

**Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике**

Задания заочного этапа 2020/2021 учебного года для 5–6 класса

1) Остров Рыцарей и Лжецов. Рыцари всегда говорят правду, лжецы - всегда лгут. Однажды путешественник пришел на перекресток и спросил, где находится город Рыцарей у 4 аборигенов - А, Б, В и Г.

А ответил - Идите на север, там город Рыцарей

Б ответил - Нет, город Рыцарей на юге

В сказал - не верьте, А и Б - лжецы

Г возразил - А, Б и В - рыцари.

Сколько рыцарей среди них на самом деле?

Ответ: 1.

2) На заводе работают токари и фрезеровщики, токарей 60%. В январе уволили некоторое количество токарей и их стало 20%. А в феврале уволили часть фрезеровщиков, после чего токарей снова стало 60%. Какой процент работников завода был уволен за январь-февраль? Ответ округлите до ближайшего целого числа.

Ответ: 83.

3) Представьте $\frac{4}{2021}$ в виде разности двух дробей с числителями, равными 1. В ответе укажите сумму знаменателей.

Ответ 90.

4) В выражении $0 * 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9$ вместо «звездочек» можно ставить знаки «+» или «-». Сколько различных положительных чисел можно получить таким образом?

Ответ: 23

5) Петя пошел в лес по грибы и, конечно же, взял с собой smart-часы со встроенным компасом, шагомером и транспортиром. Петя заметил, что, когда он входил в лес между 8 и 9 часами утра, угол между часовой и минутной стрелкой составил ровно 72° . А когда он выходил из леса между 13 и 14 часами, угол тоже был ровно 72° . Сколько минут Петя провел в лесу, если известно, что это число минут - целое?

Ответ: 288

6) На окружности отмечена точка А. Построили правильный 3-угольник, 4-угольник,..., 10-угольник, вписанные в эту окружность и имеющие точку А одной из вершин. Все вершины этих многоугольников покрасили в красный цвет. Найдите, сколько получилось различных красных точек на окружности?

Ответ: 32.

7) Какое наименьшее значение может принимать сумма $x + y + z$ при условиях:

$$\begin{cases} x + 2y \geq 5 \\ y + 3z \geq 6 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}?$$

В ответ запишите найденное число, при необходимости округлив до двух знаков после запятой.

Ответ: 3.67.

**Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике**

Задания заочного этапа 2020/2021 учебного года для 7–8 класса

1) Остров Рыцарей и Лжецов. Рыцари всегда говорят правду, лжецы - всегда лгут. Однажды путешественник пришел на перекресток и спросил, где находится город Рыцарей у 4 аборигенов - А, Б, В и Г.

А ответил - Идите на север, там город Рыцарей

Б ответил - Нет, город Рыцарей на юге

В сказал - не верьте, А и Б - лжецы

Г возразил - А, Б и В - рыцари.

Сколько рыцарей среди них на самом деле?

Решение: А и Б противоречат друг другу, поэтому Г - точно лжец. Если В - рыцарь, то А и Б - лжецы. А если В - лжец - то кто-то из А и Б рыцарь, а другой лжец. В любом случае среди них ровно 1 рыцарь. **Ответ: 1.**

2) Представьте $\frac{4}{2021}$ в виде разности двух дробей с числителями, равными 1. В ответе укажите сумму знаменателей.

Ответ 90.

3) В выражении $0 * 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9$ вместо «звездочек» можно ставить знаки «+» или «-». Сколько различных положительных чисел можно получить таким образом?

Ответ: 23

4) Петя пошел в лес по грибы и, конечно же, взял с собой smart-часы со встроенным компасом, шагомером и транспортиром. Петя заметил, что, когда он входил в лес между 8 и 9 часами утра, угол между часовой и минутной стрелкой составил ровно 72° . А когда он выходил из леса между 13 и 14 часами, угол тоже был ровно 72° . Сколько минут Петя провел в лесу, если известно, что это число минут - целое?

Ответ: 288

5) На окружности отмечена точка А. Построили правильный 3-угольник, 4-угольник,..., 10-угольник, вписанные в эту окружность и имеющие точку А одной из вершин. Все вершины этих многоугольников покрасили в красный цвет. Найдите, сколько получилось различных красных точек на окружности?

Ответ: 32.

6) Решите уравнение

$$\sqrt{(x-1)(\sqrt{x}-2)(\sqrt[3]{x}-3)} + \sqrt{(\sqrt{x}-2)(\sqrt[3]{x}-3)(\sqrt[4]{x}-4)} + \sqrt{(\sqrt[3]{x}-3)(\sqrt[4]{x}-4)(\sqrt[5]{x}-5)} = 0$$

Ответ: 27

7) Треугольник ABC — равнобедренный, $AB = BC$. На продолжении стороны AC за точку C выбрана точка D , такая, что $\angle ABD = 90^\circ$. Из множества точек E , обладающих тем свойством, что точка D принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку CE , выбрали ту, которая находится на максимальном расстоянии от точки B . Найдите угол $\angle CED$, если известно, что $\angle ABC = 80^\circ$.

$\angle$

Ответ: 20

**Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике**

Задания заочного этапа 2020/2021 учебного года для 9 класса

1) Петя пошел в лес по грибы и, конечно же, взял с собой smart-часы со встроенным компасом, шагомером и транспортиром. Петя заметил, что, когда он входил в лес между 8 и 9 часами утра, угол между часовой и минутной стрелкой составил ровно 72° . А когда он выходил из леса между 13 и 14 часами, угол тоже был ровно 72° . Сколько минут Петя провел в лесу, если известно, что это число минут - целое?

Ответ: 288

2) В выражении $0 * 1 * 2 * 3 * \dots * 99$ вместо «звездочек» можно ставить знаки «+» или «-». Сколько различных положительных чисел можно получить таким образом?

Ответ: 4950

3) На окружности отмечена точка A . Построили правильный 3-угольник, 4-угольник,..., 10-угольник, вписанные в эту окружность и имеющие точку A одной из вершин. Все вершины этих многоугольников покрасили в красный цвет. Найдите, сколько получилось различных красных точек на окружности?

Ответ: 32.

4) Треугольник ABC — равнобедренный, $AB = BC$. На продолжении стороны AC за точку C выбрана точка D , такая, что $\angle ABD = 90^\circ$. Из множества точек E , обладающих тем свойством, что точка D принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку CE , выбрали ту, которая находится на максимальном расстоянии от точки B . Найдите угол $\angle CED$, если известно, что $\angle ABC = 80^\circ$.

Ответ: 20

5) Какое наименьшее значение может принимать сумма $x + y + z$ при условиях:

$$\begin{cases} x + 2y \geq 5 \\ y + 3z \geq 6 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}$$

В ответ запишите найденное число, при необходимости округлив до двух знаков после запятой.

Ответ: 3.67.

6) Известно, что квадратные трехчлены $x^2 + p_1x + q_1$ и $x^2 + p_2x + q_2$ с целыми коэффициентами p_1, q_1, p_2, q_2 имеют корни и все их корни являются положительными целыми числами.

Пусть $(x^2 + p_1x + q_1) \cdot (x^2 + p_2x + q_2) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Найдите наименьшее возможное значение коэффициента b при этих условиях.

Ответ : 6.

7. Дана последовательность положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_{10}$, удовлетворяющих соотношению $a_n(a_{n-1} + a_{n+1}) = 2a_{n-1}a_{n+1}(a_n + 1)$ при $n = 2, 3, \dots, 9$. Найдите a_5 если известно, что $a_1 = 1$ и $a_{10} = 0,01$.

Ответ: 0,04.