S_{FDE}=\left(1+\frac{1-k}{k}\right)\cdot S_{DBE}=\frac{1}{k}\cdot S_{DBE}=\sqrt{S_{DBE}\cdot S_{ABC}}=12\cdot$$

1.2. *Ответ:* 1120 способами.

Решение. Вратаря тренер может выбрать C_2^1 способами, двух защитников – C_5^2 способами, а трёх нападающих – C_8^3 способами. Всего получим $C_2^1\cdot C_5^2\cdot C_8^3=1120$ способов.

1.3. *Ответ:* в 3 раза.

Решение. Пусть x – начальный вес продукта и $0{,}99x$ – масса содержащейся в нем воды, $0{,}01x$ – масса сухого вещества. Тогда если после высыхания масса продукта стала равна y ($y<x$), то масса сухого вещества в нём не изменится: $0{,}03y=0{,}01x$. Следовательно, $x/y=3$.

1.4. *Ответ:* 1.

Решение. Пусть O – центр построенной окружности ($AO=OC$). Углы $\angle DAH$ и $\angle BOC$ равны, так как из свойства вписанного угла: $\angle DOC=2\alpha$, а из равенства треугольников BDO и BCO вытекает, что $\angle BOC=\angle DAH$.

Тогда $\Delta AEH \sim \Delta ABC$: $\frac{EH}{BC}=\frac{AH}{AC}$, $\Delta ADH \sim \Delta OBC$: $\frac{DH}{BC}=\frac{AH}{OC}$. Разделив эти равенства почленно, получим $EH:DH=OC:AC=1:2$.

1.5. *Ответ:* 33.

Решение. Используя нетрудно доказываемое тождество $\cos^2\alpha + \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta) = \sin^2\beta$, преобразуем исходное уравнение к виду $\sin^2 2x = \sin^2 4x$, откуда $x = \frac{\pi n}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$. На отрезке $[\pi; 2\pi]$ содержится семь корней; их сумма равна $\frac{21\pi}{2}$.

1.6. *Ответ:* 2100 руб.

Решение. Пусть первая, вторая и третья сестры продали утром x, y и z цыплят соответственно $(x, y, z \in \mathbb{N})$. Пусть также a и b – утренняя и вечерняя цены одного цыпленка соответственно $(a > b > 0)$.

Так как дневная выручка (за утро и вечер) у всех сестёр одинакова и равна 1700 рублей, имеем $ax + b(12 - x) = 1700$, $ay + b(18 - y) = 1700$, $az + b(32 - z) = 1700$, откуда, вычитая эти равенства почленно, получим $(a - b)(x - y) = 6b$, $(a - b)(y - z) = 14b$.

Поделив первое уравнение на второе, получим, что $\frac{x-y}{y-z} = \frac{3}{7}$, то есть $x - y = 3k$, $y - z = 7k$. Откуда$x - z = 10k$, $k \in \mathbb{N}$.

Так как $x < 12$, то из последнего соотношения найдём $x = 11, z = 1$. Поэтому $y = 8$. Подстановка найденных значений x, y, z в первые два уравнения даёт $a = 150$, $b = 50$. Общая вечерняя выручка равна $b(12 - x) + b(18 - y) + b(32 - z) = 42b = 2100$.

1.7. *Ответ:* 4052169.

Решение. Докажем вспомогательное неравенство, справедливое для любых $a, b, c > 0$: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ (причём равенство здесь достигается тогда и только тогда, когда $a = b = c$).

Действительно, положим $u = a + b$, $v = a + b$, $w = b + c$. Тогда $u, v, w > 0$ и $2a = u + v - w$, $2b = u - v + w$, $2c = -u + v + w$. В новых переменных неравенство приобретёт вид $\frac{u+v-w}{w} + \frac{u-v+w}{v} + \frac{-u+v+w}{u} \geq 3 \iff \left(\frac{u}{w} + \frac{w}{u}\right) + \left(\frac{u}{v} + \frac{v}{u}\right) + \left(\frac{v}{w} + \frac{w}{v}\right) \geq 6$, что и доказывает требуемое.

Если в доказанное вспомогательное неравенство подставить $b = x^3$, $c = 2013^{4/3}x$, то полученное неравенство совпадёт с приведённым в условии задачи – лишь знак $\leq$ заменится на $\geq$. Поэтому должно быть выполнено соотношение $a = x^3 = 2013^{4/3}x$, откуда найдём: $x = 2013^{2/3}$, $a = 2013^2 = 4052169$.

1.8. *Ответ:* 231.

Решение. Для двузначного числа $\overline{ab}$ условие означает, что $a^2 + b^2 - ab = 37 \iff (2a - b)^2 + 3b^2 = 148$. Тогда $b \le 7$, и прямой перебор вариантов оставляет только три варианта: $b = 3$, $b = 4$, $b = 7$. Таким образом, искомыми числами являются 37, 47, 73, 74.

1.9. *Ответ:* -9.

Решение. Положим $a = \log_2 3$. Тогда задача равносильна нахождению суммы целочисленных решений неравенства $x^2 + 2\left(a - \frac{1}{a}\right)x - 4\left(a + \frac{1}{a} + 2\right) \le 0$.

Учитывая, что $a \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$, получим $x \in \left[-2a - 2; \frac{2}{a} + 2\right]$. Так как $-6 < -2a - 2 < -5$, $3 < \frac{2}{a} + 2 < 4$, то решениями будут целые числа от -5 до 3.

1.10. *Ответ:* 861 способ.

Решение. Пусть клад состоит из $n = 70$ монет и каждому пирату должно достаться не менее $k = 10$ монет. Выдадим каждому пирату по $k - 1$ монете, а оставшиеся $n - 3k + 3$ монеты выложим в ряд. Чтобы разделить оставшиеся монеты между пиратами, достаточно расположить на $n - 3k + 2$ местах между монетами два разделителя. Тем самым, Джо получит монеты левее первого разделителя, Билл – монеты между двумя разделителями, а Том – монеты правее второго разделителя. Число способов расположить эти два разделителя равно $C_{n-3k+2}^2 = \frac{(n-3k+2)(n-3k+1)}{2}$.

Если $n = 70$, $k = 10$, то получится $C_{42}^2 = 861$ способ.

1.11. *Ответ:* 3021.

Решение. Пусть $A = \underbrace{11\ldots1}_{1007}$. Тогда искомое число равно $\sqrt{A \cdot 10^{1007} + A - 2A} = \sqrt{A(9A + 1) - A} = 3A$.

1.12. *Ответ:* 88.

Решение. Поскольку отрезок *SD* перпендикулярен двум медианам треугольника *ABC*, то он перпендикулярен плоскости (*ABC*) (см. рис. 3). В силу теоремы о трёх перпендикулярах отсюда следует, что $DB \perp AB$.

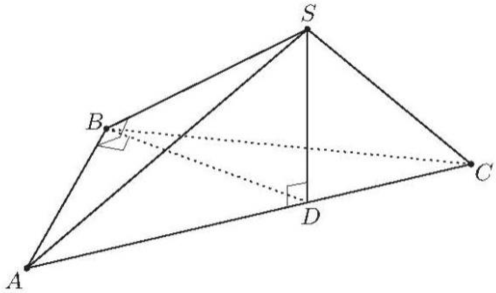


Рис. 3

Пусть $\alpha = \angle BAC,\ x = AD$. Тогда, применяя теорему синусов в треугольнике ABC (см. рис. 4), имеем: $\frac{x\cos\alpha}{\sin(\pi/3-\alpha)} = \frac{x + x\cos\alpha}{\sin(2\pi/3)} \Leftrightarrow$ $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha} \Leftrightarrow (1-\cos^2\alpha)(1+\cos\alpha)^2 = 3\cos^4\alpha \Leftrightarrow$ $(\cos 2\alpha + 1)(2\cos^3\alpha - 1) = 0.$

Так как $\alpha < \pi/2$, то из последнего уравнения: $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Следовательно, $AD = \frac{AB}{\cos\alpha} = 88$.

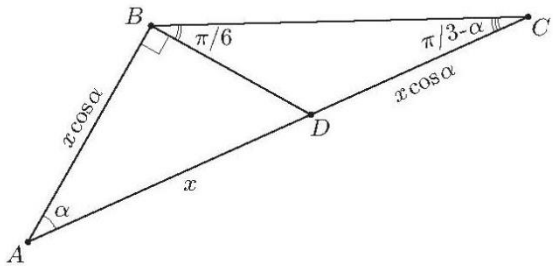


Рис. 4

1.13. *Ответ:* 60013.

Решение. Поскольку $2013 - 8x^3 + 12x^2 - 14x - a - \sin 2\pi x = 2008 - (2x-1)^3 - 4(2x-1) - a + \sin\pi(2x-1)$, то после замены переменной $t = 2x - 1$ получим новую задачу: «для функции $F(t) = 2008 - t^3 - 4t - a + \sin\pi t$ найдите количество целых значений a, при каждом из которых уравнение $\underbrace{F(F(\dots F}_{2013\text{ раз}}(t)\dots)) = t$ на отрезке $[99; 101]$ имеет единственное решение».

Функция $F(t)$ монотонно убывает на всей числовой прямой (в чём можно убедиться, например, вычислив $F'(t)$). Поэтому $\underbrace{F(F(\dots F}_{2013\text{ раз}}(t)\dots)) = t \iff F(t) = t$.

Функция $g(t) = t - F(t)$ является монотонно возрастающей. Следовательно, уравнение $g(t) = 0$ имеет единственное решение на $[99; 101]$ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} g(101) \geq 0, \\ g(99) \leq 0 \end{cases} \iff$ $\begin{cases} 101 - 2008 + 101^3 + 404 + a \geq 0, \\ 99 - 2008 + 99^3 + 396 + a \leq 0. \end{cases}$

Отсюда следует, что количество целых значений a равно $g(101) - g(99) + 1 = 60013$.

1.14. *Ответ:* 20 метров в секунду.

Решение. Обозначим скорость поезда (в метрах в секунду) через V, а длину поезда (в метрах) через l.

Если t_1 и t_2 – времена прохождения поезда мимо Пети и через мост длиной a соответственно, то

$$\begin{cases} l = V\,t_1, \\ a + l = V\,t_2 \end{cases} \iff \begin{cases} V = a/(t_2 - t_1), \\ l = at_1/(t_2 - t_1). \end{cases}$$

Поскольку $t_1 = 25,\ t_2 = 28$ и $z = 60$, то $V = 20$.

1.15. *Ответ:* 4052169.

Решение. Подставим $x = y = 0$. Тогда $f(0) = 2f(0) + 0,$ откуда получим: $f(0) = 0$. Подставим теперь $x = y$. Тогда $0 = f(0) = f(x) + f(x) - 2x^2,$ откуда $f(x) = x^2$.

1.16. *Ответ:* 4.

Решение. Пусть $\alpha = \angle CAB,\ \beta = \angle CBA,\ h_A$ – расстояние от точки C до стороны угла, проходящей через точку A, h_B – расстояние от точки C до стороны угла, проходящей через точку B, h – расстояние от точки C до прямой AB. Тогда $h = AC \cdot \sin\alpha = h_A \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ и $h = BC \cdot \sin\beta = h_B \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

Значит, $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{h_B/h_A}$ и $h = h_A \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{h_A h_B}$.

1.17. *Ответ:* 10917708.

Решение. Цифра 8 в частном даёт промежуточное двузначное произведение, следовательно, делитель не может быть больше 12 ($13 \cdot 8 = 104$ – не трёхзначное число). С другой стороны, промежуточному трёхзначному произведению может отвечать в частном только цифра 9 (цифра 8 по условию даёт только двузначное произведение), а в этом случае делитель не может быть меньше 12 ($11 \cdot 9 = 99$ – двузначное число). Следовательно, делителем может быть только число 12. Если при промежуточном делении происходит снос разряда, то в частном на соответствующем месте стоит 0.

Поэтому в частном стоит число 909809, а делимое равно $12 \cdot 909809 = 10917708$.

1.18. *Ответ:* 1,6.

Решение. На области допустимых значений $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\right\}$ решаем уравнение

$$\arcsin(\sin x) + 2\arccos(\cos x) = ax - 2\pi a.$$

Функция $f(x) = \arcsin(\sin x) + 2\arccos(\cos x)$ – периодическая с периодом 2π, причём она является линейной на каждом из множеств $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$. Поскольку $f(0) = f(2\pi) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$, $f(\pi) = \pi$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, то график этой функции на числовой прямой имеет вид, приведенный на рис. 5.

Графики функций $y = a(x - 2\pi)$ проходят через точку $(2\pi; 0)$. Выбираем те прямые, которые дают три решения на указанном множестве. Они соответствуют значениям $a = \frac{1}{3}$, $a = \frac{2}{3}$, $a = \frac{3}{5}$.

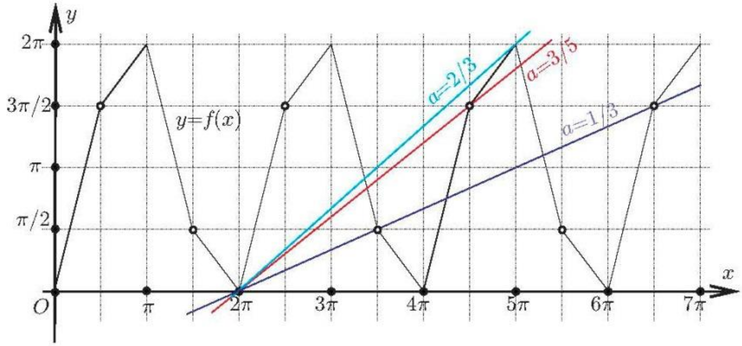


Рис. 5

1.19. *Ответ:* m=671.

Решение. Совпадение последних 2014 цифр указанных двух степеней означает делимость на 10^{2014} разности

$$2015^{6n+2} - 2015^{3m+1} = 2015^{3m+1} \cdot \left(2015^{6n-3m+1} - 1\right),$$

а коль скоро первый сомножитель в полученном разложении не кратен 2, а второй не кратен 5, то делимость полученного произведения на 10^{2014} означает две делимости сразу

$$2015^{3m+1} \vdots\ 5^{2014}, \quad 2015^{6n-3m+1} - 1 \vdots\ 2^{2014}.$$

Первая делимость означает неравенство $3m + 1 \geq 2014$, или $m \geq m_0 = 671$. Проверим, что число $m = m_0$ реализуется, т.е. для него при некотором $n = n_0$ имеет место и вторая делимость. Действительно, обозначим N=2^{2014} и заметим, что для нечетного K=2015 число

$$K^N - 1 = (K^{N/2} + 1)(K^{N/2} - 1) = \ldots = (K^{N/2} + 1)(K^{N/4} + 1)\ldots(K^1 + 1)(K^1 - 1)$$

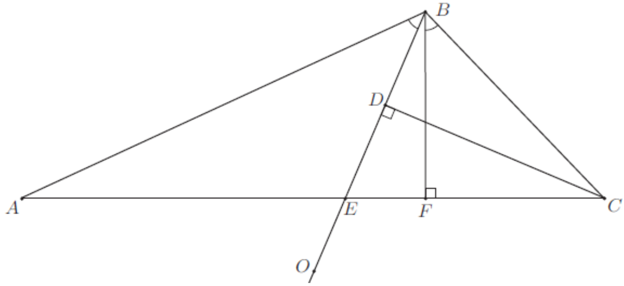
кратно N (в последнем представлении этого числа все выражения в скобках четны, а количество скобок – 2014). Поэтому (2015^N-1) делится на 2^{2014}, а равенство $6n_0 - 3m_0 + 1 = N$ выполняется при

$$n_0 = \left(\frac{N-1}{3} + m_0\right)/2.$$

Здесь $n_0 \in \mathbb{N}$, поскольку число $N - 1 = 2^{2014} - 1 = (3-1)^{2014} - 1$ кратно трём, причем частное $(N-1)/3$ нечетно.

1.20. *Ответ:* $\sqrt{15}/2 \approx 1{,}94$.

Решение. Из точки C опустим перпендикуляр CD на прямую BE. Тогда отношение котангенсов даёт $BD:DE=3:4$. Поскольку $DE>BD$, имеем $EC>BC$. Так как в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета, то $BC>CF$, и, следовательно, точка F лежит между точками E и C (см. рисунок).



По условию центр описанной окружности лежит на BE, следовательно, углы ABE и FBC равны. Отсюда вытекает подобие

$$\triangle ABF \sim \triangle CBD \implies \frac{BF}{AF} = \frac{BD}{CD}$$
$$\triangle FBE \sim \triangle DCE \implies \frac{BF}{FE} = \frac{CD}{DE}.$$

Перемножив полученные равенства почленно, получим равенство отношений $BF^2:(AF\cdot FE)$ и $BD:DE$. Отсюда

$$BF = \sqrt{AF\cdot FE\cdot \frac{BD}{DE}} = \sqrt{5\cdot 3/4} = \sqrt{15}/2.$$

1.21. *Ответ:* $\sqrt{21}/2 \approx 2{,}29$.

Решение. Заметим, что при всех значениях a: $g(a) > f(a) \geq 20$, и следовательно, О.Д.З. уравнения не содержит отрицательных чисел. На множестве $x \geq 0$ функции

$$F(x) = \frac{f(a)\cdot x^2+1}{x^2+g(a)} \quad \text{и} \quad F^{-1}(x) = \sqrt{\frac{xg(a)-1}{f(a)-x}}$$

взаимно обратные. Из неравенства $1 - f(a)g(a) < 0$ следует, что

$$F(x) = \frac{f(a)\cdot x^2+1}{x^2+g(a)} = f(a) + \frac{1-f(a)g(a)}{x^2+g(a)}$$

монотонно возрастает на множестве $x>0$.

Таким образом, при $x \geq 0$ исходное уравнение равносильно

$$F(x) = F^{-1}(x) \iff F(F(x)) = F(F^{-1}(x)) \iff F(F(x)) = x \iff F(x) = x,$$

Докажем, что уравнение

$$\frac{f(a)\cdot x^2+1}{x^2+g(a)}=x$$

имеет ровно три положительных корня. Перепишем его в виде

$$x^3-f(a)x^2+g(a)x-1=0.$$

Для выражения $h(x)$, стоящего в левой части этого кубического уравнения, при любом значении a выполнено:

$$h(0)=-1<0,$$

$$h(1)=g(a)-f(a)=\frac{1}{2}a^2+1>0,$$

$$h(2)=7-4f(a)+2g(a)=-a^2+2\sqrt{21}a-43<0,$$

$$h(+\infty)=+\infty.$$

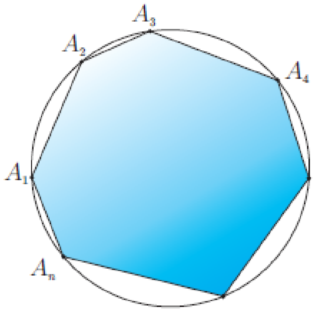
Отсюда и из непрерывности функции $h(x)$ вытекает, что при любом значении a существуют $x_1\in(0;1),\ x_2\in(1;2),\ x_3\in(2;+\infty)$ такие, что $h(x_{1,2,3})=0$. По теореме Виета сумма этих трех действительных корней равна $f(a)=a^2-\sqrt{21}a+26$. Минимум данного выражения достигается при $a=\frac{\sqrt{21}}{2}\approx 2{,}29$.

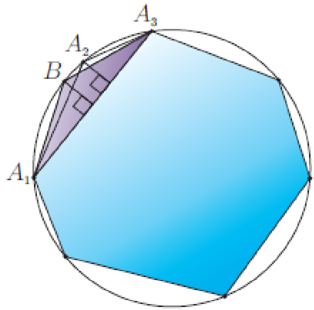
1.22. *Ответ:* $\frac{32}{81}(n-1)R^3\sin\frac{2\pi}{n-1}$.

Решение. Отметим, что можно брать любое $n>10$. Свойство *«кристалличности»* равносильно тому, что все соответствующие n-1 вершины лежат в одной плоскости (объёмы тетраэдров равны нулю, тут важно, что таких точек больше, чем 9).

Покажем, что экстремальная конструкция будет, когда все n-1 вершины, оказавшиеся в одной плоскости, лежат в вершинах правильного многоугольника в сечении сферы, отстоящей от центра окружности на $R/3$, а оставшееся точка лежит на перпендикуляре к центру круга полученного сечения на расстояние $4R/3$ от этой плоскости.

То, что правильный многоугольник имеет максимальную площадь среди вписанных, можно обосновать следующим образом. Пусть, например, $A_1A_2\neq A_2A_3$. Обозначим, через B точку на окружности такую, что $A_1B=BA_3$. Тогда площадь треугольника A_1BA_3 больше площади треугольника $A_1A_2A_3$ (см. рисунки).





Площадь правильного m-угольника, вписанного в окружность радиуса r равна

$$S = \frac{mr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{m}.$$

Пусть x – расстояние от центра сферы до плоскости, в которой находятся n-1 вершина многогранника. Тогда радиус окружности сечения равен $r = \sqrt{R^2 - x^2}$, а объём нашего многогранника (пирамиды) равен

$$V = \frac{1}{3}(R+x)\cdot S = \frac{(n-1)(R+x)(R^2-x^2)}{3\cdot 2}\sin\frac{2\pi}{n-1}.$$

Докажем, что высота пирамиды $R+x$ в экстремальной конструкции равна $4R/3$, т.е. $x=R/3$, откуда и будет следовать ответ. Действительно, объём будет наибольшим при наибольшем значении функции $f(x) = (R+x)(R^2-x^2)$, $x \in [-R; R]$. Из равенства $f'(x) = R^2 - 2xR - 3x^2$ находим, что наибольшее значение будет в точке $x = R/3$.

1.23. *Ответ:* 66.

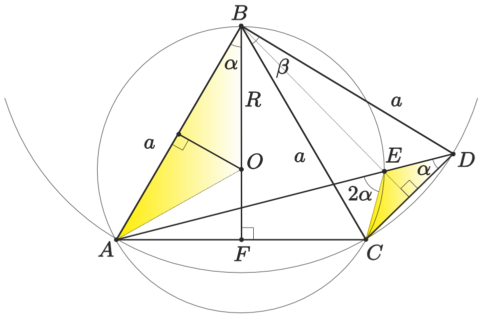
Решение. Время, за которое спортсмен пробежит первый и третий круги в два раза больше времени, за которое он пробежит второй круг.

1.24. *Ответ:* 1008.

Решение. Ответить на вопрос задачи – это все равно, что посчитать количество четных чисел в наборе 1, 2, 3,…, 2016. Поскольку все нечетные сундуки после первого прохода были открытыми, гном Закрывай к ним не прикасается – они и останутся открытыми. А четные сундуки гном Закрывай, интересующийся только сундукам с четными номерами, все закроет, так как он их посетит последним.

1.25. *Ответ:* $12/(7\sqrt{5})$.

Решение. Обозначим $\angle ABC = 2\alpha$, $\angle CBD = \beta$. Тогда $\angle AEC = 2\alpha$. Теперь, используя то, что угол $\angle ABC$ – центральный для вписанного угла $\angle ADC$, получим, что $\angle ADC = \alpha$. Следовательно, $\angle DCE = \alpha$ и отсюда треугольники AOB и CED подобны. Перемножая равенства $\sin\beta/2 = CD/(2a)$ (из треугольника CBD) и $\cos\alpha = a/(2R)$ (из треугольника AOB), получим $CD/(4R) = \cos\alpha \sin\beta/2$.



1.26. *Ответ:* 13.

Решение. Учтем, что $2016 = 14 \cdot 144$. Докажем, что решения уравнения имеют вид: $x = a^2 \cdot 14,\ y = b^2 \cdot 14$, где a, b – целые неотрицательные числа. Действительно, предположим, что, например, y нельзя представить таким образом. Тогда число $\sqrt{14y}$ иррационально, и следовательно,

$$\sqrt{x} = 12\sqrt{14} - \sqrt{y} \iff x = 2016 + y - 24\sqrt{14y},$$

т.е. x иррационально. Таким образом, исходное уравнение равносильно соотношению $a + b = 12$.

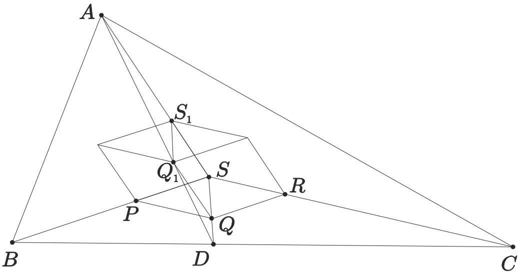
1.27. *Ответ:* $\pm 2\operatorname{arctg}\sqrt{5} + 2\pi m,\ m \in Z$.

Решение. Выполняя замену $t = tg\,(x/2)$, получим уравнение

$$t^4 - t^3 - 3t^2 + 5t - 10 = 0 \iff (t^2 - 5)(t^2 - t + 2) = 0.$$

1.28. *Ответ:* $abc/(bc - ac - ab)$.

Решение. Положим $AS_1 = x$. Точку пересечения продолжения отрезка AQ_1 с ребром BC обозначим через D.



Из теоремы косинусов найдем диагональ в ромбе при угле величины φ: $S_1Q_1 = 2a\cos(\varphi/2)$. Поскольку SD – биссектриса угла $\angle BSC$, то $SD = 2bc\cos(\varphi/2)/(b+c)$. Далее из подобия (см. рисунок) вытекает:

$$\frac{x+a}{x} = \frac{SD}{S_1Q_1} = \frac{2bc\cos(\varphi/2)}{2a(b+c)\cos(\varphi/2)} \Longrightarrow \frac{a}{x} = \frac{bc}{a(c+b)} - 1.$$

Отсюда находим $SA = x + a$.

1.29. *Ответ:* все целые числа от 3 до 1009 включительно.

Решение. Положим $g(m) = m + [\cos m]$. Тогда по условию задачи полным квадратом должно быть число $g^2(m) - k$. Иными словами, должно существовать натуральное число n, для которого

$$n^2 = g^2(m) - k \iff k = (g(m) - n)(g(m) + n).$$

Докажем, что последовательность $g(m)$ не убывает. Действительно, $g(m+1) - g(m) = 1 + [\cos(m+1)] - [\cos m] \geq 0$, поскольку $[\cos m]$ может принимать только значения 0 или -1.

При фиксированном m функция $g^2(m) - n^2$ убывает по n. Если $n \geq g(m)$, то k – неположительное число. Выясним, для каких натуральных m число $n = g(m) - 1$ также натуральное число, т.е. $g(m) \geq 2$. Так как $g(1) = g(2) = 1$, $g(m) \geq 2$, то $m \geq 3$.

Если $n = g(m) - 1$, то $k = 2g(m) - 1$ и, в силу монотонности это значение n соответствует минимальному значению k. Остается, тем самым, выяснить, при каких m выполнено неравенство

$$1 \leq 2g(m) - 1 \leq 2015 \iff 1 \leq g(m) \leq 1008.$$

Правое неравенство выполнено очевидным образом при всех $m \leq 1008$. При $m = 1009$: $g(1009) = 1008$. Если же $m \geq 1010$, то $g(m) \geq 1009$.

Выясним, удовлетворяют ли значения $m = 1$ и $m = 2$ условию задачи. При этих m функция $g(m) = 1 - k$. Но уравнение $1 - k = n^2$ не имеет решений в натуральных числах.

5-9 классы

2.1. *Ответ:* D.

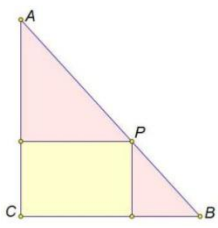
Решение. Хотя бы одна из первых двух подсказок обязана быть верной – иначе правильного ответа нет вообще. Тогда две последние подсказки ошибочны. Поэтому правильным ответом может быть только D. В этом случае все условия выполнены: подсказки 1, 3 и 4 ошибочны, а подсказка 2 – правильная.

2.2. *Ответ:* 1007.

Решение. Разобьём числа Петрова и Васечкина на пары следующим образом: (2, 3), (4, 5), ..., (2012, 2013). При этом число 1 у Петрова останется без пары. Заметим, что в каждой паре сумма цифр второго числа (это число Петрова) на 1 больше чем сумма цифр первого (так как эти числа отличаются только в последнем разряде), а всего таких пар будет $\frac{2012}{2} = 1006$. Следовательно, разность сумм цифр будет равна 1006, а с учетом лишней единицы у Петрова – 1007.

2.3. *Ответ:* нет.

Решение. Обозначим $p = \frac{AP}{AB}$, тогда отрезанные треугольники (которые пошли на пирог с капустой) подобны исходному с коэффициентами p и $1 - p$.



Если площадь исходного треугольника обозначить через S, то суммарная площадь пирога с капустой равна $S_{\text{кап}} = p^2S + (1 - p)^2S = (2p^2 - 2p + 1)S$, следовательно, площадь пирога с клубникой равна $S_{\text{клубн}} = (2p - 2p^2)S$. Вычитая одно из другого, получим: $S_{\text{кап}} - S_{\text{клубн}} = (4p^2 - 4p + 1)S = (2p - 1)^2S$, что не может быть меньше нуля.

2.4. *Ответ:* 12°.

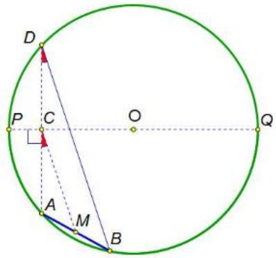


Рис. 6

Решение. Продлим прямую *AC* до пересечения с окружностью в точке *D* (см. рис. 6). Хорда *AD* перпендикулярна диаметру *PQ*, следовательно, она делится им пополам. Значит, *CM* – средняя линия в треугольнике *ABD*, поэтому $CM \parallel BD$ и, значит, $\angle ACM = \angle ADB$. Угол $\angle ADB$ – вписанный, опирается на дугу *AB*, следовательно, равен её половине.

2.5. *Ответ:* не может.

Решение. Запишем это число в виде $n^2 + 2n + 2014 = (n + 1)^2 + 11 \cdot 183$. Если оно делится на 121, то оно должно делиться и на 11, следовательно, $n + 1$ – тоже делится на 11. Тогда $(n + 1)^2$ кратно 121, а $11 \cdot 183$ – нет, следовательно, их сумма не делится на 121.

2.6. *Ответ:* 387.

Решение. Число мальчиков кратно 6, обозначим его $6n$, очевидно, $n \geq 25$. Тогда девочек $6n \cdot 1{,}15 = 6{,}9n$. Суммарное количество школьников равно $12{,}9n \leq 400$, поэтому $n \leq 31$. Учитывая то, что $6{,}9n$ должно быть целым, получим, что $n = 30$, то есть всего 387 учащихся.

2.7. *Ответ:* 5 соревнований, $8^{\text{Б}}$.

Решение. Обозначим $n \geq 2$ – число соревнований в спартакиаде, тогда общее число очков, полученное всеми командами равно $n \cdot (x + y + z) = 22 + 9 + 9 = 40$. Но $z \geq 1,\ y \geq 2,\ x \geq 3$, следовательно, $x + y + z \geq 6$. Получается, что возможны следующие варианты: $x + y + z = 10,\ n = 4;\ x + y + z = 20,\ n = 2;\ x + y + z = 8,\ n = 5$. Рассмотрим их.

(a) Случай $x+y+z=10,\ n=4$. Очевидно, что $x\le 6$ (иначе $8^{\text{В}}$ наберёт более 9 очков). Рассмотрим возможные варианты:

$x=6$. Значит, $y=3,\ z=1$, но тогда $8^{\text{А}}$ не наберёт 22 очка;

$x=5$. Тогда $8^{\text{А}}$ наберёт менее 20 очков;

$x\le 4$. Тогда $x+y+z\le 9$.

Значит, указанный случай невозможен.

(b) Случай $x+y+z=20,\ n=2$. Если $x<11$, то команда $8^{\text{А}}$ не смогла бы набрать 22 очка. Если $x\ge 11$, то команда $8^{\text{В}}$ в итоге получила бы более 11 очков, что неверно. Значит, указанный случай невозможен.

(c) Случай $x+y+z=8,\ n=5$. Очевидно, в этом случае $z=1,\ x+y=7$. Поэтому или $x=4,\ y=3$ или $x=5,\ y=2$.

Если $x=4,\ y=3$, то $y+z=4$. Следовательно, команды $8^{\text{Б}}$ и $8^{\text{В}}$ в каждом соревновании набирали не менее 4 очков. Тогда за 5 соревнований они должны были набрать не менее 20 очков (а на самом деле набрали $9+9=18$).

Если $x=5,\ y=2$, то команда $8^{\text{В}}$ один раз заняла 1-е место и 4 раза – последнее. Команда $8^{\text{А}}$ в прыжках через «козла» заняла не первое место. Единственный вариант набрать 22 очка: 2-е место и победа в оставшихся 4-х соревнованиях. Получается, что команда $8^{\text{Б}}$ в этих 4-х соревнованиях занимала всё время 2-е место, а в прыжках через «козла» – 3-е.

2.8. *Ответ:* 649.

Решение. Число N имеет ровно 4 делителя либо если $N=p^3$, либо если $N=pq$, где p и q – простые. В первом случае подходит только 27. Во втором случае надо рассмотреть попарные произведения всех простых чисел меньших 15 (это числа $2,3,5,7,11,13$). Сумму их попарных произведений можно подсчитать как

$$S_{pq}=\frac{\left(2+3+5+7+11+13\right)^2-\left(2^2+3^2+5^2+7^2+11^2+13^2\right)}{2}=652\cdot$$

Из попарных произведений надо отбросить 6, 10 и 14, так как они меньше 15. В итоге $S=27+S_{pq}-6-10-14=649$.

2.9. *Ответ:* нет.

Решение. Сумма коэффициентов уравнения $x^2-2013x-13=0$ равна -2025, сумма коэффициентов уравнения $x^2+13x+2013=0$ равна 2027. За один шаг сумма коэффициентов меняется на 1. Значит, в процессе перехода от первого уравнения ко второму эта сумма в какой-то момент станет равной нулю. Следовательно, это уравнение будет иметь целый корень $x = 1$.

2.10. *Ответ:* область, ограниченная прямыми $q = 0$ и $q = -4p - 4$, лежащая ниже первой и левее второй прямой.

Решение. Указанное условие равносильно тому, что значения многочлена $f(x) = x^2 + 2px + q$ отрицательны в точках $x = 0$ и $x = 2$. Следовательно, $q < 0$ и $q < -4 - 4p$.

2.11. *Ответ:* $3\sqrt{3}$.

Решение. Обозначим S – площадь, a, b, c – стороны треугольника, h_a, h_b, h_c – соответствующие высоты. Тогда $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$, откуда $a = 2S/h_a$, $b = 2S/h_b$ и $c = 2S/h_c$. Подставив в формулу $S = pr = \frac{1}{2}(a + b + c)$, получим $1 = (1/h_a) + (1/h_b) + (1/h_c)$. Не ограничивая общности можно считать $h_a \leq h_b \leq h_c$.

Если $h_a > 3$, то $(1/h_a) + (1/h_b) + (1/h_c) < 1$. Поэтому $h_a \leq 3$. Рассмотрим три случая.

(a) В случае $h_a = 1$ получим $(1/h_b) + (1/h_c) = 0$, что невозможно.

(b) В случае $h_a = 2$ получим $(1/h_b) + (1/h_c) = \frac{1}{2}$. Тогда $a = 2S/h_a = S$ и $b + c = 2S/h_b + 2S/h_c = S$, что противоречит неравенству треугольника.

(c) В случае $h_a = 3$ получим $(1/h_b) + (1/h_c) = \frac{2}{3}$, причём $h_b, h_c \geq 3$, что возможно только в случае $h_a = h_b = h_c = 3$. Получаем правильный треугольник со стороной $a = b = c = 2\sqrt{3}$, площадь которого равна $3\sqrt{3}$.

2.12. *Ответ:* 1007.

Решение. Допустим, что *N* коробок пустые, тогда 2014-*N* коробок содержат конфеты. Заметим, что на коробке с номером *k* написано, что имеется не менее 2015-*k* пустых. Поэтому надписи на коробках с номерами 1, 2, ..., 2014-*N* являются ложными.

Следовательно, *N*=2014-*N*, откуда и следует ответ.

2.13. *Ответ:* 9 наборов; 18 или 19 вагонов.

Решение. Обозначим через a_1, a_2, ..., a_n количества вагонов в наборах, упорядоченные по возрастанию. Заметим, что $a_3 \geq 9$, так как иначе суммарная длина трех самых маленьких наборов получается меньше 25: $a_1+a_2+a_3 \leq 7+8+9=24<25$.

Аналогично $a_{n-2} \leq 16$, иначе $a_{n-2}+a_{n-1}+a_n \geq 16+17+18 > 50$.

Итак, оставшиеся 112 - 50 - 25 = 37 вагонов составляют наборы, длины которых расположены в диапазоне от 10 до 15. Если предположить, что количество этих наборов равно 1 или 2, то их суммарная длина не более 30. А если предположить, что их 4 или более, то их суммарная длина будет более 40. Таким образом, количество таких наборов равно 3, и, следовательно, общее число наборов равно 9.

Поскольку $a_7 \leq 16$, $a_8 + a_9 \geq 50 - 16 = 34$. Такое возможно только в случае, когда $a_9 \geq 18$. Случай $a_9 > 19$ невозможен, так как тогда $a_7 + a_8 < 50 - 19 = 31$, т.е. $a_7 \leq 14$ и $a_4 + a_5 + a_6 \leq 11+12+13 < 37$. Можно показать, что оба оставшихся для a_9 случая возможны, указав длины явным образом: $\{7,8,10,11,12,14,15,17,18\}$ и $\{7,8,10,11,12,14,15,16,19\}$.

2.14. *Ответ:* a) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55; b) $N = 54$.

Решение.

a) Если выбирать каждый новый отрезок таким образом, чтобы он был равен сумме двух наибольших из остальных, то треугольник с его участием составить нельзя.

b) Из предыдущего пункта видно, что для $N = 55$ такую последовательность можно построить. Покажем, что для $N = 54$ такую последовательность построить уже не удастся.

Упорядочим по возрастанию длины отрезков $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_{10} \leq 54$. Если из отрезков длин a_i, a_{i+1}, a_{i+2} нельзя составить треугольник, то это означает, что нарушается неравенство треугольника, т.е. $a_i + a_{i+1} \leq a_{i+2}$. Поскольку $a_1, a_2 \geq 1$, то, последовательно применяя это неравенство для i=1,2,..., 8, получим: $a_3 \geq a_1+a_2 \geq 2$, $a_4 \geq a_2+a_3 \geq 3$,..., $a_{10} \geq a_8+a_9 \geq 55$, что приводит к противоречию.

2.15. *Ответ:* да.

Решение. Например, в качестве первого числа можно взять $n = \frac{3+3\cdot5\cdot7\cdot...\cdot201}{2}$. Это число целое, так как числитель – четный, и кратно 3, поскольку числитель кратен 3.

2.16. *Ответ:* 18.

Решение. Заметим, что $1^2+8^2 = 7^2 + 4^2 = 65$. При зафиксированных длинах *AB* и *BC* площадь треугольника *ABC* будет максимальна, если угол *ABC* – прямой. В этом случае $\mathrm{AC} = \sqrt{65}$ и, следовательно, угол *BCD* тоже прямой, а площадь треугольника *BCD* тоже максимальна.

2.17. *Ответ:* 0.

Решение. Рассмотрим числа вида $m = 2014^a \cdot 2015^b$ и $b = 2014^c \cdot 2015^d$. Тогда

$$|2015m^5 - 2014n^4| = \left|2014^{5a} \cdot 2015^{5b+1} - 2014^{4c+1} \cdot 2015^{4d}\right|.$$

Эта величина равна 0 в случае $5a=4c+1$, $5b+1=4d$. Несложно подобрать такие числа, например, $a=c=1$, $b=3$, $d=4$.

2.18. *Ответ:* 2.

Решение. Если $a=0$, то $b=0$ и $c=5$, значит, $|a+b+c| = 5$. Если $a \neq 0$, то рассмотрим функцию $f(x) = ax^2 + bx + c$. Заметим, что $f(x) - 5$ имеет корни $1 \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$. Следовательно, $f(x) = 5 + k \cdot (4x^2 - 8x - 3)$, $k \neq 0$, т.е. $|a+b+c| = |5 - 7k|$. Минимум, равный 2, достигается при $k=1$.

2.19. *Ответ:* $q = -3$.

Решение. Если x – корень, то $x^2 = -x - q$, следовательно, $x^4 = x^2 + 2qx + q^2 = (2q-1)x + q^2 - q$. Тогда $(x_1)^4 + 2x_1(x_2)^2 - x_2 = (2q-1)x_1 + q^2 - q + 2qx_2 - x_2 = (2q-1)(x_1 + x_2) + q^2 - q$. Воспользуемся теоремой Виета: $x_1 + x_2 = -1$. Получим $q^2 - 3q + 1 = 19$, откуда $q = -3$ или $q = 6$, но при $q = 6$ исходное уравнение корней не имеет.

2.20. *Ответ:* 11,12,27,11,12,27,11,12.

Решение. Из условия задачи вытекает, что последовательность чисел ряда является периодической с периодом 3.

2.21. *Ответ:* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (4+5) \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 : 9 = 2016$.

2.22. *Ответ:* 32.

Решение. По условию $\frac{60}{100} < \frac{20}{x} < \frac{70}{100}$, отсюда $\frac{200}{7} < x < \frac{100}{3}$, то есть $29 \leq x \leq 33$. Из первого условия задачи следует, что число вопросов должно делиться на 4.

2.23. *Ответ:* 1909.

Решение. Запишем искомое число в виде $\overline{\mathrm{abcd}}$. Тогда $\overline{\mathrm{abcd}} = \overline{\mathrm{dcba}} - 7182$, откуда $111(d-a) + 10(c-b) = 798$.

Очевидно, $(d-a)$ может быть равно только 7 или 8. В случае $d-a=7$ получим $10(c-b)=21$, что невозможно. В случае $d-a=8$ получим $10(c-b)=-90$, следовательно, $b-c=9$, откуда $b=9,\ c=0$. Равенство $d-a=8$ возможно при $d=8, a=0$ или $d=9, a=1$, но первая цифра не может быть равна нулю, следовательно, искомое число равно 1909.

2.24. *Ответ:* 12.

Решение. По условию $c^2 - b^2 = 2016 \Longrightarrow (c-b)(c+b) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Система $c-b=n, c+b=k$ (здесь n – один из делителей числа 2016, а $k=\frac{2016}{n}$) имеет натуральные решения $c=\frac{n+k}{2}$, $b=\frac{k-n}{2}$, если $n<k$ (то есть $n \le 44$) и n,k – четные. Возможные значения n: $2,\ 2^2=4,\ 2^3=8,\ 2^4=16,\ 2\cdot 3=6,\ 2^2\cdot 3=12,\ 2^3\cdot 3=24,\ 2\cdot 7=14,\ 2^2\cdot 7=28,\ 2\cdot 3^2=18,\ 2^2\cdot 3^2=36,\ 2\cdot 3\cdot 7=42$ – всего 12 вариантов.

2.25. *Ответ:* 72.

Решение. Максимальное значение может быть равно $9\cdot 6 = 54$, а минимальное – $(-3)\cdot 6 = -18$.

2.26. *Ответ:* 4058209.

Решение. По условию $n+2015=2016m,\ n+2016=2015k$. Отсюда $2016m - 2015k = -1$. Решение этого уравнения в целых числах: $m=-1+2015p, k=-1+2016p$. Значит, $n=-2015-2016+2016\cdot 2015p$. Наименьшее такое натуральное n равно $2015^2 - 2016 = 405820$.

Задания заключительного этапа олимпиады школьников «Покори Воробьёвы горы!» по математике (2013/14, 2014/15 и 2015/16 учебные годы)

10-11 классы (март 2014 г.)

3.1. В периодической десятичной дроби $0{,}242424\ldots$ первую цифру после запятой заменили на 4. Во сколько раз полученное число больше исходного?

3.2. Найдите все значения y, при каждом из которых ни одно значение x, удовлетворяющее неравенству $\log_2(|x|+|y|) \le 2$, не удовлетворяет неравенству $\log_{1/2}(|x|+|y+4|) \ge -2$.

3.3. Окружность радиуса $2\sqrt{3}$ проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает стороны AC и BC в точках M и K соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = 6$, $MK = 2\sqrt{3}$, а центр окружности находится внутри треугольника ABC на расстоянии 10 от точки C.

3.4. Определите минимальное значение величины $|x+y|$ при условии, что числа x и y удовлетворяют соотношению

$$5\cos(x+4y) - 3\cos(x-4y) - 4\sin(x-4y) = 10.$$

3.5. Одно основание правильной n-угольной призмы ($n \ge 3$) имеет n общих точек со сферой радиуса 3; другое основание имеет с этой сферой одну общую точку. Какие значения может принимать объём призмы (при этом значение n неизвестно)?

10-11 классы (март 2015 г.)

3.6. Можно ли представить выражение

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+bz)^2-(by-cx)^2-(cz+ay)^2$$

в виде квадрата некоторого многочлена от переменных a, b, c, x, y, z ?

3.7. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 + (2+a)x - 6a^2 + 11a = 3$ имеет два корня x_1 и x_2, удовлетворяющие неравенству $\frac{2x_1}{x_2} + \frac{x_2}{2x_1} \le 2$.

3.8. Что больше: $2\sin\frac{5\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16}$ или сумма корней уравнения $|3\cdot\arccos x| = |\arcsin x|$?

3.9. Города A, B, C, D, E лежат на одной окружности и попарно соединены прямолинейными дорогами. Два велосипедиста выехали одновременно из A в D и из C в E, повстречавшись в пути. Затем они выехали одновременно из D в B и из E в C, опять повстречавшись в пути. Наконец, они выехали одновременно из B в E и из C в B, прибыв в пункты назначения одновременно. Найдите BC, если $AE = 2$ км и $CD = 4$ км, а скорость каждого велосипедиста постоянна.

3.10. Гипербола $y = \frac{5}{x}$ пересекается с прямой $2x + y = 12$ в точках A и B, а с прямой $x + 2y = 8$ – в точках C и D. Найдите координаты точки, равноудалённой от точек A, B и C.

10-11 классы (март 2016 г.)

3.11. Сравните числа $(\sin 1 + \cos 1)$ и $\frac{49}{36}$.

3.12. Два мальчика в течение нескольких часов ходили кругами вокруг здания, оба по часовой стрелке, каждый с постоянной скоростью. Более быстрый проходил один круг за 5 минут, а более медленный – за некоторое целое число минут. При этом время между встречами тоже равнялось некоторому целому числу минут, причем оно было не меньше 12. За какое время более медленный мальчик проходил полный круг?

3.13. Найдите минимальное значение выражения
$$\sqrt{(x+6)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-4)^2}$$
при условии $2|x| + 3|y| = 6$.

3.14. Решите уравнение
$$[\log_2(\log_3 x)]^2 - 11\log_2([\log_3 x]) + 18\log_2(\log_3([x])) = 0$$
(через $[t]$ обозначена целая часть числа t, то есть наибольшее целое число, не превосходящее t).

3.15. Боковые ребра SA, SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ взаимно перпендикулярны. Точка D лежит на основании пирамиды $SABC$ на расстоянии $\sqrt{5}$ от ребра SA, на расстоянии $\sqrt{13}$ от ребра SB

и на расстоянии $\sqrt{10}$ от ребра SC. Какое наименьшее значение может иметь объем пирамиды $SABC$ при этих условиях?

5-9 классы (март 2014 г.)

4.1. (7–9 классы)**.** На острове рыцарей и лжецов рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. В школе на этом острове учатся как рыцари, так и лжецы – в одном классе. Однажды учитель спросил у четырёх детей: Ану, Бану, Вану и Дану, кто из них сделал домашнее задание. Они ответили:

- Ану: Домашнее задание сделали Бану, Вану и Дану.
- Бану: Домашнее задание не сделали Ану, Вану и Дану.
- Вану: Не верьте им, господин учитель! Ану и Бану – лжецы!
- Дану: Нет, господин учитель, Ану, Бану и Вану – рыцари!

Сколько рыцарей среди этих детей?

4.2. (7 класс)**.** Найдите наименьшее возможное значение $|2015m^5 - 2014n^4|$, если m и n – натуральные числа.

4.3. (7 класс)**.** Фермеры Иванов, Петров, Сидоров, Васильев и Ермолаев владеют участками прямоугольной формы, площадь которых указана на чертеже (см. рис. 7). Найдите площадь общего пастбища.

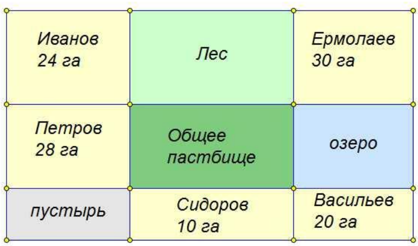


Рис. 7

4.4. (7–9 классы)**.** Уходя на работу, мама поручила Мише, Пете и Васе: а) подмести пол в прихожей; б) помыть посуду; в) купить хлеба; г) заплатить за электричество; д) вынести мусор; е) пропылесосить ковёр в гостиной. Сколькими различными способами они могут распределить задания, так, чтобы каждое задание делал кто-то один из ребят, при условии, чтобы каждый что-нибудь делал?

4.5. (7–8 классы)**.** Найдите наибольшее трёхзначное число, которое кратно сумме своих цифр и в котором первая цифра совпадает с третьей, но не совпадает со второй.

4.6. (7–9 классы). Решите в натуральных числах уравнение $abc + ab + bc + ac + a + b + c = 164$. В ответе укажите произведение abc.

4.7. (8–9 классы). В треугольнике ΔABC известны стороны $AB = 5$ и $AC = 6$. Какой должна быть сторона *BC*, чтобы угол $\angle ACB$ был максимально возможным? В ответе укажите длину стороны *BC*, округлённую до ближайшего целого числа.

4.8. (8–9 классы). Петя хотел нарисовать правильный треугольник *ABC*. Но, поскольку он рисовал неточно, получился треугольник с углами $\angle A = 59^{\circ}$ и $\angle B = 63^{\circ}$. Потом Петя провел высоты *CE* и *BD*, но, поскольку угольник был слегка перекошен, получил углы $\angle ADB = \angle AEC = 92^{\circ}$. Найдите градусную меру угла $\angle AED$.

4.9. (9 класс). Последовательность чисел задана следующим образом: $a_1 = 0,\ a_2 = 1$ и $a_{n+1} = 4(a_n - a_{n-1})$ при $n \geq 2$. Найдите наименьший положительный член последовательности, кратный 2014. В ответе укажите номер этого члена.

5-9 классы (март 2015 г.)

4.10. (5-7 классы). Некоторое трехзначное число сложили с числом, записываемым теми же цифрами, но в обратном порядке и получили 1777. Какие числа складывали?

4.11. (5-9 классы). В ролевой игре «World of MSU» имеется три класса: воин, маг, целитель. Каждый игрок может управлять персонажем некоторого класса (одиночный класс) или персонажем, совмещающим способности двух классов (двойной класс), например, маг-целитель.

Партия из 32 игроков штурмует «Цитадель зла». Известно, что целителей (т.е. всех, имеющих способности целителей) в два раза больше магов и в *k* раз меньше, чем воинов (*k* – целое число, большее двух).

Сколько игроков имеют одиночный класс, если известно, что игроков, имеющих двойной класс на 2 больше, чем целителей?

4.12. (9 класс). Будем обозначать max(A,B,C) наибольшее из чисел A,B,C. Найдите наименьшее значение величины max($x^2+|y|$, $(x+2)^2+|y|$, $x^2+|y-1|$).

4.13. Когда Петя вышел из дома, он заметил, что биссектриса угла между часовой и минутной стрелкой указывает вертикально вверх. А когда пришел в школу, заметил, что биссектриса указывает на деление, соответствующее 13 минутам. Сколько времени он шел (известно, что он шел меньше часа)?

4.14. (5-8 классы). Пункты *A, B, C* расположены последовательно, причем расстояние *AB* равно 3 км, а расстояние *BC* равно 4 км. Из пункта *A* выехал велосипедист и поехал в пункт *C*. Одновременно с ним из пункта *B* вышел пешеход и направился в пункт *A*. Известно, что пешеход и велосипедист пришли в пункты *A* и *C* одновременно. Найдите, на каком расстоянии от пункта *A* они встретились.

4.15-4.16. (8, 9 классы). Число 2015 можно представить в виде суммы последовательных целых чисел различным образом, например 2015=1007+1008 или 2015=401+402+403+404+405.

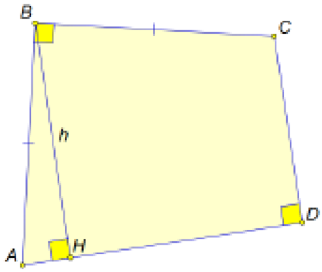
а) (8 класс) Какое наибольшее количество слагаемых может быть в таком представлении?

б) (9 класс) Сколькими способами можно это сделать?

Замечание: целые числа могут быть отрицательными.

4.17. (5-7 классы). Некоторое четырехзначное число является точным квадратом. Если убрать первую цифру слева, то оно станет точным кубом, а если убрать 2 первые цифры, то оно станет четвертой степенью целого числа. Найдите это число.

4.18. (8,9 классы). В четырехугольнике *ABCD* известно, что *AB* =*BC*, углы *ABC* и *ADC* – прямые. Из вершины *B* опущен перпендикуляр *BH* на сторону *AD* (см. рисунок).



Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если известно, что $BH = h$.

4.19. (8 класс). В трапеции диагонали пересекаются под прямым углом. Одна из диагоналей равна средней линии. Определите, какой угол она образует с основаниями трапеции.

4.20. (9 класс). Найдите наименьшее значение функции $f(x,y) = \frac{2015(x+y)}{\sqrt{2015x^2+2015y^2}}$ и укажите все пары (x,y), при которых оно достигается.

4.21. (5-8 классы). Числа 1,2,..., 2016 разбили на пары, при этом оказалось, что произведение чисел в каждой паре не превосходят некоторого натурального N. При каком наименьшем N это возможно?

4.22. (9 класс). a_1, ... , a_{2015} – арифметическая прогрессия, все члены которой – натуральные числа. Разность прогрессии равна 6. Докажите, что не менее 250 членов прогрессии – составные числа.

5-9 классы (март 2016 г.)

4.23. (5–6 классы). Тетя Зина продает в электричке носки – одну пару за 20 рублей или 3 пары за 50, причем с каждой такой продажи получает одинаковую прибыль. По какой цене ей надо продавать 5 пар, чтобы при этом получать такую же прибыль?

4.24. (5–8 классы). Целое число увеличили на 2, при этом его квадрат уменьшился на 2016. Каким число было в начале (до своего увеличения)?

4.25. (5–6 классы). Найдите все несократимые положительные дроби, которые увеличиваются в 3 раза, если увеличить и числитель, и знаменатель на 12.

4.26. (5–8 классы). Маленький огород, имеющий форму прямоугольника размером 6×7 метров, разбили на 5 квадратных грядок. Все межи между грядками проходят параллельно сторонам прямоугольника, сторона каждой грядки составляет целое число метров. Найдите суммарную длину получившихся меж (считать межи линиями, не имеющими толщины).

4.27. (5–9 классы). Найдите наибольшее натуральное число, которое невозможно представить в виде суммы двух составных чисел.

4.28. (7–9 классы). Решите уравнение

$$\left(\sqrt{\mathrm{x}}\right)^{2016} + \left(\sqrt{1-\mathrm{x}}\right)^{2016} = 1.$$

4.29. (7–9 классы). Найдите все натуральные числа, которые в 36 раз больше суммы своих цифр.

4.30. (9 класс). Пусть $f(x) = x^2 + px + q$, где p, q – некоторые коэффициенты. На какую наименьшую величину может отличаться наибольшее значение функции $g(x) = |f(x)|$ от наименьшего значения этой функции на отрезке $[2; 6]$?

4.31. (9 класс). Решить в целых числах уравнение

$$x^6 = y^3 + 217.$$

Ответы и решения

10-11 классы (март 2014 г.)

3.1. *Ответ:* В $\frac{73}{40}$ раз.

Решение. Исходная дробь (как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии) равна $\frac{24}{99}$. После замены цифры получилось число $\frac{24}{99} + \frac{2}{10} = \frac{438}{99 \cdot 10}$. Следовательно, искомое отношение равно $\frac{438 \cdot 99}{9 \cdot 10 \cdot 24} = \frac{73}{40}$.

3.2. *Ответ:* $y \in (-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$.

Решение. Решения первого неравенства на плоскости Oxy образуют квадрат с вершинами в точках $(0; 4)$, $(4; 0)$, $(0; -4)$, $(-4; 0)$ без точки с координатами $(0; 0)$. Решение у первого неравенства существует, только если $y \in [-4; 4]$.

Решения второго неравенства на плоскости Oxy образуют квадрат с вершинами в точках $(0;0)$, $(4;-4)$, $(0;-8)$, $(-4;-4)$ без точки с координатами $(0;-4)$. У второго неравенства решение существует только в случае, когда $y \in [-8;0]$.

Следовательно, при $y \in (-\infty;-4] \cup [0;+\infty)$ ни один x, являющийся решением первого неравенства, не является решением второго неравенства.

3.3. *Ответ:* $22\sqrt{3}$.

Решение. Пусть $CM = x$, $CK = y$. Треугольники ABC и KMC подобны, так как $\angle CMK = \pi - \angle AMK = \angle ABC$. Тогда $AC = y\sqrt{3}$, $BC = x\sqrt{3}$ и площадь ΔABC равна $\frac{3}{2}xy\sin\angle C$. Из того, что $AC \cdot MC$ равно квадрату длины касательной, проведённой из точки C, получим $xy\sqrt{3} = 88$.

По теореме синусов $\sin\angle ABM = \frac{AB}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, и так как центр окружности находится внутри треугольника, то $\angle AMB = 60^\circ$. Далее $\sin\angle MBK = \frac{MK}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$, $\angle MBK = 30^\circ$ и $\angle C = \angle AMB - \angle MBK = 30^\circ$. Площадь ΔABC равна $\frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin\angle C = \frac{3xy}{4} = 22\sqrt{3}$.

3.4. *Ответ:* $\frac{\pi}{3} - \frac{3}{8}\arccos\frac{3}{5}$.

Решение. Вводим вспомогательный угол $\varphi = \arccos\frac{3}{5}$, тогда

$$\cos(x+4y) - \cos(x-4y-\varphi) = 2 \iff \begin{cases} \cos(x+4y) = 1, \\ \cos(x-4y-\varphi) = -1. \end{cases}$$

Отсюда, $\begin{cases} x = \frac{\varphi+\pi}{2} + \pi(n+k), \\ y = -\frac{\varphi+\pi}{8} + \frac{\pi(n-k)}{4}, \end{cases} \implies x + y = \frac{3\varphi+\pi}{8} + \frac{\pi}{4}(5n+3k+1)$

для любых целых n и k. Отсюда $|x+y| = \left|\frac{3\varphi+\pi}{8} + \frac{\pi m}{4}\right|$, где m – произвольное целое число. Так как $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{3}$, то $\frac{\pi}{8} < \frac{3\varphi+\pi}{8} < \frac{\pi}{4}$ и поэтому минимум выражения $|x+y|$ достигается при $m = 1$.

3.5. *Ответ:* $(0;32\pi)$.

Решение. Если основание призмы имеет n общих точек со сферой, то это основание вписано в соответствующую окружность. Тогда второе основание касается сферы в центре основания. Опишем вокруг призмы цилиндр (его объём больше объёма призмы) и будем искать возможные значения объёма цилиндра.

Пусть радиус сферы равен R, а высота цилиндра равна $R+x$, где $x \in (-R;R)$. Тогда радиус цилиндра равен $\sqrt{R^2-x^2}$, а его объём равен $V=\pi(R^2-x^2)(R+x)$. Исследуем эту функцию при $x \in (-R;R)$.

Так как $V'(x)=-\pi(3x^2+2Rx-R^2)=-3\pi(x+R)\left(x-\frac{R}{3}\right)$, то максимум $V(x)$ достигается при $x=\frac{R}{3}$ и равен $\frac{32}{27}\pi R^3$, кроме того, $V(x)$ стремится к нулю при $x\to -R$ (когда высота цилиндра стремится к нулю) и при $x \to R$ (когда радиус цилиндра стремится к нулю). Значит, для цилиндра искомое отношение принимает значения из промежутка $\left(0;\frac{32}{27}\pi R^3\right]$.

Поэтому для значений объёма пирамиды получим промежуток $\left(0;\frac{32}{27}\pi R^3\right)$ (отношение приближается к значению $\frac{32}{27}\pi R^3$ сколь угодно близко при $n\to +\infty$).

10-11 классы (март 2015 г.)

3.6. *Ответ:* да.

Решение. Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+bz)^2-(by-cx)^2-(cz+ay)^2$$
$$=a^2z^2+b^2x^2+c^2y^2-2abxz+2bcxy-2acyz=\left(az-bx-cy\right)^2.$$

3.7. *Ответ:* $a\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left\{\frac{5}{8}\right\}\cup\{1\}\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Решение. Обозначим $\frac{2x_1}{x_2}=t$. Тогда из условия задачи получаем: $t+\frac{1}{t}\le 2$.В силу известного неравенства приходим к выводу: $\left[\begin{array}{l} t<0, \\ t=1. \end{array}\right.$ Значит, возможны две ситуации:

а) $\frac{2x_1}{x_2} < 0 \iff 6a^2 - 11a + 3 > 0 \iff a \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Важно отметить, что здесь $D > 0$, поэтому у исходного уравнения будет два разных корня.

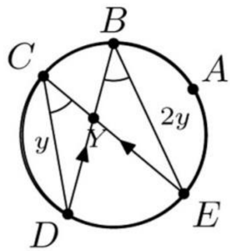
б) $\frac{2x_1}{x_2} = 1 \iff \begin{cases} 2x_1 = x_2 \neq 0, \\ x_1 + x_2 = -2 - a, \\ x_1 x_2 = -6a^2 + 11a - 3. \end{cases}$ Отсюда получаем уравнение $8a^2 - 13a + 5 = 0 \iff a = 1;\ a = \frac{5}{8}$. Проверка условия $D > 0$ здесь тоже не требуется, так как решение последней системы приводит к нахождению корней x_1 и x_2 (несовпадающих), что гарантирует их существование.

3.8. *Ответ:* первое число больше.

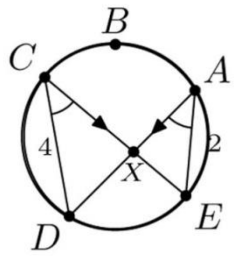
Решение. Учитывая тождество $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$, получаем $\left[\begin{array}{l} 3\arccos x = \arcsin x, \\ 3\arccos x = -\arcsin x \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \arccos x = \frac{\pi}{8}, \\ \arccos x = -\frac{\pi}{4} \end{array}\right. \iff x = \cos\frac{\pi}{8}$. Таким образом, сумма корней исходного уравнения равна $\cos\frac{\pi}{8}$.

Так как $2\sin\frac{5\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16} = \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} > \cos\frac{\pi}{8}$, то первое число больше.

3.9. *Ответ:* 16 км.



Решение. Пусть при первом заезде велосипедисты встретились в точке *X*. Так как отрезки *AD* и *CE* есть хорды одной окружности, то треугольники *AXE* и *CXD* подобны. Следовательно, отношение скоростей велосипедистов равно $\frac{AX}{CX} = \frac{AE}{CD} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Если скорость первого велосипедиста, выехавшего из пункта *A*, равна *V*, то скорость второго, выехавшего из *C*, равна $2V$.



Пусть при втором заезде велосипедисты встретились в точке Y. Так как треугольники BYE и CYD подобны, то $\frac{CD}{BE}=\frac{CY}{BY}=\frac{V}{2V}=\frac{1}{2}$. Поэтому $BE=2CD=8$.

Наконец, при третьем заезде $\frac{BC}{2V}=\frac{BE}{V}$, откуда получаем $BC=2BE=16$ (км).

3.10. *Ответ:* (7;8).

Решение. Координаты точек, лежащих на объединении этих прямых, удовлетворяют уравнению

$$0=(2x+y-12)\cdot(x+2y-8)=2x^2+5xy+2y^2-28x-32y+96$$

Так как нас интересуют точки прямых, лежащих на гиперболе, то полагая $xy=5$, получаем уравнение-следствие

$$0=2x^2-28x+2y^2-32y+121 \Leftrightarrow (x-7)^2+(y-8)^2=R^2,$$

которому удовлетворяют координаты всех точек пересечения прямых с гиперболой. Значит, все четыре точки A, B, C и D лежат на окружности с центром в точке (7;8).

10-11 классы (март 2016 г.)

3.11. *Ответ:* первое число больше.

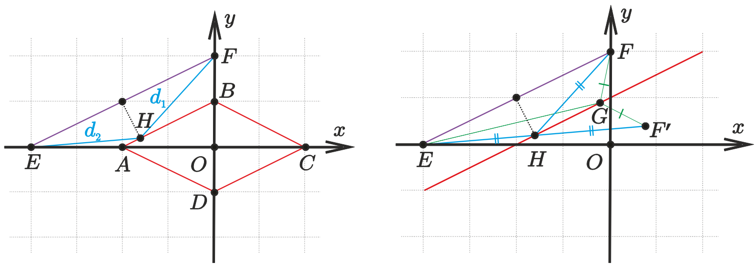
Решение. Функция $f(x)=\sin x+\cos x$ убывает на отрезке $[\pi/4;\pi/2]$. Значит, $\sin 1+\cos 1>\sin(\pi/3)+\cos(\pi/3)=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Остается убедиться в справедливости оценки $\frac{1+\sqrt{3}}{2}>\frac{49}{36}$.

3.12. *Ответ:* 6 минут.

Решение. Обозначим через n время в минутах, за которое проходит круг более медленный мальчик. Тогда $n>5$. Скорость, с которой более быстрый мальчик догоняет медленного, равна $\frac{1}{5}-\frac{1}{n}$, поэтому время между встречами составляет $\frac{5n}{n-5}=5+\frac{25}{n-5}$ минут. Так как это целое число, то $n-5$ делит 25. Тогда $n=6$ или $n=10$ или $n=30$, что соответствует времени между встречами 30 минут, 10 минут и 6 минут. Поскольку время между встречами не менее 12 минут, заданному условию удовлетворяет только $n = 6$.

3.13. *Ответ:* $2\sqrt{205/13}$.

Решение. Так как величина $\sqrt{(x+6)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-4)^2}$ равно сумме расстояний от точки (x, y) до точек с координатами $(-6; 0)$ и $(0; 4)$, а геометрическое место решений уравнения $2|x| + 3|y| = 6$ на плоскости есть ромб с вершинами $(3; 0), (0; -2), (-3; 0)$ и $(0; 2)$, то задача равносильна поиску минимума суммы расстояний от точки, лежащей на указанном ромбе, до точек с координатами $(-6; 0)$ и $(0; 4)$ (см. левый рисунок).



Докажем, что минимум этой суммы достигается в точке, лежащей на стороне ромба и равноудаленной от точек $(-6; 0)$ и $(0; 4)$. Пусть точка G лежит на прямой l, параллельной EF и удаленной от прямой EF на расстояние h (см. правый рисунок). Пусть также точка H на прямой l такова, что $EH = HF$, а точка F' симметрична точке F относительно прямой l. Тогда получим

$$EG + FG \geq EH + HF' = EH + HF,$$

причем неравенство обращается в равенство лишь при совпадении точек G и H.

В нашем случае сторона ромба AB параллельна EF, а точка H прямой AB, для которой AB, для которой $EH = FH$, лежит на стороне ромба. Сумма расстояний от любой другой точки ромба до точек E и F превосходит $EH + FH$. Остается найти EF и расстояние между прямыми EF и AB. Применяя теорему Пифагора, получим $EF = 2\sqrt{13}$. Расстояние h между прямыми равно расстоянию от начала координат до прямой AB (например, это следует из подобия прямоугольных треугольников), поэтому $h \cdot AB = AO \cdot BO \Longrightarrow h = \frac{6}{\sqrt{13}}$. Таким образом, $EH + HF = 2\sqrt{\frac{36}{13} + 13} = 2\sqrt{\frac{205}{13}}$.

3.14. *Ответ*: $x \in [3; 4)$.

Решение. Уравнение имеет смысл при $[\log_3 x] > 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.

Покажем, что при всех $x \geq 3$ справедливо неравенство $\log_3[x] \geq [\log_3 x]$. Действительно, для этих значений x существует такое натуральное число k, что $x \in [3^k; 3^{k+1})$, а тогда $[x] \in [3^k; 3^{k+1})$, поэтому $\log_3[x] \geq k = [\log_3 x]$. Следовательно,

$$\begin{aligned}[\log_2(\log_3 x)]^2 - 11\log_2([\log_3 x]) + 18\log_2(\log_3([x]))\\ \geq [\log_2(\log_3 x)]^2 + 7\log_2([\log_3 x])\\ \geq 7\log_2([\log_3 x]) \geq 0.\end{aligned}$$

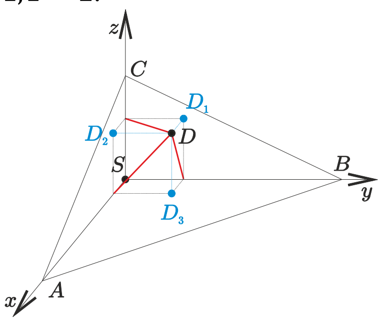
При $x \geq 9$ получим $[\log_2(\log_3 x)] \geq 1 > 0$, поэтому здесь решений нет. На полуинтервале $[4; 9)$ имеем $\log_2([\log_3 x]) = 0 < \log_2(\log_3([x]))$, поэтому на этом промежутке решений также нет. Наконец, любое число из полуинтервала $[3; 4)$ является решением.

3.15. *Ответ*: 27.

Решение. Опустим перпендикуляры DD_1, DD_2, DD_3 из точки D на плоскость SBC, SAC и SAB соответственно. Обозначим $DD_1 = x, DD_2 = y, DD_3 = z$. Из условия получим систему уравнений

$$y^2 + z^2 = 5.\ \ x^2 + z^2 = 13,\ \ x^2 + y^2 = 10,$$

откуда $x = 3, y = 1, z = 2$.



Обозначим длины ребер SA, SB и SC через a, b и c соответственно. Поскольку точки A, B, C и D лежат в одной плоскости, выполняется соотношение $\frac{3}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} = 1$. Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим для трех чисел вытекает:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}\right) \geq \sqrt[3]{\frac{3}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{2}{c}} = \sqrt[3]{\frac{6}{abc}}$$

откуда с учетом вышеприведенного соотношения вытекает, что $abc \geq 162$, причем равенство имеет место при $a = 9, b = 3, c = 6$. Объем пирамиды V равен $abc/6$, поэтому $V \geq 27$ и равенство в оценке возможно.

5-9 классы (март 2014 г.)

4.1. *Ответ:* 1.

Решение. Если Вану – рыцарь, то все остальные – лжецы. Если Вану – лжец, то Дану – тоже лжец (поскольку говорит, что Вану – рыцарь). А из Ану и Бану, по крайней мере, один должен быть рыцарем. Оба они рыцарями быть не могут, так как противоречат друг другу. В любом случае только один из детей является рыцарем.

4.2. *Ответ:* 0.

Решение. Найдём $N = 2014^x \cdot 2015^y$ такое, что $m^5 = 2014^{x-1} \cdot 2015^y$ и $n^4 = 2014^x \cdot 2015^{y-1}$. Для этого x и $y-1$ должны быть кратны 4, а $x-1$ и y – кратны 5. Подходят, например, $x = 16$ и $y = 5$. Тогда, если взять $m = 2014^3 \cdot 2015$ и $n = 2014^4 \cdot 2015$, получим $|2015m^5 - 2014n^4| = 0$.

4.3. *Ответ:* 17,5.

Решение. Поле Васильева в 2 раза больше, чем у Сидорова, следовательно, его ширина в 2 раза больше. Из этого вытекает, что площадь леса равна 15 га. Значит, площадь поля Иванова относится к площади леса как $24:15$. Поэтому так же относится площадь поля Петрова к площади общего пастбища. Уравнение $24:15 = 28:x$ имеет решение $x = 17{,}5$.

4.4. *Ответ:* 540.

Решение. Всего существует $3^6 = 729$ способов распределить задания. Но при этом в $2^6 = 64$ способах все работы будут выполнять Миша и Петя. Также есть 64 способа, когда все работы будут выполнять Петя и Вася, и 64 – когда Миша и Вася. Если вычесть $3 \cdot 64$, получится, что случаи, когда всю работу выполняет один человек, мы вычли по два раза. Поэтому к результату прибавим 3: $3^6 - 3 \cdot 2^6 + 3 = 540$.

4.5. *Ответ:* 828.

Решение. Число $\overline{aba} = 100a + 10b + a$, где $a \neq b$, должно быть кратно $2a + b$, следовательно, $101a + 10b - 10b = 81a$ тоже кратно $2a + b$.

Поскольку надо найти наибольшее такое число, рассмотрим $a = 9$. Тогда $81a = 729 = 3^6$, то есть все делители есть степени тройки, следовательно, $18a + b = 27$, откуда $b = 9$, что противоречит условию $a \neq b$.

Рассмотрим теперь $a = 8$. Тогда число $81a = 648 = 2^3 \cdot 3^4$ должно делиться на $16 + b$, что возможно только при $b = 2$ и $b = 8$. Но последнее противоречит условию $a \neq b$. Значит, $a = 8,\ b = 2$.

4.6. *Ответ:* 80.

Решение. $(a+1)(b+1)(c+1) = abc + ab + bc + ac + a + b + c + 1 = 165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$. Поэтому $a = 2,\ b = 4,\ c = 10$. Решение единственно с точностью до перестановки $a,\ b$ и c, поскольку 3, 5, 11 – простые числа.

4.7. *Ответ:* 3.

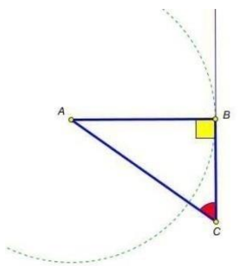


Рис. 8

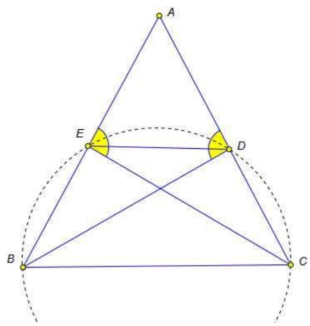


Рис. 9

Решение. Построим $AC = 6$. Тогда геометрическим местом точек B будет окружность радиуса 5 с центром в точке A. Угол $\angle ACB$ будет наибольшим, когда CB касается окружности (см. рис. 8). Тогда $CB \perp AB$, и по теореме Пифагора: $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{11} \approx 3$.

4.8. *Ответ:* 58°.

Решение. Заметим (см. рис. 9), что $\angle BDC = \angle BEC = 88^{\circ}$, следовательно, можно провести окружность, проходящую через точки B, C, D и E. Действительно, опишем окружность около треугольника ΔBCD. Она должна пройти через точку E, так как если прямая CE пересекает окружность в точке E_1, то $\angle BE_1C = \angle BEC$, что возможно, только если E совпадает с E_1.

Тогда угол $\angle AED = 180^{\circ} - \angle BED = \angle BCD$ (по свойству вписанных четырехугольников), а $\angle BCD = 180^{\circ} - \angle ABC - \angle BAC = 58^{\circ}$.

4.9. *Ответ:* 1008.

Решение. Заметим, что $a_{n+1} - 2a_n = 2a_n - 4a_{n-1} = 2(a_n - 2a_{n-1})$. Обозначим $b_n = a_{n+1} - 2a_n$, тогда $b_1 = 1$ и $b_{n+1} = 2b_n$, то есть $b_n = 2^{n-1}$. Таким образом, $a_n = b_{n-1} + 2a_{n-1} = b_{n-1} + 2b_{n-2} + 4a_{n-2} = \ldots = b_{n-1} + 2b_{n-2} + \ldots + 2^{n-1}b_1 + 2^n a_1 = (n-1)2^{n-2}$. Если это число кратно 2014, то $n-1$ кратно 1007, то есть $n = 1008$.

5-9 классы (март 2015 г.)

4.10. *Ответ*: 839 и 938.

Решение. Пусть число равно $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, тогда $\overline{abc} + \overline{cba} = 101a + 20b + 101c$.Сумма a+c должна оканчиваться на 7, т.е. a + c=7 или a+c=17.

Первый случай невозможен, поскольку тогда $101a + 20b + 101c \leq 7 \cdot 101 + 9 \cdot 20 < 1777$. Следовательно, a+c=17, что возможно, только если a=8, c=9 или наоборот. Подставляя в равенство, получим 1717 + 20b = 1777, откуда b=3.

4.11. *Ответ*: 26.

Решение. Пусть x – количество магов, тогда целителей $2x$, а воинов -2kx. Их суммарное количество больше 32, поскольку некоторые игроки совмещают два класса. Очевидно количество игроков, совмещающих два класса равно x+2x+2kx-32. Тогда целителей будет x+2x+2kx-34, откуда получаем уравнение: x+2x+2kx-34=2x. После преобразований получим x(2k+1)=34. Таким образом, 2k+1 –

делитель 34, следовательно, $k = 8$ и $x = 2$. Тогда целителей – 4, игроков двойных классов – 6, а все остальные 32-6=26 имеют одиночный класс.

4.12. *Ответ*: 1,5 при x = -1, y = 1/2.

Решение. Заметим, что $x^2>(x+2)^2$ при $x<-1$ и, наоборот, $x^2<(x+2)^2$ при $x>-1$. Если $x = 1$, то обе эти величины равны 1, в противном случае какая-то из них больше 1. Аналогично можно показать для $|y|$ и $|y-1|$, что при $y=1/2$ они обе равны 1/2, а при $y\neq1/2$ одна из них больше. Значит, минимум достигается при $x=-1$, $y=1/2$.

4.13. *Ответ*: 24 мин.

Решение. Биссектриса движется со скоростью 3,25º/мин. Одной минуте соответствует угол в 6º, следовательно, 13 минутам – 78º. Это расстояние биссектриса проходит за 78/3,25 = 24 минуты.

4.14. *Ответ*: 2,1км.

Решение. Скорости велосипедиста и пешехода относятся как 7:3, точка их встречи делит AB в таком же отношении.

4.15-4.16. *Ответ*: а) 4030; б) 16.

Решение. Сумма k чисел, начиная с n, будет равна $S(k,n) = 0{,}5(2n+k-1)k$. Т.е. надо решить уравнение $(2n+k-1)k = 4030$ в целых числах. Очевидно, в качестве k можно взять любой делитель $4030 = 2\cdot5\cdot13\cdot31$. Очевидно, каждый из множителей может быть в степени 0 или 1 – итого 16 вариантов.

4.17. *Ответ*: 9216.

Решение. Только 16 и 81 являются двузначными четвертыми степенями. Но 81 не подходит, т.к. никакой трехзначный куб не оканчивается на 81 (5^3=125, 7^3=343, 9^3=729). А на 16 оканчивается 6^3=216. Далее ищем точный квадрат, который оканчивается на 216.

4.18. *Ответ*: h^2.

Решение. Отрежем треугольник ABH, приложим его сверху – получим квадрат со стороной h.

4.19. *Ответ*: 60º.

Решение. Делаем параллельный перенос диагонали – получаем прямоугольный треугольник, в котором катет равен половине гипотенузы.

4.20. *Ответ*: $-\sqrt{4030}$ при $x = y < 0$.

Решение. $f(x,y) = \pm\sqrt{2015}\sqrt{\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}}$, поэтому ее наименьшее значение достигается, когда $f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ достигает максимума, причем $x+y<0$. Заметим, что $\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = 1 + \frac{2xy}{x^2+y^2} \leq 2$ и равенство достигается при $x=y$. Следовательно, минимум исходной функции равен $-\sqrt{2015}\sqrt{2}$.

4.21. *Ответ*: 1017072=$1008 \cdot 1009$.

Решение. Если рассмотреть числа 1008, 1009, ..., 2016, то какие-то два должны попасть в одну пару. Значит, N не может быть меньше $1008 \cdot 1009$. Покажем, что при N=$1008 \cdot 1009$ такое разбиение возможно. Разобьем на пары: (1,2016), (2, 2016), ..., (1008, 1009). Несложно показать, что для этого разбиения выполняется условие задачи.

4.22. *Решение.* Рассмотрим 7 последовательных членов прогрессии. Все они дают различные остатки от деления на 7, следовательно, один из них делится на 7, т.е. не является простым. Разбивая все члены на семерки, получаем требуемое утверждение.

5-9 классы (март 2016 г.)

4.23. *Ответ:* 80 рублей.

Решение. Если оптовая цена носков x, то $20 - x = 50 - 3x$, откуда $x = 15$.

4.24. *Ответ:* -505.

Решение. Решить уравнение $(x+2)^2 = x^2 - 2016$.

4.25. *Ответ:* 2/9.

Решение. Заметим, что если числитель не меньше 6, то от прибавления к нему 12, он вырастет не более чем в три раза, поэтому сама дробь тем более не может увеличиться в 3 раза. Перебирая числители 1,2,3,4,5, получим дроби 1/3.6, 2/9, 3/18, 4/36, 5/90, из которых только 2/9 удовлетворяет условию.

4.26. *Ответ:* 15 метров.

Решение. 42 можно разбить на 5 квадратов только одним способом: $42 = 4^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2$.Их суммарный периметр равен $4 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 56$. Но надо отнять внешние границы, их длина $6 + 6 + 7 + 7 = 26$, а также учесть, что каждая межа участвует в периметре двух квадратов – поэтому надо поделить на 2.

4.27. *Ответ:* 11.

Решение. Четные числа, большие 8 можно представить как сумму двух четных чисел, больших 2. А нечетные числа, большие 12, можно представить как сумму числа 9 и четного составного числа. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что 11 так представить нельзя.

4.28. *Ответ:* $x = 0,\ x = 1$.

Решение. Область допустимых значений: $0 \le x \le 1$. Видно, что $x = 0$ и $x = 1$ являются решениями. Если же $0 < x < 1$, то $\left(\sqrt{\mathrm{x}}\right)^{2016} + \left(\sqrt{1-\mathrm{x}}\right)^{2016} < x + (1 - x) = 1$.

4.29. *Ответ:* 324 и 648.

Решение. Обозначим через $S(x)$ сумму цифр -значного числа x. Тогда уравнение $x = 36 \cdot S(x)$ не имеет решений при $n \ge 5$, так как $x \ge 10^{n-1}$, а $36 \cdot S(x) \le 36 \cdot 9n < 10^3 n$. При $n = 4$ решений тоже нет, так как (здесь a, b, c, d– цифры числа):

$1000a + 100b + 10c + d > 36(a + b + c + d) \Leftrightarrow 964a + 64b > 26 \cdot 9 + 35 \cdot 9 \ge 26c + 35d$.

При $n = 3$: $100a + 10b + c = 36(a + b + c) \Leftrightarrow 64a = 26b + 35c$. Перебором находим числа 324 и 648.

При $n = 2$: $10a + b = 36(a + b) \Leftrightarrow 26a = 35b$ – решений нет.

4.30. *Ответ:* на 2.

Решение. Для $f(x) = x^2 + px + q$ наибольшее значение от наименьшего будет отличаться не менее, чем на 4 (это можно показать графически). Подбирая q, получим, что наибольшее значение модуля от наименьшего отличается не более, чем на 2. Для функции $f(x) = (x - 4)^2 - 2$ это отличие равно в точности 2.

4.31. *Ответ:* $(\pm 1; -6), (\pm 3; 8)$.

Решение. Заметим, что $y^3 + 217 \ge 0$, следовательно, $y \ge -6$.

Проверяя числа $y = -1, \dots, -6$, получим первую пару решений.

Заметим, что $y^3 + 217 = x^6 \ge (y + 1)^3$, откуда $y^2 + y \le 72$, т.е. $y \le 8$. Значит, $x^6 \le 8^3 + 217 = 729$. Поэтому $|x| \le 3$. Проверка показывает, что подходят $x = \pm 3, y = 8$.