ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2023 года

БИЛЕТ № 06 (7-9 классы)

Критерии оценивания:

Для вопросов:

Есть отдельные правильные соображения – **1 балл.**

Ответ в целом правилен, но содержит существенные неточности, или существенно неполон, или отсутствует обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **2 балла.**

Ответ правилен, но присутствуют мелкие неточности, или ответ недостаточно полон, или отсутствует достаточное обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **3 балла.**

Ответ полностью правильный, но недостаточно обоснованный (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **4 балла.**

Правильный, полный и обоснованный ответ – **5 баллов (максимальная оценка).**

Для задач:

Есть отдельные правильные соображения – **1-2 балла.**

Есть часть необходимых для решения соображений, решение не закончено или содержит серьезные ошибки – **3-4 балла.**

Присутствует большая часть необходимых для решения соображений, правильно записана часть необходимых соотношений, решение не закончено или содержит ошибки – **5-7 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны почти все необходимые для решения исходные уравнения, но решение не закончено или содержит ошибки – **8-10 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит ошибки – **11-14 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит одну-две мелкие неточности, не позволившие получить правильный ответ, или правильное решение с недостаточным обоснованием существенных использованных результатов – **15-17 баллов.**

Правильное обоснованное решение с верным аналитическим ответом, но мелкой неточностью при получении численного ответа, либо правильное решение с правильными ответами с недостаточным обоснованием одного из использованных результатов (из числа не ключевых для решения, но необходимых) – **18-19 баллов.**

Полное, правильное, обоснованное решение с правильными ответами – **20 баллов (максимальная оценка).**

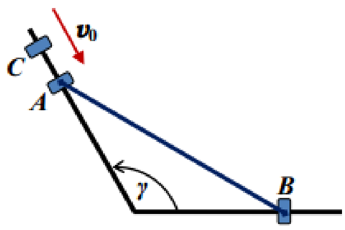
Максимальная оценка за работу: 100 баллов.

УСЛОВИЯ, ВОЗМОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАЧИСЛЯЕМЫХ БАЛЛОВ ДЛЯ ЗАДАЧ:

Задание 1:

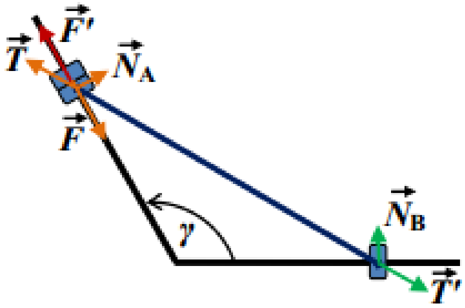
Вопрос: Две шайбы, скользящие по ровной поверхности, соединены жестким стержнем. В некоторый момент времени скорость одной из них направлена вдоль стержня и равна 1,2 м/с. В этот момент скорость второй шайбы направлена под углом 60° к стержню. Чему равна ее величина?

Задача: Три муфты (А,В и С) с одинаковыми массами могут скользить по двум гладким горизонтальным направляющим, пересекающимся под углом $\gamma = 120°$. Муфты А и В изначально покоятся, и они шарнирно соединены с легким жестким стержнем так, что стержень составляет одинаковые углы с обеими направляющими. Между муфтой С, движущейся по направляющей со скоростью v = 1,5 м/с, и муфтой А происходит упругое соударение. Определите скорость муфты А сразу после удара.



Ответ на вопрос: Поскольку стержень является «жестким», то расстояние между шайбами (длина стержня) не может измениться. Поэтому проекция скоростей шайб на ось, идущую вдоль стержня, должны быть равны. Следовательно, для скорости второй шайбы $v_2 \cdot \cos(\alpha) = v_1 \Rightarrow v_2 = \dfrac{v_1}{\cos(\alpha)}$. Значит, $v_2 = 2{,}4$ м/с.

Решение задачи: В процессе соударения шайб С и А суммарный импульс шайб не сохраняется, так на них действуют силы реакции направляющих (всегда перпендикулярные направляющим, так как те по условию гладкие) и сила упругости стержня, направленная вдоль него. Сила $\vec{F}'$, действующая на шайбу С со стороны шайбы А во время удара, равна по величине и противоположна по направлению силе $\vec{F}$, действующей со стороны С на А. Поэтому изменение импульса шайбы С за малое время удара Δt (в проекцию на



направляющую) $mv_C - mv_0 = -F \cdot \Delta t$, а $mv_A = F \cdot \Delta t - T\cos(\alpha) \cdot \Delta t$. Легко заметить, что углы между стержнем и направляющими одинаковы и равны $\alpha = \dfrac{\pi - \gamma}{2}$, то есть $\cos(\alpha) = \sin(\gamma/2)$. Сила $\vec{T}'$, действующая на шайбу В со стороны стержня, равна по величине и противоположна по направлению силе $\vec{T}$, с которой стержень действует на шайбу А (стержень невесомый, так что сумма приложенных к нему сил и моментов сил обязательно равна нулю). Поэтому $mv_B = T\cos(\alpha) \cdot \Delta t$. Кроме того, условие жесткости стержня требует $v_B \cos(\alpha) = v_A \cos(\alpha) \Rightarrow v_B = v_A$, и $F - T\cos(\alpha) = T\cos(\alpha) \Rightarrow F = 2T\cos(\alpha)$. Из этих соотношений и уравнения изменения импульса шайбы С следует, что $v_C = v_0 - \dfrac{F \cdot \Delta t}{m} = v_0 - \dfrac{2T\cos(\alpha) \cdot \Delta t}{m} = v_0 - 2v_A$. Наконец, запишем ЗСЭ и подставим в него полученные связи скоростей:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{m(v_A^2 + v_B^2 + v_C^2)}{2} \Rightarrow v_0^2 = v_A^2 + v_A^2 + (v_0 - 2v_A)^2 \Rightarrow v_A = v_B = \frac{2}{3}v_0,\ v_C = -\frac{1}{3}v_0.$$

Отрицательное значение v_C означает, что шайба С после удара изменяет направление своего движения («отскакивает» от шайбы А).

Ответ: $v_A = 1$ м/с.

Распределение баллов для задачи:

I	Указано (используется в решении), что силы реакции направляющих направлены перпендикулярно им	**1**
	Указано (используется в решении), что сила реакции стержня направлена вдоль стержня	**1**
	Правильно записан закон изменения импульса для шайбы А	**2**
	Правильно записан закон изменения импульса для шайбы В	**2**
	Правильно записан закон изменения импульса для шайбы С	**2**
	Используется условие жесткости стержня	**2**

II	Правильно найдена связь углов α и γ	**1**
	Получена правильная связь сил реакции (эквивалентная $F = 2T\cos(\alpha)$)	**2**
	Получена правильная связь скоростей $v_B = v_A$	**2**
	Получена правильная связь скоростей, эквивалентная $v_C = v_0 - 2v_A$	**2**
	Правильно записано уравнение ЗСЭ с учетом связи скоростей	**2**
	Получен правильный численный ответ	**1**
	ВСЕГО	**20**

Задание 2:

Вопрос: Опишите, как строится температурная шкала Цельсия.

Задача: В 5 термосах находилось одинаковое количество мокрого снега (смеси ледяных кристаллов и воды, находящихся в равновесии). В первый термос вылили 100 г кипятка, во второй – 200 г, в третий – 300 г, а в четвертый – 400 г, в пятый – неизвестное количество кипятка. После установления равновесия температура содержимого первого термоса оказалась равна $t_1 = 8°\text{C}$, второго – $t_2 = 31°\text{C}$, а пятого – $t_5 = 0°\text{C}$. Какая температура установилась в третьем и четвертом термосах? Какова максимально возможная масса кипятка, вылитого в пятый термос? Опыт происходил при нормальном атмосферном давлении, теплообменом содержимого термоса с внешними телами можно пренебречь.

Ответ на вопрос: Для измерения температуры тела оно приводится в тепловое равновесие с термометром – стандартным телом с индикацией температуры, проградурованной в соответствии с некоторой температурной шкалой. Для градуировки термометра по шкале Цельсия используются две «реперные» точки: температура плавления льда при нормальном атмосферном давлении принимается за 0°C, а температура кипения воды при нормальном атмосферном давлении принимается за 100°C. Между этими точками шкала разделяется на градусы равномерно, и от них в обе стороны распространяется с таким же шагом.

Решение задачи: Пусть M – масса мокрого снега в каждом термосе, x – массовая доля ледяных кристаллов в нем, а k – количество «порций» кипятка по m = 100 г, вылитое в некоторый из термосов (то есть $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ и так далее, а k_5 неизвестно). Так как в мокром снеге вода и лед находятся в равновесии, то его температура равна 0°C, а температура кипятка $t_0 = 100°\text{C}$. Предположим, что весь лед в некотором термосе растаял полностью. Запишем уравнение теплового баланса для установления равновесия в таком термосе, используя следующие обозначения: λ – удельная теплота плавления льда, c – удельная теплоемкость воды, $y \equiv \dfrac{M}{m}$, $T \equiv x\dfrac{M}{m}\dfrac{\lambda}{c}$. Тогда $\lambda x M + cMt_k = ckm(t_0 - t_k) \Rightarrow t_k = \dfrac{kt_0 - T}{k + y}$. Подставим в полученную формулу значения температур для первых двух термосов:

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{t_0 - T}{1 + y} \\ t_2 = \dfrac{2t_0 - T}{2 + y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_0 - T = t_1(1 + y) \\ 2t_0 - T = t_2(2 + y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{t_0 + t_1 - 2t_2}{t_2 - t_1} = 2 \\ T = \dfrac{t_2(t_0 + t_1) - 2t_1 t_0}{t_2 - t_1} = 76°\text{C} \end{cases}.$$

Таким образом, $t_k = \dfrac{kt_0(t_2 - t_1) + 2t_1 t_0 - t_2(t_0 + t_1)}{k(t_2 - t_1) + t_0 + t_1 - 2t_2} = \dfrac{k \cdot 100°\text{C} - 76°\text{C}}{k + 2}$. Подставляя значения для третьего и четвертого термоса, находим $t_3 = 44{,}8°\text{C}$ и $t_4 = 54°\text{C}$. Так как в пятом термосе $t_5 = 0°\text{C}$, то количества теплоты, отданного кипятком, не хватило, чтобы растопить весь снег (или хватило только на это – на нагрев уже не осталось). Поскольку наше УТБ записано в предположении, что весь лед растаял, получающаяся при нарушении этого предположения температура не должна быть допустимой. Итак, $\dfrac{k_5 t_0 - T}{k_5 + y} \le 0 \Rightarrow k_5 \le \dfrac{T}{t_0} = 0{,}76$. Значит, максимально возможная масса кипятка, вылитого в пятый термос $m_{5\max} = 0{,}76m = 76$ г.

Ответ: $t_3 = 44{,}8°C$, $t_4 = 54°C$, максимально возможная масса кипятка, вылитого в пятый термос, равна 76 г.

Распределение баллов для задачи:

I	Указано и обосновано, что температура мокрого снега равна 0°C	**1+1=2**
	Указано, что температура кипятка равна 100°C	**1**
	Правильно записано уравнение теплового баланса для произвольного термоса	**3**
	Используется анализ зависимости равновесной температуры от количества «порций» кипятка	**4**
II	Правильно определены оба «недостающих» параметра в использованной зависимости	**2+2=4**
	Получен правильный численный ответ для $t_3 = 44{,}8°C$	**2**
	Получен правильный численный ответ для $t_4 = 54°C$	**2**
	Указано, что в 5-м термосе снег растаял не полностью	**1**
	Получен правильный численный ответ для $m_{5\max} = 0{,}76m = 76$ г	**1**
	ВСЕГО	**20**

Задание 3:

Вопрос: Комета вращается по эллиптической орбите, на которой максимальное расстояние до Солнца в 9 раз больше минимального, а минимальная скорость кометы равна 6 км/с. Чему равна максимальная скорость кометы на этой орбите? Ответ обосновать.

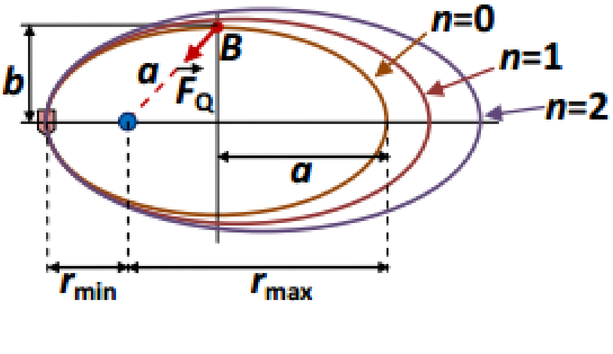
Задача: Положительно заряженный ион движется по эллиптической орбите вокруг маленького отрицательно заряженного шарика. Движение происходит в вакуумной камере большого размера. На первоначальной орбите максимальное расстояние от шарика до иона было в 8 раз больше минимального. Затем в точке орбиты, на которой это расстояние минимально, установили небольшую ускорительную камеру, которая не изменяет направление движения иона, но при каждом прохождении увеличивает его механическую энергию на одну и ту же величину. После первого прохождения камеры соотношение максимального и минимального расстояний между ионом и шариком увеличилось до 9. Каким станет это соотношение после 5-го прохождения ионом ускорительной камеры? После какого по счету прохождения ион не вернется к камере? Потери на сопротивление среды отсутствуют, потерями на излучение пренебречь. Радиусы кривизны эллипса на концах большой (a) и малой (b) полуосей равны $\frac{b^2}{a}$ и $\frac{a^2}{b}$ соответственно.

Ответ на вопрос: Максимальное и минимальное расстояние соответствуют апогелию (афелию) и перигелию орбиты кометы, то есть симметричным точкам эллипса, расположенных на концах его большой оси. Поэтому радиусы кривизны траектории R в этих точках одинаковы. Записав с учетом закона тяготения Ньютона уравнения для центростремительной компоненты ускорения в этих точках, найдем соотношение соответствующих скоростей:

$$\begin{cases} m\dfrac{v_P^2}{R} = \dfrac{GmM}{r_P^2} \\ m\dfrac{v_A^2}{R} = \dfrac{GmM}{r_A^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{v_P}{v_A} = \frac{r_A}{r_P} = \frac{r_{\max}}{r_{\min}} = 9$$

Таким образом, $v_{\max} = 9v_{\min} = 54$ км/с.

Решение задачи: Для начала вспомним определяющее свойство эллипса: сумма расстояний до фокусов эллипса до любой его точки постоянна и равна удвоенной длине большой полуоси. По аналогии с I законом Кеплера понимаем, что заряженный шарик находится в фокусе



эллиптической орбиты иона, и поэтому ясно, что расстояние от шарика до иона при прохождении точки B (находящейся на конце малой полуоси – см. рисунок) равно a. Далее запишем уравнение для центростремительного ускорения иона в точке B, то можно выразить его скорость в этой точке через длину большой полуоси:

$$m\frac{v_B^2}{R_B}=F_n=\frac{kq|Q|}{a^2}\frac{b}{a}\Rightarrow v_B^2=\frac{kq|Q|}{ma}$$

(здесь q и Q – разноименные заряды иона и шарика, и m – масса иона). С другой стороны, постоянная полная энергия иона на данной орбите $E=\frac{mv_B^2}{2}-\frac{kq|Q|}{a}=-\frac{kq|Q|}{2a}$. Как видно, мы можем связать энергию иона с отношением $N\equiv\frac{r_{\max}}{r_{\min}}$: поскольку $2a=r_{\max}+r_{\min}=(N+1)r_{\min}$, то $E=-\frac{kq|Q|}{r_{\min}(N+1)}$. На первоначальной орбите $E_0=-\frac{kq|Q|}{r_{\min}(N_0+1)}=-\frac{kq|Q|}{9r_{\min}}$, так что $\frac{kq|Q|}{r_{\min}}=-9E_0$. После включения ускорительной камеры энергия и орбита иона изменяются, но $r_{\min}$ остается неизменным (ион вылетает из нее перпендикулярно радиусу, так что это точка остается «перигелием» его орбиты). Пусть на каждом прохождении камеры энергия иона увеличивается на ΔE. Тогда после одного прохождения $E_0+\Delta E=-\frac{kq|Q|}{r_{\min}(N_1+1)}=\frac{9}{10}E_0\Rightarrow\Delta E=-\frac{E_0}{10}$, а после n прохождений

$$E_0+n\Delta E=E_0\left(1-\frac{n}{10}\right)=\frac{9E_0}{N_n+1}.$$

Из этого уравнения находим, что $N_n=\frac{80+n}{10-n}$. Как видно, после 5-го прохождения ионом ускорительной камеры $N_5=17$, а $N_{10}=\infty$, то есть после 10 прохождения ускорительной камеры ион перейдет на незамкнутую (на самом деле параболическую) орбиту и не вернется к ускорительной камере.

Ответ: После пятого прохождения ионом ускорительной камеры $N_5=17$, и после десяти прохождений ускорительной камеры ион перейдет на параболическую орбиту и не вернется к ускорительной камере.

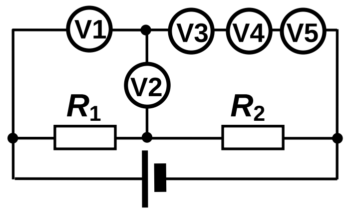
***Распределение баллов для задачи*:**

I	Указано, что заряженный шарик находится в фокусе эллиптической орбиты иона	**1**
	Указано и обосновано, что после прохождения ускорительной камеры $r_{\min}$ не изменяется, а $r_{\max}$ растет	**3**
	Верно записано уравнение для центростремительной компоненты ускорения в «удобной» точке	**2**
	Полная энергия иона на орбите вычисляется по его скорости и положению «удобной» точки	**4**
II	Получена правильная аналитическая связь энергии иона с отношением $N\equiv\frac{r_{\max}}{r_{\min}}$	**3**
	Правильно найден закон изменения этого отношения (получена формула, эквивалентная $N_n=\frac{80+n}{10-n}$)	**3**
	Получен правильный численный ответ $N_5=17$	**2**
	Сделан правильный вывод, что ион не вернется к ускорительной камере после десятого прохождения	**2**
	ВСЕГО	**20**

Задание 4:

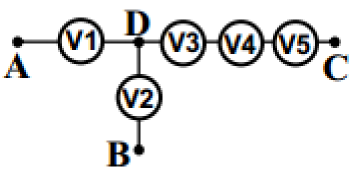
Вопрос: Когда к источнику постоянного напряжения подключили вольтметр, то он показал напряжение (11,765±0,002) В. При подключении к этому источнику двух таких вольтметров, соединенных параллельно, каждый из них показал напряжение (11,538±0,002) В. Найдите отношение внутренних сопротивлений вольтметра и источника и оцените возможную ошибку результата.

Задача: Ученик 9 класса собрал цепь, схема которой показана на рисунке, из аккумулятора, двух резисторов и пяти одинаковых вольтметров. Известно, что вольтметры «практически идеальные», ЭДС источника $\mathcal{E}=14$ В, а его внутреннее сопротивление $r=1$ Ом. Сопротивления резисторов $R_1=5$ Ом и $R_2=4$ Ом. Определите показания всех вольтметров (они показывают напряжения без учета полярности).



Ответ на вопрос: Введем обозначения: пусть U – напряжение, создаваемое источником на своих клеммах при разомкнутой цепи (его ЭДС), r – его внутреннее сопротивление, а R – сопротивление вольтметра. Тогда при подключении одного вольтметра к клеммам источника сила тока через него равна $I=\frac{U}{R+r}$, и напряжение на вольтметре $U_1=\frac{R}{R+r}U=\frac{z}{z+1}U$, где $z\equiv\frac{R}{r}$. При подключении двух вольтметров $U_2=\frac{R/2}{R/2+r}U=\frac{z}{z+2}U$, то есть $\frac{U_1}{U_2}=\frac{z+2}{z+1}\Rightarrow z=\frac{2U_2-U_1}{U_1-U_2}\approx 48{,}828$ (здесь оставлены 5 значащих цифр – как было в данных).
Для оценки точности можно применить, например, «интервальный» метод: взять максимальные и минимальные в пределах ошибки значения U_1 и U_2, получим максимальное и минимальное значение z: $z_{\min}\approx 48{,}939$ и $z_{\max}\approx 50{,}749$. Как видно, отклонения от «среднего» значения примерно равны $\Delta z\approx 0{,}9$, то есть реально ошибка появляется уже в третьей значащей цифре: $\frac{R}{r}\approx 48{,}8\pm 0{,}9$. Такое снижение точности результата по сравнению с точностью данных появилось из-за того, что в вычислениях мы делили на малое число – разность близких величин. В общем случае «интервальный» метод – весьма приблизительный метод оценки погрешностей, но в данном примере он дает разумный результат. Ответ $\frac{R}{r}\approx 49\pm 1$ – тоже вполне приемлемый.

Решение задачи: Ясно, что сопротивление вольтметров значительно превышает сопротивления резисторов и источника, поэтому при расчете сил токов через резисторы токами, текущими через вольтметры, можно пренебречь. Тогда через оба резистора течет ток с силой $I=\frac{\mathcal{E}}{R_1+R_2+r}=1{,}4$ А. При этом напряжение между точками A и B равно $U_{AB}=IR_1=7$ В, а напряжение между точками B и C $U_{BC}=IR_2=5{,}6$ В. Отметим, что



вольтметры одинаковы, а через вольтметры 3-5 течет общий, так что их показания одинаковы. Справедливы следующие условия баланса напряжений: $U_1+U_2=U_{AB}$ и $3U_3-U_2=U_{BC}$. Еще одно уравнение можно получить, вспомнив, что токи (хоть и чрезвычайно малые) через вольтметры все-таки текут, и для них справедливо условие непрерывности в узле D: $I_1=I_2+I_3$ (обратите внимание на «согласование» выбора положительного направления тока и «положительной» полярности для вольтметра 2). Умножив это равенство на сопротивление одного вольтметра, получим $U_1=U_2+U_3$. Решаем полученную систему и находим: $U_1=\frac{4U_{AB}+U_{BC}}{7}=4{,}8$ В, $U_2=\frac{3U_{AB}-U_{BC}}{7}=2{,}2$ В и $U_3=\frac{U_{AB}+2U_{BC}}{7}=2{,}6$ В. Отметим, что $U_2>0$, то есть мы «угадали» полярность, хотя этого и не требовалось.

Ответ: $U_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + r}\dfrac{4R_1 + R_2}{7} = 4{,}8\,\text{В}$, $U_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + r}\dfrac{3R_1 - R_2}{7} = 2{,}2\,\text{В}$ и $U_3 = U_4 = U_5 = \dfrac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + r}\dfrac{R_1 + 2R_2}{7} = 2{,}6\,\text{В}$.

Распределение баллов для задачи:

I	Указано, что при расчете сил токов через резисторы токами, текущими через вольтметры, можно пренебречь	**3**
	Правильно записаны два независимых условия баланса напряжений на вольтметрах	**2+2=4**
	Используется условие непрерывности тока в узле D	**3**
II	Правильно определены значения $U_{AB} = 7\,\text{В}$ и $U_{BC} = 5{,}6\,\text{В}$	**2+2=4**
	Получены правильные аналитический и численный ответы для U_1	**1+1=2**
	Получены правильные аналитический и численный ответы для U_2	**1+1=2**
	Получены правильные аналитический и численный ответы для $U_3 = U_4 = U_5$	**1+1=2**
	ВСЕГО	**20**