ПВГ - 2 тур

5-6 Класс

1. Вершины правильного 222-угольника покрасили в красный и синий цвет. Будем называть сторону одноцветной, если вершины покрашены в один цвет, и разноцветной, если они покрашены в разные цвета. Можно ли так раскрасить вершины, чтобы одноцветных и разноцветных сторон было поровну?

Ответ: Нет.

Решение: Допустим, получилось покрасить так, чтобы было 111 разноцветных сторон. Отправимся из произвольной точки (например, красной). Когда мы сделаем полный круг, цвет поменяется 111 раз, значит, точка будет синей. Противоречие.

2. Определите, является ли число $N = 7 \times 9 \times 13 + 2020 \times 2018 \times 2014$ простым или составным.

Ответ обоснуйте.

Ответ: Составное.

Решение: Заметим, что 7+2020=9+2018=13+2014=2027. Значит $N \equiv 7 \times 9 \times 13 + (-7) \times (-9) \times (-13) = 0\ (mod\ 2027)$.

3. Иван Семенович каждый день выезжает в одно и то же время, едет на работу с одной и той же скоростью и приезжает ровно в 9:00. Однажды он проспал и выехал на 40 мин. позднее обычного. Чтобы не опоздать, Иван Семенович поехал со скоростью на 60% большей, чем обычно и приехал в 8:35. На сколько процентов он должен был увеличить обычную скорость, чтобы приехать ровно в 9:00?

Ответ: На 30%.

Решение: Увеличив скорость на 60%, т.е. в 1.6 раз, Иван Семенович уменьшил время в 1.6 раз и выиграл 40+25=65 минут. Обозначив обычное время поездки за Т, получим $\frac{T}{1.6} = T - 65$, откуда $T = \frac{520}{3}$. Для того, чтобы доехать за $T - 40 = \frac{400}{3}$ надо было увеличить скорость в $\frac{520}{3} \div \frac{400}{3} = 1.3$ раз, т.е. на 30%.

4. Докажите, что сумма 6-значных чисел, не содержащих цифр 0 и 9 в десятичной записи будет кратна 37.

Решение: Разобьем на пары, взаимно дополняющие каждый разряд до 9 (например, 123456+876543). Получим сумму 999999 в каждой паре, это число равно $9 \times 1001 \times 111$. Легко проверить, что 111 кратно 37.

5. Английский клуб посещают 20 джентльменов. Некоторые из них знакомы (знакомства взаимные, т.е. если А знает В, то и В знает А). Известно, что в клубе нет трех попарно знакомых между собой джентльменов.

Однажды джентльмены пришли в клуб, и каждая пара знакомых пожала друг другу руки (один раз). Какое наибольшее число рукопожатий могло быть сделано?

Ответ: 100 рукопожатий.

Решение: Выберем джентльмена, имеющего наибольшее количество знакомых (если таких несколько - выберем любого). Допустим, он имеет *n* знакомых. Эти знакомые не могут быть попарно знакомы между собой. Рассмотрим оставшихся $(20-n-1)$ джентльменов, каждый из них имеет не более n знакомых, значит количество рукопожатий, которые они сделают не превосходит $(20-n-1)\cdot n$. Значит общее число не превосходит $(20-n)\cdot n$. Это число максимально, когда n=10. Можно показать, что 100 рукопожатий возможно - разбив джентльменов на 2 группы по 10 человек и чтобы каждый из 1-й группы был знаком с каждым из второй (а внутри групп знакомств не было).

6. Сравните числа $\frac{100}{101}\times\frac{102}{103}\times\ldots\times\frac{1020}{1021}\times\frac{1022}{1023}$ и $\frac{5}{16}$

Ответ: $\frac{100}{101}\times\frac{102}{103}\times\ldots\times\frac{2020}{2021}\times\frac{2022}{2023}<\frac{5}{16}$

Решение: Заметим, что $\frac{n}{n+1}<\frac{n+1}{n+2}$. Поэтому $A=\frac{100}{101}\times\frac{102}{103}\times\ldots\frac{2020}{2021}\times\frac{2022}{2023}<\frac{101}{102}\times\frac{103}{104}\times\ldots\times\frac{1021}{1022}\times\frac{1023}{1024}=B$. Перемножив и сократив дроби, получим $A\times B=\frac{100}{1024}=\frac{25}{256}=\left(\frac{5}{16}\right)^2$. С другой стороны, поскольку $A<B$, то $A^2<A\times B=\left(\frac{5}{16}\right)^2$.

7. Ольга Ивановна, классная руководительница 5Б, ставит «Математический балет». Она хочет расставить мальчиков и девочек так, чтобы на расстоянии 5м от каждой девочки было ровно 2 мальчика. Какое наибольшее количество девочек сможет участвовать в балете, если известно, что в нем участвуют 5 мальчиков?

Ответ: 20 девочек.

Решение: Выберем и зафиксируем произвольных 2 мальчиков - $М_1$ и $М_2$. Допустим, что они находятся на расстоянии 5 м от некоторой девочки - Д. Тогда $М_1$, $М_2$ и Д образуют равнобедренный треугольник с боковыми сторонами 5м. При фиксированных позициях $М_1$ и $М_2$ существует не более двух таких треугольников (*тут нужна картинка!*). Следовательно, для любой пары мальчиков может быть не более двух девочек. Всего пар мальчиков $C_5^2=10$, откуда и получим верхнюю оценку.

Несложно показать, что она достигается - просто поставив мальчиков в ряд с интервалом 1м и построив все возможные равнобедренные треугольники (у них вершины, очевидно, будут разные).

7-8 Класс

1. Определите, является ли число $N = 7 \times 9 \times 13 + 2020 \times 2018 \times 2014$ простым или составным.

Ответ обоснуйте.

Ответ: Составное.

Решение: Заметим, что 7+2020=9+2018=13+2014=2027. Значит $N \equiv 7 \times 9 \times 13 + (-7) \times (-9) \times (-13) = 0\ (mod\ 2027)$.

2. Иван Семенович каждый день выезжает в одно и то же время, едет на работу с одной и той же скоростью и приезжает ровно в 9:00. Однажды он проспал и выехал на 40 мин. позднее обычного. Чтобы не опоздать, Иван Семенович поехал со скоростью на 60% большей, чем обычно и приехал в 8:35. На сколько процентов он должен был увеличить обычную скорость, чтобы приехать ровно в 9:00?

Ответ: На 30%.

Решение: Увеличив скорость на 60%, т.е. в 1.6 раз, Иван Семенович уменьшил время в 1.6 раз и выиграл 40+25=65 минут. Обозначив обычное время поездки за Т, получим $\frac{T}{1.6} = T - 65$, откуда $T = \frac{520}{3}$. Для того, чтобы доехать за $T - 40 = \frac{400}{3}$ надо было увеличить скорость в $\frac{520}{3} \div \frac{400}{3} = 1.3$ раз, т.е. на 30%.

3. Докажите, что сумма 6-значных чисел, не содержащих цифр 0 и 9 в десятичной записи будет кратна 37.

Решение: Разобьем на пары, взаимно дополняющие каждый разряд до 9 (например, 123456+876543). Получим сумму 999999 в каждой паре, это число равно $9 \times 1001 \times 111$. Легко проверить, что 111 кратно 37.

4. Сравните числа $\frac{100}{101} \times \frac{102}{103} \times \ldots \times \frac{1020}{1021} \times \frac{1022}{1023}$ и $\frac{5}{16}$

Ответ: $\frac{100}{101} \times \frac{102}{103} \times \ldots \times \frac{2020}{2021} \times \frac{2022}{2023} < \frac{5}{16}$

Решение: Заметим, что $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$. Поэтому $A = \frac{100}{101} \times \frac{102}{103} \times \ldots \times \frac{2020}{2021} \times \frac{2022}{2023} < \frac{101}{102} \times \frac{103}{104} \times \ldots \times \frac{1021}{1022} \times \frac{1023}{1024} = B$. Перемножив и сократив дроби, получим $A \times B = \frac{100}{1024} = \frac{25}{256} = \left(\frac{5}{16}\right)^2$. С другой стороны, т.е. $A < B$, то $A^2 < A \times B = \left(\frac{5}{16}\right)^2$.

5. Английский клуб посещают 20 джентльменов. Некоторые из них знакомы (знакомства взаимные, т.е. если A знает B, то и B знает A). Известно, что в клубе нет трех попарно знакомых между собой джентльменов.

Однажды джентльмены пришли в клуб, и каждая пара знакомых пожала друг другу руки (один раз). Какое наибольшее число рукопожатий могло быть сделано?

Ответ: 100 рукопожатий.

Решение: Выберем джентльмена, имеющего наибольшее количество знакомых (если таких несколько - выберем любого). Допустим, он имеет *n* знакомых. Эти знакомые не могут быть попарно знакомы между собой. Рассмотрим оставшихся $(20-n-1)$ джентльменов, каждый из них имеет не более n знакомых, значит количество рукопожатий, которые они сделают не превосходит $(20-n-1)\cdot n$. Значит общее число не превосходит $(20-n)\cdot n$. Это число максимально, когда n=10. Можно показать, что 100 рукопожатий возможно - разбив джентльменов на 2 группы по 10 человек и чтобы каждый из 1-й группы был знаком с каждым из второй (а внутри групп знакомств не было).

6. Ольга Ивановна, классная руководительница 5Б, ставит «Математический балет». Она хочет расставить мальчиков и девочек так, чтобы на расстоянии 5м от каждой девочки было ровно 2 мальчика. Какое наибольшее количество девочек сможет участвовать в балете, если известно, что в нем участвуют 5 мальчиков?

Ответ: 20 девочек.

Решение: Выберем и зафиксируем произвольных 2 мальчиков - M_1 и M_2. Допустим, что они находятся на расстоянии 5 м от некоторой девочки - Д. Тогда M_1, M_2 и Д образуют равнобедренный треугольник с боковыми сторонами 5м. При фиксированных позициях M_1 и M_2 существует не более двух таких треугольников (*тут нужна картинка!*). Следовательно, для любой пары мальчиков может быть не более двух девочек. Всего пар мальчиков $C_5^2=10$, откуда и получим верхнюю оценку.

Несложно показать, что она достигается - просто поставив мальчиков в ряд с интервалом 1м и построив все возможные равнобедренные треугольники (у них вершины, очевидно, будут разные).

7. Дан правильный треугольник. Можно ли его разрезать на две фигуры, одна из которых - 2020-угольник, а другая - 2021-угольник (многоугольники не обязательно выпуклые)?

Ответ: Да, можно.

Решение: Проведем внутри треугольника 2019-звенную ломаную, соединяющую две вершины треугольника.

9 Класс

1. Монету бросили 2021 раз. Какова вероятность, что выпадет четное количество «орлов»?

Ответ: ½.

Решение: Обозначим через p вероятность того, что при первых 2020 бросках выпало четное число «орлов» и $q = 1 - p$ - вероятность того, что нечетное. Тогда на 2021 раз выпадет орел с вероятностью ½ и вероятность будет $\frac{1}{2}q$ или решка, тогда вероятность $\frac{1}{2}p$. Суммарная вероятность равна $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}$

2. Иван Семенович каждый день выезжает в одно и то же время, едет на работу с одной и той же скоростью и приезжает ровно в 9:00. Однажды он проспал и выехал на 40 мин. позднее обычного. Чтобы не опоздать, Иван Семенович поехал со скоростью на 60% большей, чем обычно и приехал в 8:35. На сколько процентов он должен был увеличить обычную скорость, чтобы приехать ровно в 9:00?

Ответ: На 30%.

Решение: Увеличив скорость на 60%, т.е. в 1.6 раз, Иван Семенович уменьшил время в 1.6 раз и выиграл 40+25=65 минут. Обозначив обычное время поездки за Т, получим $\frac{T}{1.6} = T - 65$, откуда $T = \frac{520}{3}$. Для того, чтобы доехать за $T - 40 = \frac{400}{3}$ надо было увеличить скорость в $\frac{520}{3} \div \frac{400}{3} = 1.3$ раз, т.е. на 30%.

3. Сравните числа $\frac{100}{101} \times \frac{102}{103} \times \dots \times \frac{1020}{1021} \times \frac{1022}{1023}$ и $\frac{5}{16}$

Ответ: $\frac{100}{101} \times \frac{102}{103} \times \dots \times \frac{2020}{2021} \times \frac{2022}{2023} < \frac{5}{16}$

Решение: Заметим, что $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$. Поэтому $A = \frac{100}{101} \times \frac{102}{103} \times \dots \times \frac{2020}{2021} \times \frac{2022}{2023} < \frac{101}{102} \times \frac{103}{104} \times \dots \times \frac{1021}{1022} \times \frac{1023}{1024} = B$. Перемножив и сократив дроби, получим $A \times B = \frac{100}{1024} = \frac{25}{256} = \left(\frac{5}{16}\right)^2$. С другой стороны, т.е. $A < B$, то $A^2 < A \times B = \left(\frac{5}{16}\right)^2$.

4. Английский клуб посещают 20 джентльменов. Некоторые из них знакомы (знакомства взаимные, т.е. если А знает В, то и В знает А). Известно, что в клубе нет трех попарно знакомых между собой джентльменов.

Однажды джентльмены пришли в клуб, и каждая пара знакомых пожала друг другу руки (один раз). Какое наибольшее число рукопожатий могло быть сделано?

Ответ: 100 рукопожатий.

Решение: Выберем джентльмена, имеющего наибольшее количество знакомых (если таких несколько - выберем любого). Допустим, он имеет *n* знакомых. Эти знакомые не могут быть попарно знакомы между собой. Рассмотрим оставшихся $(20-n-1)$ джентльменов, каждый из них имеет не более n знакомых, значит количество рукопожатий, которые они сделают не превосходит $(20-n-1)\cdot n$. Значит общее число не превосходит $(20-n)\cdot n$. Это число максимально, когда n=10. Можно показать, что 100 рукопожатий возможно - разбив джентльменов на 2 группы по 10 человек и чтобы каждый из 1-й группы был знаком с каждым из второй (а внутри групп знакомств не было).

5. Ольга Ивановна, классная руководительница 5Б, ставит «Математический балет». Она хочет расставить мальчиков и девочек так, чтобы на расстоянии 5м от каждой девочки было ровно 2 мальчика. Какое наибольшее количество девочек сможет участвовать в балете, если известно, что в нем участвуют 5 мальчиков?

Ответ: 20 девочек.

Решение: Выберем и зафиксируем произвольных 2 мальчиков - $М_1$ и $М_2$. Допустим, что они находятся на расстоянии 5 м от некоторой девочки - Д. Тогда $М_1$, $М_2$ и Д образуют равнобедренный треугольник с боковыми сторонами 5м. При фиксированных позициях $М_1$ и $М_2$ существует не более двух таких треугольников (*тут нужна картинка!*). Следовательно, для любой пары мальчиков может быть не более двух девочек. Всего пар мальчиков $C_5^2=10$, откуда и получим верхнюю оценку.

Несложно показать, что она достигается - просто поставив мальчиков в ряд с интервалом 1м и построив все возможные равнобедренные треугольники (у них вершины, очевидно, будут разные).

6. Космический зонд, двигаясь прямолинейно с постоянной скоростью, пролетает мимо Марса и каждый день ровно в 12:00 замеряет расстояние до этой планеты. Известно, что 1-го февраля расстояние было 5 млн. км, 10-го февраля - 2 млн. км и 13-го февраля - 3 млн. км.

Определите, когда зонд пройдет на минимальном расстоянии от Марса.

В этой задаче Марс можно считать точкой.

Ответ: 9 февраля.

Обозначим $d(t)$ - расстояние до Марса в момент времени t. Пусть Марс находится в начале координат, зонд стартует из точки (x_0, y_0, z_0) и его вектор скорости равен (v_x, v_y, v_z).

Тогда в момент времени t зонд окажется в точке $(x_0+t\cdot v_x, y_0+t\cdot v_y, z_0+t\cdot v_z)$, которая находится на расстоянии $d(t)=\sqrt{\left((x_0+t\cdot v_x)^2+\left(y_0+t\cdot v_y\right)^2+(z_0+t\cdot v_z)^2\right)}$ от Марса.

Возведем в квадрат и заметим, что $D(t)=d^2(t)$ является квадратичной функцией от t.

Запишем $D(t)$ в виде $D(t)=at^2+bt+c$ и найдем коэффициенты a, b, c.

Для упрощения выкладок введем шкалу времени t таким образом, чтобы момент $t = 0$ пришелся на 10 февраля, тогда 1 февраля соответствует $t = -9$ и 13-е февраля $t = 3$.

Подставим известные значения функции D: $D(-9) = 25, D(0) = 4, D(3) = 9$ и решим получившуюся систему:

$$\begin{cases} 81a - 9b + c = 25 \\ c = 4 \\ 9a + 3b + c = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{2}{3} \\ c = 4 \end{cases}$$

Найдем вершину параболы (графика функции $D(t) = \frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{3}t + 4$):

Это точка $t_0 = -\frac{b}{2a} = -1$, она является точкой минимума функции $D(t)$, ей соответствует 9 февраля.

7. Дан многочлен $P(x)$, не равный нулю тождественно. Известно, что при всех x выполняется тождество $(x - 2020) \cdot P(x + 1) = (x + 2021) \cdot P(x)$. Сколько корней имеет уравнение $P(x) = 0$?

Ответ: 4042

Решение:

Сначала докажем две вспомогательные леммы:

Лемма 1. Если $x_0 \neq 2020$- корень $P(x)$, то $x_0 + 1 -$ тоже корень.

Док-во: Подставим $(x_0 - 2020) \cdot P(x_0 + 1) = (x_0 + 2021) \cdot P(x_0) = 0$ но $(x_0 - 2020) \neq 0$.

Лемма 2. Если $x_0 \neq -2021$- корень $P(x)$, то $x_0 - 1 -$ тоже корень.

Док-во: Подставим $0 = (x_0 - 2020) \cdot P(x_0 + 1) = (x_0 + 2021) \cdot P(x_0)$ но $(x_0 + 2021) \neq 0$.

Подставим в тождество $x = 2020$, получим $0 = 4041P(2020)$, отсюда 2020 является корнем.

Последовательно применяя лемму 2, получим, что $x = 2019, 2018, \dots, -2021$ являются корнями.

Докажем, что других нет.

1) Допустим, что корень x_0 не является целым, то по лемме 1 получим, что корнями являются $x_0 + 1, x_0 + 2, \dots, x_0 + n, \dots$ Но многочлен (не тождественно равный нулю) не может иметь бесконечно много корней - противоречие.

2) Допустим, что x_0 - целый и не принадлежит отрезку $[-2021; 2020]$. Если $x_0 > 2020$, то (по лемме 1) корнями являются и $x_0 + 1, x_0 + 2, \dots, x_0 + n, \dots$ Если же $x_0 < -2021$, то (по лемме 2) корнями являются и $x_0 - 1, x_0 - 2, \dots, x_0 - n, \dots$ В любом случае ненулевой многочлен не может иметь бесконечно много корней - противоречие.

Итак, корнями являются целые числа от -2021 до 2020 включительно, их количество равно 4042.