Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы» для 10 классов

Вариант 4–1

1. В возрастающей арифметической прогрессии $\{b_i\}$ дано $b_1 = 1$, $b_{b_2} = 10$. Найдите b_n с номером $n = b_{b_3}$.

2. Высота, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на два отрезка, один из которых равен 16. Найдите длину второго отрезка, если радиус вписанной в этот треугольник окружности равен 5.

3. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\sin\left(x^2 - 2,57\right) = \cos(\pi x).$$

4. Сумма длин двух ребер прямоугольного параллелепипеда равна 2020, а произведение равно длине третьего ребра. Найдите диагональ этого параллелепипеда, если известно, что она на 1 длиннее третьего ребра.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2 + a|x - a| = 8x - 15$$

имеет решение. Для каждого из найденных a укажите число решений.

май 2020 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы» для 10 классов

Вариант 4–2

1. В возрастающей арифметической прогрессии $\{b_i\}$ дано $b_1 = 1$, $b_{b_2} = 17$. Найдите b_n с номером $n = b_{b_3}$.

2. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен 5. Высота, проведённая к гипотенузе, делит гипотенузу на два отрезка, один из которых равен 9. Найдите длину второго отрезка.

3. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\sin\left(x^2 - 2,58\right) = \cos(\pi x).$$

4. Сумма длин двух ребер прямоугольного параллелепипеда равна 2020, а произведение равно длине третьего ребра. Найдите длину третьего ребра, если известно, что она на 1 меньше длины диагонали этого параллелепипеда.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2 + a|x - a| = 10x - 24$$

имеет решение. Для каждого из найденных a укажите число решений.

май 2020 г.

Ответы и решения к варианту 4–1 (2)

1. $b_2 = b_1 + d$, $b_{1+d} = 10 \Rightarrow b_1 + d\,(1 + d - 1) = 10 \Rightarrow 1 + d^2 = 10$, $d = 3$ (так как прогрессия возрастающая).

$$b_3 = 1 + 2d = 1 + 6 = 7, b_{b_3} = b_7 = 1 + 6d = 19,$$

$$b_{b_{b_3}} = b_{19} = b_1 + 18d = 55.$$

Ответ: 55. Ответ к варианту: *4–2*: 129.

2. Пусть второй отрезок равен x. Тогда гипотенуза равна $(x + 16)$, высота треугольника равна $\sqrt{16x}$. По теореме Пифагора находятся катеты: они равны $a = \sqrt{16^2 + 16x}$ и $b = \sqrt{x^2 + 16x}$. Радиус вписанной окружности равен $\frac{a+b-c}{2} = \frac{\sqrt{16(x+16)}+\sqrt{x(x+16)}-x-16}{2}$. Получается уравнение

$$\sqrt{16\,(x+16)} + \sqrt{x\,(x+16)} - x - 16 = 10 \Leftrightarrow \sqrt{16\,(x+16)} + \sqrt{x\,(x+16)} = x + 26 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+16)^2 + 2\,(x+16)\sqrt{16x} = (x+26)^2 \Leftrightarrow 4\,(x+16)\sqrt{2x} = 5\,(2x+21) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x\,(x+16)^2 = 25\,(x+21)^2 \Leftrightarrow 4x^3 + 103x^2 - 26x - 11025 = 0.$$

Подбирается рациональный корень $x = 9$, после чего получается разложение

$$(x-9)\left(4x^2 + 139x + 1225\right) = 0.$$

Других корней нет.

Второй способ решения. Уравнение $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ в нашем случае принимает вид:

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{\sqrt{16x}} + \frac{1}{\sqrt{16(x+16)}} + \frac{1}{\sqrt{x(x+16)}}.$$

Ввиду монотонности уравнения справа, корень $x = 9$ единственен.

Ответ: 9.

Ответ к варианту: *4–2*: 16.

3. $\sin\left(x^2 - 2,57\right) = \cos(\pi x) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x^2 + 2,57\right) = \cos(\pi x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 \pm \pi x = \frac{\pi}{2} + 2,57 + 2\pi k \Leftrightarrow \left(x \pm \frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} + 2,57 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Правая часть этих уравнений неотрицательна при $k \geqslant -1$, кандидатами на наименьший положительный корень будут

$$x_1 = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} + 2,57 - 2\pi}; \quad x_2 = -\frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} + 2,57}.$$

Сравнение этих чисел дает

$$x_1 \bigvee x_2 \Leftrightarrow \pi - \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} + 2,57 - 2\pi} \bigvee \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} + 2,57} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi^2 - 2\pi - 2\pi\sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} + 2,57 - 2\pi} \bigvee 0 \Leftrightarrow (\pi - 2)^2 \bigvee \pi^2 - 6\pi + 4 \cdot 2,57 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\pi + 4 \bigvee 4 \cdot 2,57 \Leftrightarrow \pi \bigvee 3,14,$$

откуда $x_1 > x_2$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} + 2,57}$. Ответ к варианту: *4–2*: $\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - \frac{3\pi}{2} + 2,58}$.

4. Если a, b — длины двух рёбер параллелепипеда, ab — длина третьего, то диагональ равна $ab + 1$, поэтому

$$a^2 + b^2 + (ab)^2 = (ab+1)^2,$$
$$a^2 + b^2 = 2ab + 1,$$
$$(a-b)^2 = 1.$$

Следовательно, числа a и b отличаются на 1. По условию, их сумма равна 2020, поэтому это числа 1009,5 и 1010,5, а диагональ равна $1009,5 \cdot 1010,5 + 1 = 1010^2 - 1/4 + 1 = 1020100,75$.

Ответ: 1020100,75.

Ответ к варианту: *4–2*: 1020099,75.

5. Переписав уравнение в виде $a|x - a| = -x^2 + 8x - 15$, заметим, что график правой части не изменяется и представляет собой параболу ветвями вниз, пересекающую ось Ox в точках $(3;0)$ и $(5;0)$. График левой части при $a < 0$ представляет собой «галку» ветвями вниз с вершиной в точке $(a;0)$, ясно, что уравнение из условия задачи будет иметь 2 решения. При $a = 0$ ясно, что решений тоже два, $x = 3$ и $x = 5$. При $0 < a < 3$ направление ветвей «галки» станет вверх, при этом пересекаться с параболой может только правая ее ветвь ($x \geqslant a$). Рассматривая уравнение $ax - a^2 = -x^2 + 8x - 15$, найдем, что оно имеет решения при $a \in \left(0; \frac{8 - 2\sqrt{11}}{5}\right] \cup \left[\frac{8 + 2\sqrt{11}}{5}; 3\right)$. Условие $x \geqslant a$ будет выполнено только при $a \in \left(0; \frac{8 - 2\sqrt{11}}{5}\right]$.

При $3 \leqslant a \leqslant 5$ ясно, что уравнение имеет решения: при $3 < a < 5$ их будет два, при $a = 3$ и $a = 5$ непосредственной проверкой убеждаемся, что решение будет одно. При $a > 5$ пересекаться с параболой может только левая ветвь «галки» ($x \leqslant a$). Рассматривая уравнение $-ax + a^2 = -x^2 + 8x - 15$, получим, что оно имеет решения при $a \in \left[5; \frac{8+2\sqrt{19}}{3}\right)$, но при этих a условие $x \leqslant a$ не выполнено.

Ответ: $a \in \left(-\infty; \frac{8 - 2\sqrt{11}}{5}\right] \cup [3;5]$, при $a = \frac{8 - 2\sqrt{11}}{5}$, $a = 3$, $a = 5$ решение будет единственным, при всех остальных указанных a решений будет два. Ответ к варианту: *4–2*: $a \in \left(-\infty; 2 - \frac{4}{\sqrt{5}}\right] \cup [4;6]$. При $a = 2 - \frac{4}{\sqrt{5}}$, $a = 4$, $a = 6$ одно решение, при остальных указанных a будет 2 решения.

май 2020 г.