

Отборочный этап олимпиады «Покори Воробьёвы горы!» по математике длился 24 часа. Он состоял из блиц-тура (6 задач, ответы к которым нужно отправить в течение 3 часов) и творческой части (3 задачи, полное решение которых нужно отправить в течение оставшегося времени).

Отборочный этап. Блиц-тур

Каждый участник блиц-тура получал свой набор задач, отличающийся от наборов задач других участников. Приводим типичный набор из шести задач блиц-тура.

1. Решите неравенство $\frac{\sqrt{\frac{x}{\gamma} + (\alpha+2) - \frac{x}{\gamma}} - \alpha}{x^2 + ax + b} \geq 0$.

В ответе укажите число, равное количеству целых корней данного неравенства. Если целых корней нет, либо корней бесконечно много, в бланке ответов укажите цифру 0.

$$\alpha = 3, \gamma = 1, a = -15, b = 54.$$

Ответ: 7.

Решение. С учетом заданных числовых значений, решаем неравенство:

$$\frac{\sqrt{x+5} - x - 3}{x^2 - 15x + 54} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+5} - x - 3}{(x-6)(x-9)} \geq 0.$$

Так как $\sqrt{x+5} \geq x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq -3, \\ x+5 \geq (x+3)^2, \end{cases}$ то выражение в числителе неотрицательно при $x \in [-5; -1]$, и отрицательно при $x > -1$.

Также справедливо $x^2 - 15x + 54 < 0$ при $x \in (6; 9)$, а иначе это выражение неотрицательно.

Поэтому $x \in [-5; -1] \cup (6; 9)$, и целых корней будет $5 + 2 = 7$.

2. Решите уравнение $\cos 2x + \cos 6x + 2\sin^2 x = 1$.

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A , при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

$$A = \left[\frac{m\pi}{6}; \frac{(m+1)\pi}{6} \right], m = 5.$$

Ответ: 2,88 (точное значение: $\frac{11\pi}{12}$).

Решение. Поскольку $\cos 2x + 2\sin^2 x = 1$, то исходное уравнение равносильно $\cos 6x = 0$. Из всех корней серии $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}$ на отрезок $A = \left[\frac{5\pi}{6}; \pi \right]$ попадает один корень $x = \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{6} = \frac{11\pi}{12}$.

3. Из точки M , лежащей внутри треугольника ABC , на стороны BC , AC , AB проведены перпендикуляры, длины которых равны k , l и m соответственно. Найдите площадь треугольника ABC , если $\angle CAB = \alpha$ и $\angle ABC = \beta$. В случае, если ответ будет нецелым, округлите его до ближайшего целого.

$$\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{\pi}{4}, k = 3, l = 2, m = 4.$$

Ответ: 67.

Решение. Обозначив стороны треугольника через a, b, c , с помощью теоремы синусов получим $S = \frac{ka+lb+mc}{2} = R(k \sin \alpha + l \sin \beta + m \sin \gamma)$.

Так как, кроме того, $S = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$, то можем выразить $R = \frac{k \sin \alpha + l \sin \beta + m \sin \gamma}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}$.

Поэтому $S = \frac{(k \sin \alpha + l \sin \beta + m \sin \gamma)^2}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}$.

После подстановки числовых значений $k, l, m, \alpha, \beta, \gamma$ получаем

$$S = \frac{(3 \sin \alpha + 2 \sin \beta + 4 \sin \gamma)^2}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} = \frac{(3 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{6})^2}{\sqrt{3} + 1} \approx 67.$$

4. Решите систему

$$\begin{cases} x^3 + 3y^3 = 11, \\ x^2y + xy^2 = 6. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $\frac{x_k}{y_k}$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них минимальное. В ответе укажите найденное минимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: $-1,31$ (точное значение: $-\frac{1+\sqrt{217}}{12}$).

Решение. Умножим первое уравнение на 6, второе на (-11) и сложим:

$$6x^3 - 11x^2y - 11xy^2 + 18y^3 = 0.$$

Поделив обе части на y^3 и обозначив $t = \frac{x}{y}$, получим:

$$6t^3 - 11t^2 - 11t + 18 = 0 \Leftrightarrow (t - 2)(6t^2 + t - 9) = 0.$$

Отсюда $t_1 = 2, t_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{217}}{12}$.

Минимальное значение $\frac{x_k}{y_k}$ равно $-\frac{1+\sqrt{217}}{12} \approx -1,31$.

5. Имеется два сплава. Первый сплав содержит p % примесей, а второй – соответственно q % примесей. Определите, в какой пропорции следует соединить эти сплавы, чтобы получился новый сплав, в котором содержится r % примесей. В ответе укажите отношение массы первого сплава к массе второго в виде десятичной дроби, округлив ее при необходимости до двух знаков после запятой.
 $p = 70, q = 5, r = 40$.

Ответ: $1,17$ (точный ответ: $\frac{7}{6}$).

Решение. Пусть масса второго сплава равна a (кг, г, т или любая другая единица массы), а масса первого равна $x \cdot a$ (тех же единиц). Тогда x есть искомая величина.

По условию задачи масса всех примесей равна $\frac{xa \cdot p}{100} + \frac{a \cdot q}{100}$. С другой стороны, эта же масса равна $\frac{(xa+a) \cdot r}{100}$. Значит, $\frac{xa \cdot p}{100} + \frac{a \cdot q}{100} = \frac{(xa+a) \cdot r}{100} \Leftrightarrow x \cdot p + q = (x+1) \cdot r \Leftrightarrow x = \frac{r-q}{p-r}$.

При данных числовых значениях $x = \frac{40-5}{70-40} = \frac{7}{6} \approx 1,17$.

6. Найдите все целые значения a , не превосходящие по абсолютной величине 15, при каждом из которых неравенство

$$\frac{4x - a - 4}{6x + a - 12} \leq 0$$

выполняется при всех x из промежутка $[2; 3]$. В ответе укажите сумму всех таких a .

Ответ: -7 .

Решение. Решая неравенство методом интервалов, получим, что его левая часть равна 0 при $x = 1 + \frac{a}{4}$ и не определена при $x = 2 - \frac{a}{6}$. Эти два значения совпадают при $a = \frac{12}{5}$. В этом случае неравенство решений не имеет.

При $a > \frac{12}{5}$ решением неравенства является промежуток $(2 - \frac{a}{6}; 1 + \frac{a}{4}]$, и неравенство выполняется при всех $x \in [2; 3]$, если $\begin{cases} 2 - \frac{a}{6} < 2, \\ 3 \leq 1 + \frac{a}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 8$.

При $a < \frac{12}{5}$ решением неравенства является промежуток $[1 + \frac{a}{4}; 2 - \frac{a}{6})$, и неравенство выполняется при всех $x \in [2; 3]$, если $\begin{cases} 1 + \frac{a}{4} \leq 2, \\ 3 < 2 - \frac{a}{6} \end{cases} \Leftrightarrow a < -6$.

Поэтому $a \in (-\infty; -6) \cup [8; +\infty)$, и искомые значения: $a \in [-15; -6) \cup [8; 15]$. Сумма целых значений:

$$-15 - 14 - 13 - \dots - 8 - 7 + 8 + 9 + \dots + 14 + 15 = -7.$$

Набор творческих задач.

I. Найдите все не превосходящие 100 натуральные значения n , при которых сумма $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ делится на 50. Расположите эти значения n в порядке возрастания: $n_1 < n_2 < \dots < n_k$. В ответе укажите n_4 .

Решение. Так как $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, то $n(n+1)(2n+1)$ должно делиться на $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$. Так как числа n , $n+1$ и $2n+1$ взаимно просты, то одно из них должно делиться на 25.

- Если n делится на 25, то $n = 25, 50, 75$ или 100. При подстановке этих значений в выражение получаем, что делимость будет при $n = 75$ и при $n = 100$.
- Если $n+1$ делится на 25, то $n = 24, 49, 74$ или 99. При подстановке этих значений в выражение получаем, что делимость будет при $n = 24$ и при $n = 99$.
- Если $2n+1$ делится на 25 и при этом нечетно, то $n = 12, 37, 62$ или 87. При подстановке этих значений в выражение получаем, что делимость будет при $n = 12$ и при $n = 87$.

Таким образом, подходят значения 12, 24, 75, 87, 99, 100. Четвёртым из них является 87.

Ответ: 87.

□

1. В ответе укажите n_4 .

Ответ: 87.

2. В ответе укажите n_5 .

Ответ: 99.

3. В ответе укажите n_{k-2} .

Ответ: 87.

4. В ответе укажите n_{k-3} .

Ответ: 75.

5. В ответе укажите $n_1 + n_5$.

Ответ: 111.

6. В ответе укажите $n_2 + n_6$.

Ответ: 124.

7. В ответе укажите $n_3 + n_5$.

Ответ: 174.

8. В ответе укажите $n_2 + n_{k-1}$.

Ответ: 123.

9. В ответе укажите $n_{k-3} + n_{k-5}$.

Ответ: 87.

10. В ответе укажите $n_1 + n_{k-4}$.

Ответ: 36.

II. Среди всех треугольников, вписанных в окружность фиксированного радиуса, с известной суммой квадратов всех углов ($\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 9\pi^2/25$), найдите все треугольники максимально возможной площади. Для каждого такого треугольника найдите наименьшее значение из всех попарных произведений углов. В ответ запишите наименьшее из этих значений, при необходимости округлив до двух знаков после запятой. Все углы выражаются в радианах.

Решение. Если зафиксировать радиус описанной окружности и один из углов треугольника (например, угол α), то максимальную площадь будет иметь равнобедренный треугольник с углами $\alpha, \beta = \gamma = \frac{\pi - \alpha}{2}$.

Действительно, если известен радиус R и угол α , то тем самым мы знаем сторону треугольника $a = 2R \sin \alpha$. Среди всех треугольников с данным основанием и углом α при вершине максимальную площадь имеет треугольник с максимальной высотой, проведённой к основанию a , то есть равнобедренный треугольник (рис. 1).

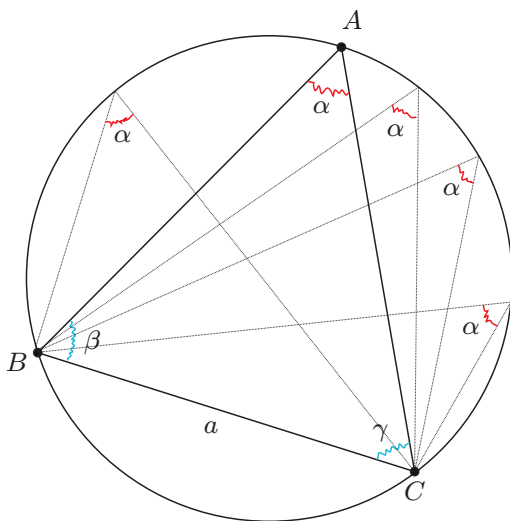


Рис. 1:

Таким образом приходим к уравнению:

$$\alpha^2 + \left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right)^2 = \frac{9\pi^2}{25}.$$

Решив уравнение, находим: $\alpha = \frac{\pi}{5}$ и $\alpha = \frac{7\pi}{15}$. Следовательно, возможны варианты треугольников с углами: $\alpha = \frac{\pi}{5}, \beta = \gamma = \frac{2\pi}{5}$ и $\alpha = \frac{7\pi}{15}, \beta = \gamma = \frac{4\pi}{15}$. Следовательно наименьшее значение из всех возможных попарных произведений углов равно $16\pi^2/225 \approx 0,70$.

Ответ: 0,70.

□

Общая формулировка

II. Среди всех треугольников, вписанных в окружность фиксированного радиуса, с известной суммой квадратов всех углов ($\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = C$), найдите все треугольники максимально возможной площади. Для каждого такого треугольника найдите наименьшее значение из всех попарных произведений углов. В ответ запишите наименьшее из этих значений, при необходимости округлив до двух знаков после запятой. Все углы выражаются в радианах.

-
- 2.1.** $C = 9\pi^2/25$. **Ответ:** 0, 70. Точный ответ $16\pi^2/225$.
- 2.2.** $C = 17\pi^2/49$. **Ответ:** 0, 81. Здесь $\frac{3\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}$. Второй треугольник с $\frac{5\pi}{21}, \frac{8\pi}{21}, \frac{8\pi}{21}$ дает больше величину. Точный ответ $4\pi^2/49$.
- 2.3.** $C = 27\pi^2/49$. **Ответ:** 0, 20. Здесь $\frac{5\pi}{7}, \frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}$. Второй треугольник с $\beta = \frac{11\pi}{21}$ не существует. Точный ответ $\pi^2/49$.
- 2.4.** $C = 11\pi^2/27$. **Ответ:** 0, 49. Здесь $\alpha = \frac{5\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}$. Второй треугольник с $\alpha = \frac{\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}$ тоже дает. Точный ответ $4\pi^2/81$.
- 2.5.** $C = 51\pi^2/81$. **Ответ:** 0, 12. Здесь $\alpha = \frac{7\pi}{9}, \beta = \frac{\pi}{9}$. Второй треугольник не существует. Точный ответ $\pi^2/81$.
- 2.6.** $C = 83\pi^2/121$. **Ответ:** 0, 08. Здесь $\alpha = \frac{9\pi}{11}, \beta = \frac{\pi}{11}$. Второй треугольник не существует. Точный ответ $\pi^2/121$.
- 2.7.** $C = 57\pi^2/121$. **Ответ:** 0, 15. Здесь $\alpha = \frac{1\pi}{33}, \beta = \frac{16\pi}{33}, \frac{16\pi}{33}$. Второй треугольник с $\frac{7\pi}{11}, \frac{2\pi}{11}, \frac{2\pi}{11}$ хуже. Точный ответ $16\pi^2/33^2$.
- 2.8.** $C = 43\pi^2/121$. **Ответ:** 0, 73. Здесь $\alpha = \frac{5\pi}{11}, \frac{3\pi}{11}, \frac{3\pi}{11}$. Второй треугольник с $\frac{13\pi}{33}, \frac{13\pi}{33}, \frac{7\pi}{33}$ произведение углов больше. Точный ответ $9\pi^2/121$.
- 2.9.** $C = 123\pi^2/169$. **Ответ:** 0, 06. Здесь $\alpha = \frac{11\pi}{13}, \beta = \frac{\pi}{13}$. Второй треугольник с $\frac{23\pi}{39}, \frac{23\pi}{39}$ не существует. Точный ответ $\pi^2/169$.
- 2.10.** $C = 89\pi^2/169$. **Ответ:** 0, 23. Здесь $\alpha = \frac{9\pi}{13}, \beta = \frac{2\pi}{13}$. Второй треугольник с $\beta = \frac{42\pi}{65}$ не существует. Точный ответ $4\pi^2/169$.
- 2.11.** $C = 67\pi^2/169$. **Ответ:** 0, 53. Здесь $\alpha = \frac{7\pi}{13}, \beta = \frac{3\pi}{13}$. Второй треугольник с $\frac{5\pi}{39}, \frac{17\pi}{39}, \frac{17\pi}{39}$ Точный ответ $9\pi^2/169$.
- 2.12.** $C = 17\pi^2/24$. **Ответ:** 0, 07. Здесь $\alpha = \frac{5\pi}{6}, \beta = \frac{\pi}{12}$. Второй треугольник с $\beta = \frac{43\pi}{60}$ не существует. Точный ответ $\pi^2/144$.
- 2.13.** $C = 11\pi^2/25$. **Ответ:** 0, 31. Здесь $\frac{1\pi}{15}, \frac{7\pi}{15}, \frac{7\pi}{15}$. Второй треугольник с $\frac{3\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}$ хуже. Точный ответ $7\pi^2/225$.
- 2.14.** $C = \pi^2/2$. **Ответ:** 0, 27. Здесь $\alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{6}$. Второй треугольник с $\beta = \frac{19\pi}{30}$ не существует. Точный ответ $\pi^2/36$.
- 2.15.** $C = 19\pi^2/32$. **Ответ:** 0, 15. Здесь $\alpha = \frac{3\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{8}$. Второй треугольник с $\beta = \frac{27\pi}{40}$ не существует. Точный ответ $\pi^2/64$.
-

III. Найдите все пары положительных чисел x, y , удовлетворяющих равенству

$$\frac{4x^2y + 6x^2 + 2xy - 4x}{3x - y - 2} + \sin\left(\frac{3x^2 + xy + x - y - 2}{3x - y - 2}\right) = 2xy + y^2 + \frac{x^2}{y^2} + \frac{2x}{y} +$$

$$+ \frac{2xy(x^2 + y^2)}{(3x - y - 2)^2} + \frac{1}{(x + y)^2} \left(x^2 \sin \frac{(x + y)^2}{x} + y^2 \sin \frac{(x + y)^2}{y^2} + 2xy \sin \frac{(x + y)^2}{3x - y - 2} \right).$$

В ответ запишите сумму величин $x^2 + y^2$ по всем полученным парам решений (x, y) при необходимости округлив до двух знаков после запятой. Если решений нет, то запишите -1 , если решений бесконечно много то -2 .

Решение. Предложенное уравнение переписывается в виде

$$f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \alpha_3 f(u_3),$$

где

$$\alpha_1 = \frac{x^2}{(x + y)^2}, \alpha_2 = \frac{y^2}{(x + y)^2}, \alpha_3 = \frac{2xy}{(x + y)^2}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \quad \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_3 > 0 \quad \forall x, y > 0;$$

$$u_1 = \frac{(x + y)^2}{x}, u_2 = \frac{(x + y)^2}{y^2}, u_3 = \frac{(x + y)^2}{3x - y - 2},$$

а функция $f(t) = t^2 + \sin t$ – строго выпуклая на всей числовой оси. По неравенству Йенсена, такое равенство возможно, только если $u_1 = u_2 = u_3$, откуда имеем с учетом $x > 0, y > 0$

$$x = y^2 = 3x - y - 2 \Rightarrow 2y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}, x = \frac{9 + \sqrt{17}}{8}.$$

Поэтому $x^2 + y^2 = \frac{85+13\sqrt{17}}{32} = 4,331\dots$

Ответ: 4,33

III.1 Найдите все пары положительных чисел x, y , удовлетворяющих равенству

$$\begin{aligned} \frac{4x^2y + 6x^2 + 2xy - 4x}{3x - y - 2} + \sin\left(\frac{3x^2 + xy + x - y - 2}{3x - y - 2}\right) &= 2xy + y^2 + \frac{x^2}{y^2} + \frac{2x}{y} + \\ &+ \frac{2xy(x^2 + y^2)}{(3x - y - 2)^2} + \frac{1}{(x + y)^2} \left(x^2 \sin \frac{(x + y)^2}{x} + y^2 \sin \frac{(x + y)^2}{y^2} + 2xy \sin \frac{(x + y)^2}{3x - y - 2} \right). \end{aligned}$$

В ответ запишите сумму величин $x^2 + y^2$ по всем полученным парам решений (x, y) при необходимости округлив до двух знаков после запятой. Если решений нет, то запишите -1 , если решений бесконечно много то -2 .

Ответ: 4,33

III.2 Найдите все пары положительных чисел x, y , удовлетворяющих равенству

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 + 14xy - 4y^2 + 2xy^2 - 12y}{2x - y - 3} + \cos\left(\frac{x^2 + 4xy - 2y^2 - 7y + 2x - 3}{2x - y - 3}\right) &= \frac{x^2}{y^2} + \frac{2y^3}{x} + \frac{2x}{y} + \\ &+ \frac{xy(xy + 2x^2)}{(2x - y - 3)^2} + \frac{1}{(x + y)^2} \left(x^2 \cos \frac{(x + y)^2}{2x - y - 3} + 2xy \cos \frac{(x + y)^2}{x} + y^2 \cos \frac{(x + y)^2}{y^2} \right). \end{aligned}$$

В ответ запишите сумму величин $x^2 + y$ по всем полученным парам решений (x, y) при необходимости округлив до двух знаков после запятой. Если решений нет, то запишите -1 , если решений бесконечно много то -2 .

Ответ: $16 + 4\sqrt{13} \approx 30,42$

Решения $x = (7 + \sqrt{13})/2, y = (1 + \sqrt{13})/2$.

III.3 Найдите все пары положительных чисел x, y , удовлетворяющих равенству

$$\begin{aligned} \frac{14xy + 4y^2 - 2x^2y - 8y}{x + 2y - 4} + \cos\left(\frac{2y^2 + 3xy + x - 2y - 4}{x + 2y - 4}\right) &= \frac{y^2}{x^2} + \frac{2y}{x} + x^2 + \\ &+ \frac{2xy(x^2 + y^2)}{(x + 2y - 4)^2} + \frac{1}{(x + y)^2} \left(x^2 \cos \frac{(x + y)^2}{x^2} + y^2 \cos \frac{(x + y)^2}{y} + 2xy \cos \frac{(x + y)^2}{x + 2y - 4} \right). \end{aligned}$$

В ответ запишите сумму величин $x + y^2$ по всем полученным парам решений (x, y) при необходимости округлив до двух знаков после запятой. Если решений нет, то запишите -1 , если решений бесконечно много то -2 .

Ответ: $24 - 4\sqrt{17} \approx 7,51$

Решения $x = (\sqrt{17} - 1)/2, y = (9 - \sqrt{17})/2$.

III.4 Найдите все пары положительных чисел x, y , удовлетворяющих равенству

$$\begin{aligned} \frac{6xy^2 - 6x^2y + 12x^2 + 2y^2 - 10xy + 12x}{3x - y + 3} + \sin\left(\frac{6x^2 - 2xy + y^2 + 9x - y + 3}{3x - y + 3}\right) &= \frac{y^2}{x^2} + \frac{2x^3}{y} + \frac{2y}{x} + \\ &+ \frac{xy(xy + 2y^2)}{(3x - y + 3)^2} + \frac{1}{(x + y)^2} \left(x^2 \sin \frac{(x + y)^2}{x^2} + 2xy \sin \frac{(x + y)^2}{y} + y^2 \sin \frac{(x + y)^2}{3x - y + 3} \right). \end{aligned}$$

В ответ запишите сумму величин $x + 2y$ по всем полученным парам решений (x, y) при необходимости округлив до двух знаков после запятой. Если решений нет, то запишите -1 , если решений бесконечно много то -2 .

Ответ: $6 + \sqrt{33} \approx 11,74$

Решения $x = (3 + \sqrt{33})/4$, $y = (21 + 3\sqrt{33})/8$.