ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2024 года

БИЛЕТ № 05 (11 классы): решения и критерии.

Критерии оценивания:

Для вопросов:

Есть отдельные правильные соображения – **1 балл.**

Ответ в целом правилен, но содержит существенные неточности, или существенно неполон, или отсутствует обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **2 балла.**

Ответ правилен, но присутствуют мелкие неточности, или ответ недостаточно полон, или отсутствует достаточное обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **3 балла.**

Ответ полностью правильный, но недостаточно обоснованный (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **4 балла.**

Правильный, полный и обоснованный ответ – **5 баллов (максимальная оценка).**

Для задач:

Есть отдельные правильные соображения – **1-2 балла.**

Есть часть необходимых для решения соображений, решение не закончено или содержит серьезные ошибки – **3-4 балла.**

Присутствует большая часть необходимых для решения соображений, правильно записана часть необходимых соотношений, решение не закончено или содержит ошибки – **5-7 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны почти все необходимые для решения исходные уравнения, но решение не закончено или содержит ошибки – **8-10 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит ошибки – **11-14 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит одну-две мелкие неточности, не позволившие получить правильный ответ, или правильное решение с недостаточным обоснованием существенных использованных результатов – **15-17 баллов.**

Правильное обоснованное решение с верным аналитическим ответом, но мелкой неточностью при получении численного ответа, либо правильное решение с правильными ответами с недостаточным обоснованием одного из использованных результатов (из числа не ключевых для решения, но необходимых) – **18-19 баллов.**

Полное, правильное, обоснованное решение с правильными ответами – **20 баллов (максимальная оценка).**

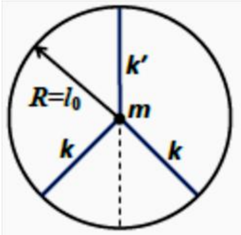
Максимальная оценка за работу: 100 баллов.

УСЛОВИЯ, ВОЗМОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАЧИСЛЯЕМЫХ БАЛЛОВ ДЛЯ ЗАДАЧ:

Задание 1:

Вопрос: Материальная точка массы m может двигаться в плоскости xy в поле сил с потенциальной энергией $U(x,y)=k\cdot(4\cdot x^2 + y^2)/2$ Каковы возможные частоты ее линейных (происходящих вдоль одной прямой) гармонических колебаний около положения равновесия?

Задача: На гладкой горизонтальной поверхности неподвижно закреплено кольцо, к трем точкам которого прикреплены концы трех упругих резинок, вторые концы которых прикреплены к одной небольшой шайбе с массой m = 250 г. Длина всех трех резинок в ненапряженном состоянии одинакова и в точности равна радиусу кольца. В положении равновесии шайбы две резинки – с одинаковыми коэффициентами жесткости k = 1 Н/м взаимно перпендикулярны (см. рисунок), а третья – с k' = 8 Н/м – ориентирована вдоль биссектрисы угла между ними. Шайбу отвели на расстояние s = 1,2 см от этого положения и отпустили без начальной скорости. Оказалось, что шайба поехала по прямой и вернулась в положение равновесия за время t. Найти все возможные значения t и скорости шайбы в этот момент времени. Отметим, что s намного меньше радиуса кольца.



Ответ на вопрос: При отклонении точки от положения равновесия строго вдоль оси x изменение ее энергии отвечает «обычному» пружинному маятнику с частотой колебаний $\omega_1 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$. Аналогично для колебаний строго вдоль оси y частота возникающих колебаний будет равна $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. При отклонении по другим направлениям будут возникать колебания по обеим осям, то есть закон движения будет комбинацией функций с обеими этими частотами.

Решение задачи: Анализ работ участников показал, что они придерживались двух принципиально разных трактовок условия данной задачи:

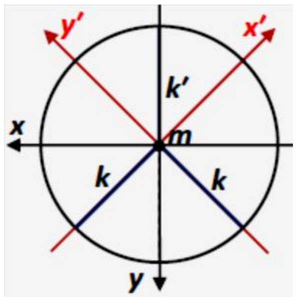
(1) Резинки – упругие тела, подчиняющиеся закону Гука и при растяжении, и при сжатии.

(2) Резинки подчиняются закону Гука только при растяжении, а при сжатии они провисают, и не влияют на движении шайбы.

Конечно, второй вариант более разумен с точки зрения физики, однако, в связи с тем, что в условии не было прямого указания на свойства резинок, кроме их упругости, жюри приняло решение принимать правильные решения независимо в рамках любой из этих двух трактовок.

Начнем с несколько более простого по изложению ***варианта 1***: в этом случае для большей естественности заменим название «резинки» на «пружины».

Введем систему координат (x,y) так, как показано на рисунке. При исследовании движения шайбы вблизи положения равновесия (по условию отклонения малы) можно в выражении для сил ограничиться линейными по x и y членами. В этом приближении деформации пружин равны $\Delta l_1 \approx -\frac{x+y}{\sqrt{2}}$, $\Delta l_2 \approx y$ и $\Delta l_3 \approx \frac{x-y}{\sqrt{2}}$. Следовательно, зависимость потенциальной энергии системы от координат описывается выражением



$$U(x,y) = \frac{k(\Delta l_1)^2}{2} + \frac{k'(\Delta l_2)^2}{2} + \frac{k(\Delta l_3)^2}{2} \approx \frac{kx^2}{2} + \frac{(k+k')y^2}{2}.$$

В соответствии с ответом на вопрос ясно, что движение по прямой после малого отклонения происходит по примерно гармоническому закону, только если отклонение было произведено вдоль одной из введенных осей. При гармоническом движении переход из состояния амплитудного отклонения в положение равновесия происходит за четверть периода колебаний, то есть возможные значения времени $t_1 = \frac{\pi}{2\omega_1} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0{,}785$ с и $t_2 = \frac{\pi}{2\omega_2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k+k\prime}} \approx 0{,}262$ с. В любом случае скорость шайбы при прохождении положения равновесия – это амплитудное значение скорости, и оно связано с амплитудой смещения соотношением $v = \omega \cdot s$. Таким образом, возможные значения скорости $v_1 = \omega_1 \cdot s = s\sqrt{\frac{k}{m}} = 0{,}024$ м/с и $v_2 = \omega_2 \cdot s = s\sqrt{\frac{k+k\prime}{m}} = 0{,}072$ м/с.

Примечание: При «менее удачном» выборе координатных осей в выражении для потенциальной энергии появляется слагаемое, «перепутывающее» координаты. Но мы знаем, что движение при малых отклонениях в общем случае все равно может быть записано как комбинация колебаний по двум осям с двумя характерными частотами (в теории такие «моды» колебаний, для которых закон движения содержит гармонические функции одной частоты, называют «нормальными модами»). Поэтому для решения задачи в произвольных координатах нужно найти преобразование перехода от «неудачных» координат к нормальным. Например, при выборе осей (x',y') мы обнаружим, что $\Delta l_1 \approx x'$, $\Delta l_2 \approx -\frac{x\prime+y\prime}{\sqrt{2}}$ и $\Delta l_3 \approx y'$. Тогда

$$U(x',y') \approx \frac{(k+k'/2)x'^2}{2} + \frac{(k+k'/2)y'^2}{2} + \frac{k'}{2}x'y'.$$

При этом замена переменных $x' = -\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}$ и $y' = +\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}$ приводит эту функцию к прежнему «удобному» выражению, и позволяет провести те же рассуждения, что и в «удобном» решении.

Критерии для решения 1 задачи:

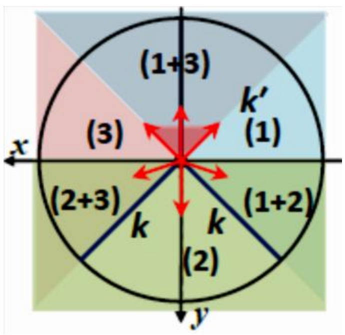
I	Для сил строится линейное по координатам выражение ИЛИ Для потенциальной энергии строится квадратичное по координатам выражение	**2**
	Выбраны «удобные» координаты ИЛИ При выборе «неудобных» координат строятся линейные преобразования перехода к «удобным»	**3**
	Обосновано, что при записи энергии в «диагонализованном» виде или при получении двух независимых уравнений движения координатные оси отвечают направлениям, вдоль которых возможны прямолинейные движения (допускается ссылка на обоснование при ответе на вопрос)	**3**
	Записана (используется в решении) правильная связь амплитуд скорости и смещения при гармонических колебаниях	**2**
II	Потенциальная энергия правильно записана в «диагонализованном» виде ИЛИ Уравнения движения правильно записаны по отдельности для нормальных мод	**3**
	Получены (используются в решении) правильные нормальные частоты	**1+1=2**
	Указано (используется в решении), что искомое время движения соответствует четверти периода гармонических колебаний	**1**
	Получены правильные численные ответы для времени	**1+1=2**
	Получены правильные численные ответы для скорости	**1+1=2**
	ВСЕГО	**20**

Вариант 2: В этом случае тоже используем систему координат и (x,y) начнем с построения выражений для деформации пружин $\Delta l_1 \approx -\frac{x+y}{\sqrt{2}}$, $\Delta l_2 \approx y$ и $\Delta l_3 \approx \frac{x-y}{\sqrt{2}}$. Теперь нужно определить, какие из резинок «работают» для каждого из направлений отклонения от положения равновесия:

$$\Delta l_1 > 0 \text{ при } x+y<0;\ \Delta l_2 > 0 \text{ при } y>0;\ \Delta l_3 > 0 \text{ при } x>y.$$

В результате мы обнаруживаем, какие из резинок «работают» для каждого из направлений отклонения (номера отмечены в каждом секторе на рисунке). Отметим, что в секторах (1), (2) и (3) шайба движется под действием силы упругости одной резинки, то есть по прямой, но эта прямая проходит через начало координат только если само отклонение происходило вдоль оси соответствующей резинки. В секторе (1+3), в котором вторая резинка провисает,

$$U(x,y) = \frac{k(\Delta l_1)^2}{2} + \frac{k(\Delta l_3)^2}{2} \approx \frac{kx^2}{2} + \frac{ky^2}{2} = \frac{kr^2}{2}.$$



Поэтому шайба движется нужным образом по «радиусу». В этих случаях закон движения соответствует закону движения пружинного маятника с жесткостью k, а время движения до положения равновесия – это четверть периода колебания такого маятника, то есть $t_1 = \frac{\pi}{2\omega_1} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0{,}785$ с. Второй вариант такого движения – при отклонении по оси y, и в этом случае время движения – это четверть периода колебания пружинного маятника с жесткостью k', то есть $t_2 = \frac{\pi}{2\omega_2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k'}} \approx 0{,}278$ с.

Соответствующие величины скорости $v_1 = \omega_1 \cdot s = s\sqrt{\frac{k}{m}} = 0{,}024$ м/с и $v_2 = \omega_2 \cdot s = s\sqrt{\frac{k'}{m}} \approx 0{,}068$ м/с. Наиболее сложный вариант – при отклонении внутри секторов (2+3) и (1+2). Из соображений симметрии ясно, что характер возможного движения в этих секторах одинаков, поэтому рассмотрим сектор (2+3). В этом случае первая резинка провисает, и

$$U(x,y) = \frac{k'(\Delta l_2)^2}{2} + \frac{k(\Delta l_3)^2}{2} \approx \frac{kx^2}{4} + \frac{(k+2k')y^2}{4} - \frac{k}{2}xy.$$

Для выделения нужного направления перейдем к новым переменным

$$\begin{cases} x = \tilde{x} \cdot \cos(\varphi) - \tilde{y} \cdot \sin(\varphi) \\ y = \tilde{x} \cdot \sin(\varphi) - \tilde{y} \cdot \cos(\varphi) \end{cases}$$

(с точки зрения геометрии такая связь означает, что новые координатные оси получаются из старых поворотом на угол φ против часовой стрелки), причем выберем φ так, чтобы в новом выражении отсутствовало слагаемое $\tilde{x} \cdot \tilde{y}$. Тогда получим:

$$U(\tilde{x}, \tilde{y}) \approx \frac{k\tilde{x}^2}{4}[1 - \sin(2\varphi)] + \frac{k\tilde{y}^2}{4}[1 + \sin(2\varphi)] + \frac{k'\tilde{x}^2}{2}\sin^2(\varphi) + \frac{k'\tilde{y}^2}{2}\cos^2(\varphi) + $$
$$+ \frac{\tilde{x}\tilde{y}}{2}[k' \cdot \sin(2\varphi) - k \cdot \cos(2\varphi)],$$

и $\mathrm{tg}(2\varphi) = \frac{k}{k'} = \frac{1}{8} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2} arctg\left(\frac{1}{8}\right)$, то есть в секторе (2+3) лежит ось $\tilde{x}$. При отклонении вдоль этой оси ($\tilde{y} \equiv 0$)

$$U(\tilde{x}) \approx \left[\frac{k}{2}\big(1 - \sin(2\varphi)\big) + \frac{k'}{2}\big(1 - \cos(2\varphi)\big)\right]\frac{\tilde{x}^2}{2} = \frac{k + k' - \sqrt{k^2 + k'^2}}{2}\frac{\tilde{x}^2}{2},$$

то есть жесткость соответствующего маятника $\tilde{k} = \frac{k+k'-\sqrt{k^2+k'^2}}{2}$, и для этого направления время движения $t_3 = \frac{\pi}{2\omega_3} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2m}{k+k'-\sqrt{k^2+k'^2}}} \approx 1{,}147$ с, а $v_3 = \omega_3 \cdot s = s\sqrt{\frac{k+k'-\sqrt{k^2+k'^2}}{2m}} \approx 0{,}016$ м/с.

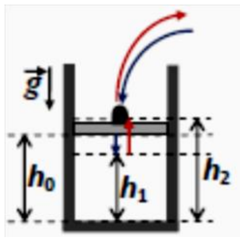
Критерии для решения 2 задачи:

I	Для сил строится линейное по координатам выражение ИЛИ Для потенциальной энергии строится квадратичное по координатам выражение	**2**
	Проведен анализ «зон провисания» для всех трех резинок	**3**
	Обосновано, что при записи энергии в «диагонализованном» виде или при получении двух независимых уравнений движения координатные оси отвечают направлениям, вдоль которых возможны прямолинейные движения (допускается ссылка на обоснование при ответе на вопрос)	**3**
	Записана (используется в решении) правильная связь амплитуд скорости и смещения при гармонических колебаниях	**2**
II	Найдены «нужные» направления и эффективные жесткости для зон (1), (3) и (2)	**3**
	Найдена эффективная жесткость для зон (1+3) и (2+3)/(1+2)	**1+1=2**
	Указано (используется в решении), что искомое время движения соответствует четверти периода гармонических колебаний	**1**
	Получены правильные численные ответы для времени (t_1 и t_2 + t_3)	**1+1=2**
	Получены правильные численные ответы для скорости (v_1 и v_2 + v_3)	**1+1=2**
	ВСЕГО	**20**

Задание 2:

Вопрос: Какую работу нужно совершить при адиабатическом сжатии одного моля кислорода с начальной температурой 301 К для увеличения его давления на 0,7 %?

Задача: В цилиндрическом сосуде с гладкими теплоизолирующими вертикальными стенками под горизонтальным теплоизолирующим поршнем находится воздух. Изначально поршень находится в равновесии, и расстояние между нижней поверхностью поршня и дном сосуда равно h_0 = 30 см. На поршень аккуратно поставили небольшую гирьку, и поршень начал опускаться. В тот момент, когда он достиг наинизшего положения на высоте h_1 = 29 см над дном сосуда, гирьку так же аккуратно убрали. До какой максимальной высоты h_2 поднимется поршень после этого? Вязкостью воздуха можно пренебречь, воздух можно считать двухатомным идеальным газом, происходящие с ним процессы – квазиравновесными, а изменениями внешнего атмосферного давления можно пренебречь.



Математическая подсказка: При $|\alpha| \lesssim 1$ и $\varepsilon \ll 1$ с ошибкой порядка $|\varepsilon|^3$ справедлива приближенная формула $(1+\varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha \cdot \varepsilon + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\varepsilon^2$.

Ответ на вопрос: Так как изменение давления мало, работу можно вычислять в линейном приближении, то есть $\delta A' \approx -p \cdot \Delta V$. При этом в адиабатическом процессе

$$\delta Q = 0 \approx p \cdot \Delta V + \frac{5}{2}\Delta(pV) = \frac{7}{2}p \cdot \Delta V + \frac{5}{2}V \cdot \Delta p \Rightarrow \delta A' \approx \frac{5}{7}pV\frac{\Delta p}{p} = \frac{5}{7}\nu RT\frac{\Delta p}{p} \approx 12{,}5 \text{ Дж}.$$

Решение задачи: Пусть S – сечение цилиндра, M – масса поршня, m – масса гирьки, p_A – атмосферное давление. Начальное давление азота в сосуде $p_0 = p_A + \frac{Mg}{S}$. В процессе опускания поршня с высоты h_0 до высоты $h_1 \equiv x \cdot h_0$ в условиях теплоизоляции внутренняя энергия азота растет за счет работы внешнего давления и силы тяжести (кинетическая энергия поршня и гирьки в обоих положениях равна нулю):

$$\frac{5}{2}p_0Sh_0 + [(M+m)g + p_AS]h_0(1-x) = \frac{5}{2}p_1Sh_0x,$$

то есть, если обозначить $\delta \equiv \frac{mg}{p_0S}$

$$x\frac{p_1}{p_0} = 1 + \frac{2}{5}(1+\delta)(1-x).$$

С учетом уравнения адиабаты (для двухатомного газа γ=7/5) $p_1 = p_0 \cdot x^{-\gamma}$, и поэтому

$$x^{-2/5} - 1 = [1-(1-x)]^{-2/5} - 1 = \frac{2}{5}(1+\delta)(1-x).$$

Отметим, что $1 - x = \frac{1}{30} \ll 1$, так что, воспользовавшись математической подсказкой, находим, что с ошибкой порядка $(1/30)^3$ величина $\delta \approx \frac{7}{10}(1-x) = \frac{7}{300}$.

В процессе подъема поршня от высоты $h_1 \equiv x \cdot h_0$ до высоты $h_2 \equiv z \cdot h_0$ аналогично

$$\frac{5}{2}p_1Sxh_0 - [Mg + p_AS]h_0(z-x) = p_0Sh_0\left[\frac{5}{2}x^{-2/5} + x - z\right] = \frac{5}{2}p_2Sh_0z = \frac{5}{2}p_0Sh_0 \cdot z^{-2/5}.$$

Следовательно,

$$z^{-\frac{2}{5}} + \frac{2}{5}z = \frac{2}{5}x + 1 + \frac{2}{5}(1+\delta)(1-x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [1+(z-1)]^{-2/5} + \frac{2}{5}(z-1) = 1 + .\frac{2}{5}\delta(1-x)$$

Естественно ожидать, что отличие z от единицы тоже будет малым: $z - 1 \equiv \varepsilon \ll 1$, и

$$\frac{7}{25}\varepsilon^2 \approx \frac{2}{5}\delta(1-x) \Rightarrow \varepsilon \approx \sqrt{\frac{10}{7}\delta(1-x)} \approx 1 - x = \frac{1}{30}.$$

Таким образом, $h_2 \approx 2h_0 - h_1 = 31$ см.

Возможный вариант решения задачи: Использование «математической подсказки» при вычислении связи давления с высотой положения поршня приводит к тому, что силы, действующие на поршень, оказываются линейными функциями его координаты. Поэтому в таком приближение движение поршня можно считать «почти гармоническим» и при его анализе заменить силу, действующую со стороны воздуха, на силу упругости «пружины». Тогда ясно, что после включения дополнительной постоянной нагрузки, которая вызывает смещение поршня от положения равновесия до остановки и последующего снятия этой нагрузки, поршень вернется в положение равновесия, набрав скорость и после этого пройдет «за» это положение до остановки еще точно такое же расстояние. Поэтому $h_2 \approx 2h_0 - h_1 = 31$ см.

Критерии для задачи:

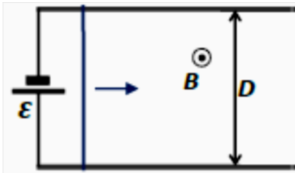
I	Используется правильная форма записи внутренней энергии двухатомного идеального газа	**1**
	Указано (используется в решении) что кинетическая энергия поршня (с гирькой или без) обращается в ноль в точках остановки поршня	**1**
	Правильно записан ЗСЭ для опускания поршня	**4**
	Правильно записан ЗСЭ для подъема поршня	**4**
II	Используется формула для начального давления азота через атмосферное давление и вес поршня	**1**
	Записано (используется в решении) уравнение адиабаты или эквивалентное уравнение	**2**
	Для нахождения нужных параметров системы (типа δ) корректно используется «математическая подсказка»	**3**
	Получен правильный аналитический ответ ($h_2 \approx 2h_0 - h_1$ или эквивалентный)	**2**
	Получен правильный численный ответ	**2**

	ВСЕГО	**20**

Задание 3:

Вопрос: Проводящий стержень длины L вращается с постоянной угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией B вокруг оси, параллельной полю, проходящей перпендикулярно стержню через его середину. Чему равна разность потенциалов на концах стержня?

Задача: В установке «рельсотрон» в качестве «снаряда» используется металлическая перемычка, которая может скользить, двигаясь поступательно, по двум очень длинным гладким горизонтальным параллельным рельсам. Сначала перемычку удерживают вблизи одной пары их концов, к которым подключают источник постоянного напряжения. В области пространства, в которой проходят рельсы, включают вертикальное постоянное однородное магнитное поле, и перемычку аккуратно освобождают. В первой серии опытов рельсы поддерживались в сверхпроводящем состоянии, а суммарное сопротивление контура, по которому протекал ток (состоящее из сопротивления перемычки, внутреннего сопротивления источника и сопротивления контактов), было примерно постоянно и равно $R_0 \approx 0{,}8$ Ом. При этом оказалось, что перемычка разгоняется до 95 % от максимально возможной (для этой установки), пройдя путь s_0 = 80 м. Во второй серии опытов сверхпроводящие рельсы заменили на рельсы с «погонным» сопротивлением ρ = 5 мОм/м. Какой путь теперь потребуется перемычке для достижения той же скорости? Считайте, что сила сопротивления воздуха отсутствует, сумма сопротивления перемычки, внутреннего сопротивления источника и сопротивления контактов не изменилась, длина начального участка рельсов (от края до линии старта перемычки) пренебрежимо мала по сравнению с s_0.



Ответ на вопрос: Конечно, движение стержня можно считать «медленным» по сравнению с перемещением носителей заряда в проводнике при установлении равновесия. Поэтому воспользуемся квазистационарным приближением, и будем считать, что в установившемся режиме действующая на носитель заряда (электрон) сила Лоренца уравновешивается силой со стороны электрического поля, возникшего из-за перераспределения зарядов: $vB = \omega rB = E$. Но при этом распределение заряда окажется симметричным относительно оси вращения, так что потенциалы концов стержня равны, и разность потенциалов на концах стержня равна нулю.

Решение задачи: Источник создает в контуре, содержащем рельсы и перемычку, ток, на который действует сила Ампера, разгоняющая перемычку. При движении перемычки в контуре возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = vBD$ с полярностью, противоположной ЭДС источника. Полное сопротивление контура в случае сверхпроводящих рельс равно R_0, а при «просто проводящих» зависит от координаты перемычки x, отсчитываемой от начального положения: $R(x) = R_0 + 2\rho x$. Поэтому сила тока в контуре

$$I = \frac{\mathcal{E} - vBD}{R_0 + 2\rho x}.$$

Видно, что при $v = \frac{\mathcal{E}}{BD} \equiv \bar{v}$ сила тока обращается в ноль, и разгон прекращается. Значит, максимальная возможная для данной установки скорость разгона как раз и равна $\bar{v}$. Уравнение движения перемычки $m\frac{dv}{dt} = BD \cdot I$ можно переписать в виде

$$v\frac{dv}{dx} = \frac{BD\mathcal{E}}{mR_0}\frac{1 - v/\bar{v}}{1 + 2\rho x/R_0} \Rightarrow \frac{dx}{1 + 2\rho x/R_0} = \frac{mR_0\mathcal{E}}{B^3D^3}\frac{f}{1-f}df,$$

в котором $f \equiv v/\bar{v}$ как раз и есть доля скорости от максимально возможной. Теперь заметим, что для опытов со сверхпроводящими рельсами ($\rho = 0$) эта формула дает

$$s_0 = \frac{mR_0\mathcal{E}}{B^3D^3} \cdot \int_0^{0,95} \frac{f}{1-f}df.$$

В случае рельсов с сопротивлением

$$\int_0^s \frac{dx}{1 + 2\rho x/R_0} = \frac{R_0}{2\rho} ln\left(1 + \frac{2\rho s}{R_0}\right) = \frac{mR_0\mathcal{E}}{B^3D^3} \cdot \int_0^{0,95} \frac{f}{1-f}df = s_0.$$

В результате

$$s = \frac{R_0}{2\rho}\left[e^{2\rho s_0/R_0} - 1\right] = (e-1)\frac{R_0}{2\rho} \approx 137{,}5 \text{ м.}$$

Примечание: На самом деле «более сложный» из возникающих в наших расчетах интегралов тоже вычисляется в элементарных функциях:

$$\int_0^{0{,}95} \frac{f}{1-f}\,df = (-f - \ln(1-f))\Big|_0^{0{,}95} = \ln(20) - 0{,}95 \approx 2{,}05,$$

но это не нужно в приведенном решении.

Критерии для задачи:

I	Используется правильное выражение для ЭДС индукции	**1**
	Правильно определена максимальная возможная для данной установки скорость	**2**
	В решении используется уравнение, связывающее достигнутую скорость с координатой перемычки	**3**
	Уравнение для пути разгона для случаев сверхпроводящих рельс и рельс с ненулевым сопротивлением записаны в едином виде, позволяющем исключить «сложное» интегральное выражение	**4**
II	Правильно записано дифференциальное уравнение для $f(x)$ или эквивалентное	**1**
	Получено правильное выражение для s_0 через параметры системы	**2**
	В решении появляется и правильно вычислен интеграл от обратного сопротивления	**1+1=2**
	Получен правильный аналитический ответ для s	**3**
	Получен правильный численный ответ	**2**
	ВСЕГО	**20**

Задание 4:

Вопрос: В чем состоит приближение тонкой линзы?

Задача: При помощи тонкой линзы на экране создано изображение пламени свечи, расположенного на главной оптической оси линзы. При этом поперечное увеличение изображения было равно $|\Gamma| = 0{,}4$. Не двигая свечу, линзу переместили на расстояние s =70 см вдоль ГОО. После перемещения и подбора положения экрана поперечное увеличение стало равно $|\Gamma'| = 2{,}5$. Найдите оптическую силу линзы.

Ответ на вопрос: При выводе формулы тонкой линзы используется два приближения. Во-первых, толщиной линзы пренебрегали по сравнению с радиусами кривизны сферических поверхностей линзы (фактически пренебрегали смещением лучей вдоль ГОО линзы на участке их пути внутри линзы). Во-вторых, считалось, что все рассматриваемые лучи падают на линзу под малыми углами к ее главной оптической оси (параксиальное приближение – в ходе вычислений синусы и тангенсы этих углов заменялись на сами углы в радианной мере). Поэтому приближение тонкой линзы объединяет оба эти требования.

Решение задачи: Так как изображение создается на экране, то оно действительное. Следовательно, линза является собирающей, а изображение перевернутое. В этом случае поперечное увеличение обычно считают отрицательным, причем $\Gamma_\perp = -\frac{b}{a}$, и с учетом формулы линзы $b = \frac{aF}{a-F} \Rightarrow \Gamma_\perp = \frac{F}{F-a}$. Следовательно, для первого изображения $\frac{F}{F-a} = -0{,}4 \Rightarrow a = \frac{7}{2}F$. Для того, чтобы модуль увеличения стал больше (но изображение осталось действительным), линзу нужно придвинуть к свече. Поэтому после перемещения линзы $a \to a - s \Rightarrow \frac{F}{F-a+s} = -2{,}5 \Rightarrow F = \frac{10}{21}s$. Следовательно, оптическая сила линзы $D = \frac{21}{10s} = 3$ Дптр.

Критерии для задачи:

I	Указано (используется в решении), что линза является собирающей.	**1**
	Указано (используется решении), что изображение является действительным	**2**
	Установлено, что линзу придвинули к свече	**3**
	Используется правильная связь поперечного увеличения (или его модуля) с расстоянием от предмета до линзы	**4**
	Определено расстояние от предмета до линзы в первом случае.	**1**

II	Определено расстояние от предмета до линзы во втором случае.	**2**
	Записано правильное уравнение (система не более чем из двух уравнений), из которых можно получить ответ,	**2**
	Получена правильная аналитическая связь F (D) и s	**3**
	Получен правильный численный ответ	**2**
	ВСЕГО	**20**