ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!» ПО ФИЗИКЕ.
2021/22 учебный год, ЗАДАНИЕ ЗАОЧНОГО ТУРА. 7,8 и 9 классы.

ВОЗМОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ, ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ.

Задание отборочного тура состояло из части I (задания со случайно варьируемыми числовыми данными, проверялись только ответы) и творческой части II (одинаковые условия для всех участников, проверялись и оценивались решения).

Часть I (пример варианта).

Вопрос 1 (8 баллов):
От водопада Гремячий до смотровой площадки перед скальным утесом можно добраться двумя путями – по дороге длиной 7 км и по тропе через лес длиной 14 км. У водопада отряд школьников разделился на две группы: первая пошла по лесной тропе, вторая – по дороге. Группы вышли от водопада одновременно, и через минуту после выхода один из участников группы, идущей по дороге, запустил квадрокоптер, который полетел к первой группе, пролетел над участком тропы, на котором эта группа находилась и вернулся ко второй группе. Далее он, не снижаясь, пролетел над второй группой и полетел к первой. И так вплоть до остановки групп на привал квадрокоптер летал между ними, по очереди пролетая над обеими группами. Тем временем вторая группа дошла до обзорной площадки, свернула на тропу и пошла навстречу первой группе. Они встретились на красивой поляне, где и сделали привал, а еще через минуту квадрокоптер опустился на той же поляне. Известно, что по тропе обе группы двигались с одинаковыми скоростями, а по дороге вторая группа двигалась в два раза быстрее. Квадрокоптер все время летал с постоянной скоростью, которая в два раза больше скорости, с которой вторая группа шла по дороге. Определите путь квадрокоптера от момента вылета до момента посадки. Ответ запишите в км, с точностью до целого значения, без указания единиц измерения.

Комментарий: Группы шли по тропе некоторой скоростью V и по дороге со скоростью $2V$. Группа 2 в прошла 7 км по дороге за время $\frac{7\text{км}}{2V}$, а первая группа за это время прошла 3,5 км. Поэтому до привала группы вместе прошли 10,5 км за время $\frac{10{,}5\text{км}}{2V}$. Полет квадрокоптера со скоростью $4V$ продолжался ровно столько же времени, сколько шли группы до привала, то есть $\frac{(7+10{,}5)\text{км}}{2V}=\frac{17{,}5\text{км}}{2V}$. Поэтому путь квадрокоптера $\frac{17{,}5\text{км}}{2V}\cdot 4V=35\text{км}$.

Ответ: 35.

Вопрос 2 (8 баллов):
В термосе находится мокрый снег, состоящий на 73 % (по объему) из кристаллов льда и на 27% из воды, находящихся в равновесии. Снег заполняет термос наполовину. В термос медленно доливают кипяток до тех пор, пока он не будет заполнен полностью. Какая температура будет у содержимого термоса после установления равновесия? Используйте следующие значения характеристик веществ: плотность льда равна 900 кг/м^3, плотность воды – 1000 кг/м^3, удельная теплота плавления льда λ = 336 кДж/кг, удельная теплоемкость воды c = 4,2 кДж/(кг·°С). Теплообменом с окружающими телами и теплоемкостью колбы термоса пренебречь. Ответ запишите в градусах по шкале Цельсия, с точностью до десятых, без указания единиц измерения.

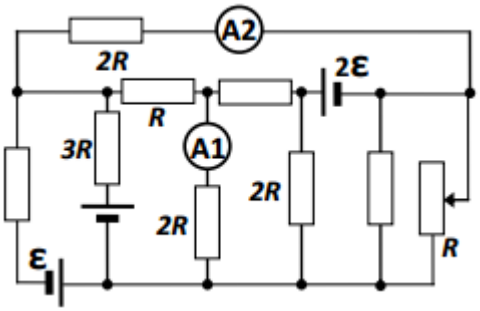
Комментарий: В процессе доливания кипятка лед будет таять, и занимаемый им объем будет уменьшатся (при одинаковой массе, как следует из соотношения плотностей, объем

воды составляет 0,9 от объема растаявшего льда). Пусть V – объем термоса, а k – объемная доля льда в мокром снеге. Тогда начальный объем льда равен $\frac{k}{2}\cdot V$, а воды – $\frac{1-k}{2}\cdot V$. Предположим, что к моменту заполнения термоса весь лед растает. Тогда объем долитого кипятка (ΔV) определяется из соотношения $V=\frac{1-k}{2}\cdot V+0{,}9\frac{k}{2}\cdot V+\Delta V$, из которого следует, что $\Delta V=\frac{1+0{,}1k}{2}V$. Теперь запишем уравнение теплового баланса для установления равновесия: количество теплоты, отданное кипятком, равно сумме количеств тепла, израсходованных на плавление льда и на нагрев воды, полученной из мокрого снега (при этом учтем, что температура кипятка равна 100°C, а температура мокрого снега равна 0°C): $c\cdot\rho_B\cdot\Delta V(100^\circ\text{C}-t)=\lambda\cdot\rho_Л\cdot\frac{k}{2}V+c\cdot\left(\rho_B\frac{1-k}{2}\cdot V+\rho_Л\cdot\frac{k}{2}V\right)\cdot t$. С учетом найденной величины ΔV и того, что для данных условия $\frac{\lambda}{c}=80^\circ\text{C}$, получаем: $t=50^\circ\text{C}-31^\circ\text{C}\cdot k$. Температура при любом $k\le 1$ получилась положительной, так что наше предположение (что весь лед растаял) оправдалось. Для предложенного варианта $t\approx 27{,}4^\circ\text{C}$.

Ответ: 27,4.

Вопрос 3 (9 баллов):

В схеме, показанной на рисунке, номиналы части элементов утеряны. Передвигая движок реостата, следят за показаниями амперметров. Например, когда первый амперметр показывал силу тока 0,45 А, второй амперметр показывал 2,20 А. При другом положении реостата первый амперметр показывал 0,42 А, а второй 2,50 А. Наконец, при третьем положении реостата первый амперметр показывает 0,38 А. Каковы при этом показания второго амперметра? Ответ запишите в А, с точностью до сотых, без указания единиц измерения.



Комментарий: Величины N сил токов в ветвях любой схемы из источников и резисторов являются решением линейной системы N уравнений (уравнений баланса напряжений и непрерывности токов). При изменении одного параметра схемы, входящего в выражения для любых двух величин сил токов I_1 и I_2, можно исключить его из двух соответствующих уравнений, и получить линейную связь между I_1 и I_2: $I_2=aI_1+b$., где коэффициенты будут постоянны для данной схемы при изменении одного из ее параметров. Таким образом, для нашей схемы

$$\left\{\begin{matrix}2{,}20\text{A}=a+b\cdot 0{,}45\text{A}\\2{,}50\text{A}=a+b\cdot 0{,}42\text{A}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}a=6{,}7\text{ A}\\b=-10\end{matrix}\right..$$

Следовательно, при $I_1=0{,}38\text{ A}$ получаем $I_2=2{,}90\text{A}$.

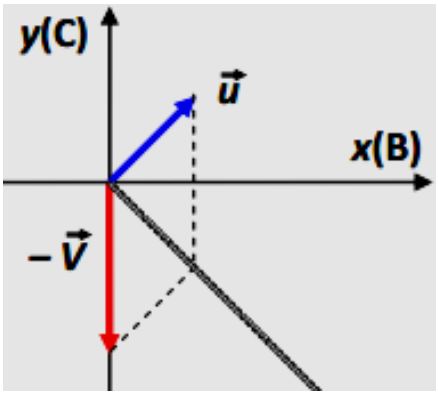
Ответ: 2,90.

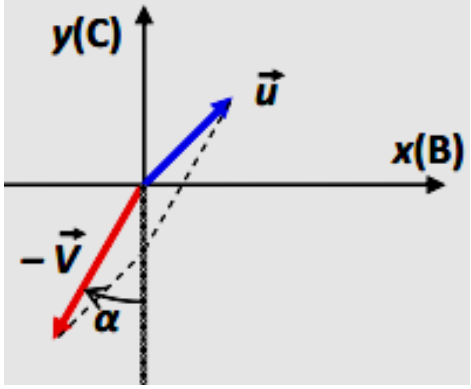
Часть II.

1. («**Куда дует ветер?**», 12 баллов) Теплоход двигался по морю, держа курс строго на север. При этом «хвост» дыма от его трубы вытянулся вдоль прямой линии, идущей от теплохода строго на юго-восток. Когда теплоход изменил свой курс, повернув на угол $\alpha = 30°$ к востоку, то линия дыма после поворота стала уходить от теплохода на юг. Отметим, что ветер не изменялся в течение всего времени наблюдений. Также постоянной оставалась и величина скорости теплохода. Определите направление ветра. Во сколько раз величина скорости ветра отличается от величины скорости теплохода?

Возможное решение:

Обозначим величину скорости ветра символом u, а величину скорости теплохода – символом V. В первую очередь нужно отметить, что шлейф дыма вытягивается в направлении скорости ветра относительно теплохода, то есть вдоль вектора $\vec{u} - \vec{V}$. Поэтому, построив примерную диаграмму для первого случая (теплоход движется на север, шлейф вытягивается на юго-восток), и используя систему координат, в которой ось *x* направлена на восток, а ось *y* – на север, замечаем, что должно быть выполнено требование





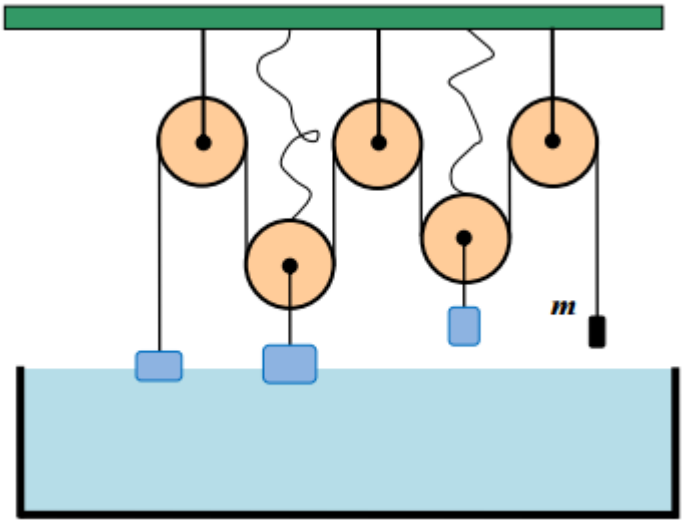
$u_y - V_y = -(u_x - V_x)$, то есть $u_x + u_y = V$. Аналогичное построение для второго случая (после поворота теплохода) демонстрирует нам, что должно выполняться требование $-V\sin(\alpha) + u_x = 0$. Из двух полученных уравнений находим, что $u_x = V\sin(\alpha) = \frac{V}{2}$ и $u_y = V[1 - \sin(\alpha)] = \frac{V}{2}$. Это означает, что ветер дует с юго-запада, и его скорость $u = \frac{V}{\sqrt{2}}$, то есть она в $\sqrt{2}$ раз меньше скорости теплохода.

ОТВЕТЫ: Ветер – юго-западный, его скорость в $\sqrt{2}$ раз меньше скорости теплохода.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

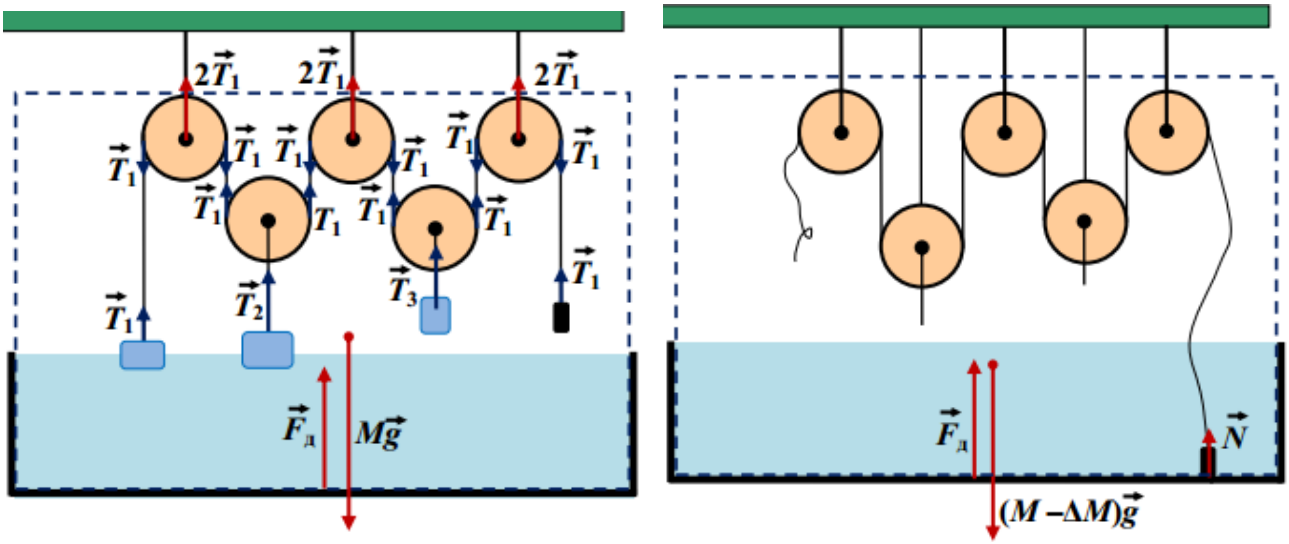
действие	**макс.балл**
Указано (используется в решении), что шлейф дыма вытягивается в направлении скорости ветра относительно теплохода, то есть вдоль вектора $\vec{u} - \vec{V}$.	**3**
Есть правильная векторная диаграмма (либо правильная запись соотношений для проекций векторов $\vec{u}$, $\vec{V}$ и $\vec{u} - \vec{V}$) для первого случая.	**2**
Есть правильная векторная диаграмма (либо правильная запись соотношений для проекций векторов $\vec{u}$, $\vec{V}$ и $\vec{u} - \vec{V}$) для второго случая.	**2**
Верно определено направление скорости ветра	**3**
Верно найдено отношение скоростей ветра и теплохода.	**2**
ВСЕГО	**12**

2. («**До краев**», 15 баллов) С помощью системы блоков над большой открытой сверху емкостью с водой подвешены три ледяных брикета и небольшой груз массой $m = 50$ г (см. рисунок). Изначально система находится в равновесии, причем два брикета плавают в воде, а третий висит над поверхностью воды, как и груз. В этом положении вода заполняет сосуд по края. Известно, что груз изготовлен из сплава, плотность которого в $n = 5$ раз больше плотности воды. Все нити в системе можно считать невесомыми и нерастяжимыми, все блоки – невесомые и не имеют трения в осях. Подвижные блоки «пристрахованы» невесомыми нитями, которые не позволяют этим блокам опуститься в сосуд даже при полной разгрузке системы блоков. Далее система медленно прогревается, и весь лед постепенно тает, груз медленно опускается в воду (брызг или волн, бегущих по поверхности воды, при этом не возникает). Выливающаяся через край сосуда вода покидает систему и больше не оказывает влияния на нее. Найдите массу воды, которая выльется из сосуда за все время таяния льда.



Возможное решение:

Сначала рассмотрим равновесие системы в начальном состоянии, когда таяние льда еще не началось. Из условия равновесия груза ясно, что сила натяжения нити $T_1 = mg$. Укажем все



внешние силы, действующие на выделенную систему (вода в сосуде + все ледяные брикеты + груз + все блоки): сила тяжести, сила реакции дна сосуда, силы натяжения трех нитей, прикрепленных к «потолку» (красные стрелки, левый рисунок). Отдельно (синие стрелки) частично указаны силы натяжения нитей – в качестве иллюстрации, объясняющей их значения. Так как в состоянии равновесия векторная сумма внешних сил должна равняться нулю, то $6T_1 + F_д = Mg$. Учтем величину силы натяжения нити и то, что сила реакции дна равна силе давления воды на дно, то есть $F_д = \rho_0 SHg$,(где ρ_0 – плотность воды, H и S – высота и площадь дна сосуда) и найдем из этого уравнения, что $M = 6m + \rho_0 SH$.

Проведем аналогичные рассуждения для конечного состояния равновесия системы, когда весь лед уже растаял (правый рисунок). Теперь нить практически не натянута, высота столба воды осталась прежней, а размерами площади опоры груза можно пренебречь по сравнению

с площадью дна сосуда. Сила реакции дна, действующая на груз, может найдена из условия равновесия груза: $N = mg - F_A = mg - \rho_0 \frac{m}{\rho} g = \frac{n-1}{n} mg$. Здесь $\rho = n \cdot \rho_0$ – плотность материала груза. Масса нашей системы уменьшилась на ΔM за счет выливания воды из сосуда, так что $N + F_д = (M - \Delta M)g \Rightarrow M - \Delta M = \frac{n-1}{n} m + \rho_0 SH$. Вычитая это соотношение из полученного при анализе начального состояния, находим, $\Delta M = \frac{5n+1}{n} m = \frac{26}{5} m = 260$г.

ОТВЕТ: $\Delta M = \frac{5n+1}{n} m = \frac{26}{5} m = 260$г.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	**макс.балл**
Правильно записано условие равновесия груза в начальном состоянии	**1**
Правильно найдена сила натяжения нити, на которой подвешен груз	**1**
Правильно найдены силы натяжения всех нитей, используемые в решении	**1**
Правильно записано условие равновесия «системы», **либо** правильно записано выражение для объема под поверхностью жидкости через начальную массу жидкой воды, массы плавающих ледяных брикетов и массу груза	**2**
Получена формула, эквивалентная* $M = 6m + \rho_0 SH$.	**2**
Правильно записано условие равновесия груза в конечном состоянии	**1**
Правильно найдена сила реакции дна, действующая на груз	**1**
Указано (используется в решении), что сила реакции дна, действующая на воду, практически не изменилась.	**1**
Правильно записано условие равновесия «системы», **либо** правильно записано выражение для объема под поверхностью жидкости через конечную массу жидкой воды в сосуде и массу груза	**1**
Получена формула, эквивалентная* $M - \Delta M = \frac{n-1}{n} m + \rho_0 SH$.	**2**
Правильно найдена масса вылившейся воды	**2**
ВСЕГО	**15**

*Засчитываются две любые правильные формулы, из которых можно (без использования каких-либо отсутствующих в решении участника соотношений) найти ответ для массы вылившейся воды.

3.(«**Управляемый нагрев**», 24 балла) Лабораторная электроплитка работает от источника постоянного напряжения. Регулировка мощности плитки производится с помощью регулятора напряжения источника – на панели источника есть регулятор и цифровой датчик выходного напряжения, причем максимальное возможное напряжение равно $U_m = 200$В. Известно, что сопротивление спирали плитки довольно существенно зависит от ее температуры. Было установлено, что при выходном напряжении источника $U_1 = 100$В выделяемая плиткой в установившемся режиме тепловая мощность равна $P_1 = 854$Вт. При повышении выходного напряжения до $U_2 = 150$В эта мощность увеличивается до $P_2 = 1869$Вт. Какова максимальная возможная мощность тепловыделения этой плитки в установившемся режиме? Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением

подводящих проводов можно пренебречь по сравнению с сопротивлением спирали плитки. Можно также считать, что поток тепла от спирали плитки с хорошей точностью пропорционален разности температур спирали и окружающей среды, которая практически неизменна.

Возможное решение:

Пусть t_0 – температура окружающей среды, а коэффициент пропорциональности между потоком тепла от спирали плитки и разностью температур обозначим κ. Температура спирали t при заданном напряжении источника U определяется из условия теплового баланса $\frac{U^2}{R} = \kappa(t - t_0)$. Зависимость сопротивления спирали от температуры описывается соотношением $R(t) = R_0(1 + \alpha t)$, где зависящая от материала спирали константа α называется температурным коэффициентом сопротивления. Выразим из этого соотношения $t = \frac{R - R_0}{\alpha R_0}$ и запишем уравнение баланса в виде $\frac{\alpha R_0}{\kappa} U^2 = R[R - R_0(1 + \alpha t_0)]$. Для сокращения записей введем обозначение $\overline{R} \equiv R_0(1 + \alpha t_0)$, и найдем зависимость сопротивления спирали от напряжения источника как положительный корень получившегося квадратного уравнения: $R = \frac{\overline{R}}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{4\alpha R_0}{\kappa \overline{R}^2} U^2}\right]$. Следовательно, зависимость мощности тепловыделения от напряжения источника описывается выражением $P = \frac{2U^2}{\overline{R}}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{4\alpha R_0}{\kappa \overline{R}^2} U^2}\right]^{-1}$. Удобно ввести безразмерный параметр $x \equiv \frac{U}{U_m}$, безразмерную константу $A \equiv \frac{4\alpha R_0 U_m^2}{\kappa \overline{R}^2} = \frac{4\alpha U_m^2}{\kappa R_0 (1 + \alpha t_0)^2}$ – комбинацию параметров системы, и константу размерности мощности $\overline{P} \equiv \frac{2U_m^2}{\overline{R}} = \frac{2U_m^2}{R_0(1 + \alpha t_0)}$. Тогда эта зависимость переписывается в виде $P = \overline{P} \frac{x^2}{1 + \sqrt{1 + Ax^2}}$. Две точки этой зависимости нам известны: при $x_1 = \frac{1}{2}$ мощность равна $P_1 = \overline{P} \frac{1}{2(2 + \sqrt{4 + A})}$, а при $x_2 = \frac{3}{4}$ мощность $P_2 = \overline{P} \frac{9}{4(4 + \sqrt{16 + 9A})}$. Разделив эти соотношения друг на друга, получаем уравнение для определения константы A: $\frac{9P_1}{4P_2} = \frac{183}{178} = \frac{1 + \sqrt{1 + 9A/16}}{1 + \sqrt{1 + A/4)}} \approx 1{,}028$. Это уравнение можно решить точно, но проще сразу заметить, что отличие от 1 здесь очень мало, и поэтому $\frac{1 + \sqrt{1 + 9A/16}}{1 + \sqrt{1 + A/4)}} \approx 1 + \frac{5}{64} A$, то есть $A \approx \frac{32}{89} \approx 0{,}36$. Значит, $P \approx \overline{P} \frac{x^2}{1 + \sqrt{1 + 0{,}36 \cdot x^2}}$. Теперь по любому из двух известных значений можно определить $\overline{P}$: $\overline{P} \approx 4[1 + \sqrt{1{,}09}]P_1 \approx 6982$ Вт. Итак, $P \approx \frac{6982 x^2}{1 + \sqrt{1 + 0{,}36 \cdot x^2}}$ Вт, максимальное значение достигается при максимальном напряжении $U = U_m$, то есть при $x = 1$: $P_m \approx 3225$ Вт.

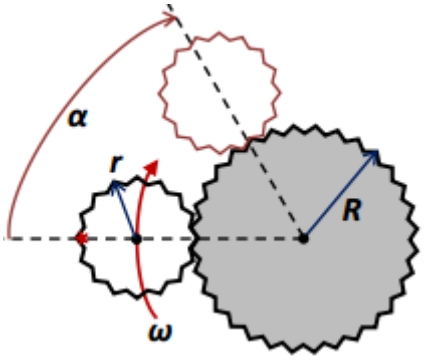
Комментарий: Для точного расчета можно ввести переменную $y \equiv \sqrt{1+A/4}$, и тогда $\sqrt{1+9A/16} = \sqrt{9y^2-5}/2$. Уравнение на y имеет вид $\frac{2+\sqrt{9y^2-5}}{2(1+y)} = \frac{183}{178}$ и приводится к квадратному уравнению $1260y^2 - 61y - 1321 = 0$. Его положительный корень $y = \frac{1321}{1260}$ приводит к значению $A = \frac{157441}{396900} \approx 0{,}397$, то есть ошибка «упрощенного» подхода здесь около 10%. Значение $\overline{P}$ с точностью до сотых долей $\overline{P} = 4[1+\sqrt{1+A}]P_1 \approx 6997{,}38\text{Вт}$, и максимальная мощность плитки в Вт с точность до целого значения $P_m \approx 3207\text{Вт}$. Как видно, ошибка конечного результата оказалась значительно меньше (менее 1%).

ОТВЕТ: $P_m \approx 3207\text{Вт}$.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	**макс.балл**
Указано (используется в решении), что зависимость сопротивления спирали от температуры описывается соотношением вида $R(t) = R_0(1+\alpha t)$	**1**
Правильно записано уравнение теплового баланса	**2**
Получена правильная зависимость температуры или сопротивления спирали от напряжения источника	**3**
Зависимость мощности плитки от напряжения источника записано в виде, эквивалентном $P = \frac{2U^2}{\overline{R}}\left[1+\sqrt{1+\frac{4\alpha R_0}{\kappa \overline{R}^2}U^2}\right]^{-1}$	**3**
Используется процедура определения констант в этой зависимости по двум точкам	**1**
Найдены обе независимые константы в этой зависимости	**2×3=6**
Получено корректная формула, описывающая зависимость мощности плитки от напряжения источника с точностью не хуже 10%.	**4**
Получен численный ответ в интервале **3190 – 3230 Вт**	**4**
ВСЕГО	**24**

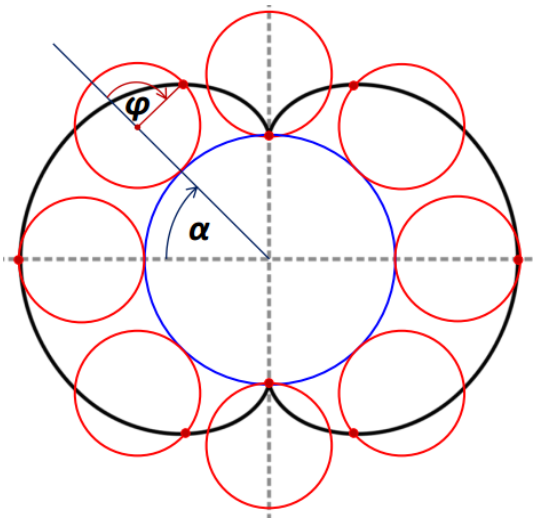
4.(«**Замечательная кривая**», 24 балла) Однажды некий девятиклассник, прочитав статью «Замечательные кривые», решил построить одну и них. Закрепив на горизонтальном листе шестеренку радиуса $R = 6\text{см}$ с мелкими зубчиками, он с помощью электромотора и специального привода стал прокатывать по ней шестеренку вдвое меньшего радиуса $r = 3\text{см}$ с постоянной угловой скоростью вращения оси подвижной шестеренки вокруг неподвижной, равной $\omega = 5\text{с}^{-1}$. При этом специальная меленькая метка на краю одного из зубчиков «рисовала» на листе свою траекторию. Изобразите эту траекторию. Определите величины скорости и ускорения метки в тот момент, когда она находится на



максимальном расстоянии от оси неподвижной шестеренки (см. рисунок). В дополнение найдите величины скоростей и ускорений, а также радиусы кривизны траектории метки в точке, соответствующей положению подвижной шестеренки, в котором направление на ее ось от оси неподвижной повернулось на угол $\alpha = 60°$ от положения с максимальным удалением метки.

Возможное решение:

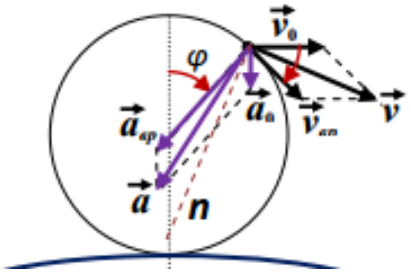
Начнем с построения траектории метки. Зацепление зубцов шестеренок обеспечивает отсутствие проскальзывания. Следовательно, длины дуг прокатившихся друг по другу «малой» и «большой» окружностей равны: если направление на ось подвижной шестеренки от оси неподвижной повернулось на угол α от положения с максимальным удалением метки, то сама метка повернулась от радиуса, проведенного от оси неподвижной шестеренки на угол φ (см. рисунок), определяемый из соотношения $\varphi \cdot r = \alpha \cdot R$, то есть $\varphi = \frac{R}{r}\alpha = n\alpha$,



где введено обозначение $n \equiv \frac{R}{r}$. При $n = 2$ получаем $\varphi = 2\alpha$, и поэтому за каждый оборот центра подвижной шестеренки вокруг неподвижной метка совершает два оборота относительно радиуса – дважды уходит на максимальное расстояние и дважды касается поверхности неподвижной шестеренки. Кроме того, в точках касания неподвижной шестеренки отсутствие проскальзывания будет означать, что мгновенная скорость метки в этих точках обращается в ноль – траектория перпендикулярна поверхности неподвижной шестеренки. Из этих (или подобных) рассуждений ясно, что траектория метки имеет вид, показанный на рисунке. Эту «замечательную кривую» в геометрии называют «*нефроида*». Для исследования кинематических характеристик движения удобно заметить, что движение метки можно рассматривать как комбинацию двух равномерных вращений: (1) вращение центра подвижной шестеренки вокруг центра неподвижной с постоянной угловой скоростью ω по окружности радиуса $R + r = \frac{n+1}{n}R$ и (2) вращение метки вокруг центра подвижной шестеренки с постоянной угловой скоростью Ω по окружности радиуса $r = \frac{1}{n}R$. Угловую скорость второго вращения можно найти все из того же условия отсутствия проскальзывания: скорость метки в точках касания шестеренок, равная разности линейных скоростей вращения, должна быть равна нулю: $\omega(R+r) - \Omega r = 0 \Rightarrow \Omega = (n+1)\omega$. Тогда скорость метки в точках наибольшего удаления ее от оси неподвижной шестеренки, равная сумме линейных скоростей вращений, равна $v_m = 2\omega(R+r) = 2\frac{n+1}{n}\omega R$. Для данных задачи $v_m = 0{,}9$ м/с. Ускорение метки в этих точках тоже определяется как сумма двух центростремительных ускорений, которые оказываются сонаправлены: $a_m = \omega^2(R+r) + \Omega^2 r = \frac{(n+1)(n+2)}{n}\omega^2 R = 9$ м/с^2.

Теперь рассмотрим движение метки в окрестности момента времени, когда направление на ось подвижной шестеренки от оси неподвижной повернулось на угол $\alpha = 60°$ от положения

с максимальным удалением метки. Ясно, что скорость центра подвижной шестеренки по-прежнему направлена перпендикулярно радиусу вращения, а направление скорости метки повернулась от этого направления на угол $\varphi = n\alpha$. Поэтому вектор скорости метки равен сумме векторов с одинаковым модулем $\omega(R+r) = \dfrac{n+1}{n}\omega R$, угол между которыми $\varphi = n\alpha$. Ясно, что модуль суммарного вектора $v(\alpha) = 2\dfrac{n+1}{n}\omega R\left|\cos\left(\dfrac{n\alpha}{2}\right)\right| = 0{,}45$ м/с. Точно также ускорения этих составляющих движений, которые в точке максимального удаления были сонаправлены, теперь образуют угол $\varphi = n\alpha$ при тех же модулях $\omega^2(R+r) = \dfrac{n+1}{n}\omega^2 R$ и $\Omega^2 r = \dfrac{(n+1)^2}{n}\omega^2 R$. Значит, величина ускорения (согласно теореме косинусов):



$$a(\alpha) = \sqrt{\omega^4(R+r)^2 + \Omega^4 r^2 + 2\omega^2\Omega^2(R+r)r\cos(\varphi)} = \frac{n+1}{n}\omega^2 R\sqrt{1+(n+1)^2+2(n+1)\cos(n\alpha)}.$$

Для нашей задачи $a(\alpha) = 3\omega^2 R\sqrt{\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}\cos(2\alpha)} \approx 5{,}95$ м/с^2. Для определения радиуса кривизны траектории метки в этой точке можно воспользоваться формулой $R_K = \dfrac{v^2}{a_n}$, но для этого нам необходимо найти центростремительную (перпендикулярную скорости) компоненту ее ускорения $a_n = \dfrac{n+1}{n}\omega^2 R\left|\cos\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)+(n+1)\cos\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)\right| = \dfrac{(n+1)(n+2)}{n}\omega^2 R\left|\cos\left(\dfrac{n\alpha}{2}\right)\right|$ (ось нормали проходит по биссектрисе угла, образованного ускорениями движений (1) и (2)). Таким образом, $R_K = \dfrac{4(n+1)}{n(n+2)}\left|\cos\left(\dfrac{n\alpha}{2}\right)\right|R = \dfrac{3}{4}R = 4{,}5$ см.

ОТВЕТЫ: траектория – на рисунке, $v_m = 2\dfrac{n+1}{n}\omega R = 0{,}9$ м/с, $a_m = \dfrac{(n+1)(n+2)}{n}\omega^2 R = 9$ м/с^2,

$v(\alpha) = 2\dfrac{n+1}{n}\omega R\left|\cos\left(\dfrac{n\alpha}{2}\right)\right| = 0{,}45$ м/с, $\quad a(\alpha) = 3\omega^2 R\sqrt{\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}\cos(2\alpha)} \approx 5{,}95$ м/с^2,

$R_K = \dfrac{4(n+1)}{n(n+2)}\left|\cos\left(\dfrac{n\alpha}{2}\right)\right|R = 4{,}5$ см.

Примечание: К сожалению, в опубликованном условии оказалась опечатка – там было написано «шестеренку вдвое меньшего радиуса $r = 5$ см». Поэтому участники могли решать задачу как для «авторского» соотношения радиусов $n \equiv \dfrac{R}{r} = 2$, так и для $n = \dfrac{6}{5}$. Как видно из решения, его можно вообще построить в общем виде – схема расчетов не зависит от конкретного значения n. Самое существенное отличие возникает при изображении формы траектории – при $n = \dfrac{6}{5}$ она более сложная (ясно, что эта кривая шесть раз касается поверхности неподвижной шестеренки на пяти оборотах). Жюри при оценке решений допускала оба варианта, и не требовало точного построения траектории: оценивалось наличие основных характерных особенностей кривой – правильное расположение точек касания и точек наибольшего удаления.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	**макс.балл**
Правильно изображена траектория метки: • правильный общий вид кривой – нужное количество «арок» между точками касания, замкнутость; • правильный угловой размер «арки» эпициклоиды (180° для $n=2$ и 300° для $n=1{,}2$); • есть правильные «изломы» в точках касания.	**2+2+1=5**
Записана (используется в решении) правильная связь улов поворота ($\varphi = n\alpha$) в общем виде или для выбранного *n*.	**2**
Используется идея комбинирования двух равномерных вращений для описания движения метки.	**2**
Найдена (используется в решении) правильная связь угловых скоростей комбинируемых вращений – в общем виде или для выбранного *n*.	**2**
Правильно найдена величина скорости метки в максимально удаленной точке ($v_m = 0{,}9$ м/с для $n=2$ и $v_m = 1{,}1$ м/с для $n=1{,}2$)	**2**
Правильно найдена величина ускорения метки в максимально удаленной точке ($a_m = 9$ м/с^2 для $n=2$ и $a_m = 8{,}8$ м/с^2 для $n=1{,}2$)	**2**
Правильно найдена величина скорости метки в точке с $\alpha = 60°$ ($v = 0{,}45$ м/с для $n=2$ и $v \approx 0{,}89$ м/с для $n=1{,}2$)	**2**
Правильно найдена величина ускорения метки в точке с $\alpha = 60°$ ($a \approx 5{,}95$ м/с^2 для $n=2$ и $a \approx 7{,}38$ м/с^2 для $n=1{,}2$)	**3**
Правильно найден радиус кривизны траектории в точке с $\alpha = 60°$ ($R_K = 4{,}5$ см для $n=2$ и $R_K \approx 11{,}1$ см для $n=1{,}2$)	**4**
ВСЕГО	**24**