Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 1

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 15, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 60. Чему может быть равен последний член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(3x^\circ)?$$

3. Наибольшая сторона треугольника на 10 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Андрей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-5; 6]$ и после этого решает уравнение $3x^3 - (3a-4)x^2 - (2a-3)x + a + 2 = 0$.

Найдите вероятность того, что Андрей получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты АБ2020 всего две буквы: буква *А* и буква *Б*. Все слова начинаются на букву *А* и заканчиваются тоже на букву *А*. В любом слове буква *А* не может соседствовать с другой буквой *А*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *Б*. Например, слова АББА, АБАБАБА, АББАБАББА являются допустимыми, а слова АББАБ, АБААБА, АБАБББА – нет. Сколько 20-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 2

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 20, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 180. Чему может быть равен пятый член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(x^\circ)\,?$$

3. Один из углов треугольника в 2 раза меньше другого, а наибольшая сторона треугольника на $2\sqrt{2}$ больше второй по величине стороны. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Маша выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-5;6]$ и после этого решает уравнение $3x^3-(3a-13)x^2-(2a-9)x+a-1=0$.

Найдите вероятность того, что Маша получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях она не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты ОГ2020 всего две буквы: буква *О* и буква *Г*. Все слова начинаются на букву *О* и заканчиваются тоже на букву *О*. В любом слове буква *О* не может соседствовать с другой буквой *О*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *Г*. Например, слова ОГГО, ОГОГОГО, ОГГОГОГГО являются допустимыми, а слова ОГГОГ, ОГООГО, ОГОГГГО – нет. Сколько 19-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 3

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 30, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 120. Чему может быть равен четвёртый член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(2x^\circ)\,?$$

3. Наибольшая сторона треугольника на 20 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Сергей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-6; 5]$ и после этого решает уравнение $3x^3 + (3a+4)x^2 + (2a+3)x - a + 2 = 0$.

Найдите вероятность того, что Сергей получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты AB2020 всего две буквы: буква *A* и буква *B*. Все слова начинаются на букву *A* и заканчиваются тоже на букву *A*. В любом слове буква *A* не может соседствовать с другой буквой *A*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *B*. Например, слова ABBA, ABABABA, ABBABABBA являются допустимыми, а слова ABBAB, ABAABA, ABABBBA – нет. Сколько 21-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 4

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 10, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 90. Чему может быть равен последний член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(5x^\circ)\ ?$$

3. Один из углов треугольника в 2 раза меньше другого, а наибольшая сторона треугольника на $3\sqrt{2}$ больше второй по величине стороны. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Таня выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-6;5]$ и после этого решает уравнение $3x^3 + (3a+13)x^2 + (2a+9)x - a - 1 = 0$.

Найдите вероятность того, что Таня получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях она не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты ОТ2020 всего две буквы: буква *О* и буква *Т*. Все слова начинаются на букву *О* и заканчиваются тоже на букву *О*. В любом слове буква *О* не может соседствовать с другой буквой *О*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *Т*. Например, слова ОТТО, ОТОТОТО, ОТТОТОТТО являются допустимыми, а слова ОТТОТ, ОТООТО, ОТОТТТО – нет. Сколько 22-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

Ответы и решения

1-1. Ответ: 128 или 384. Решение. Обозначив члены прогрессии через $\{a_i\}$, а знаменатель через q, получим $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}=15$, $\frac{a_3+a_4+a_5+a_6}{4}=60$. Так как $a_3+a_4+a_5+a_6=(a_1+a_2+a_3+a_4)\cdot q^2$, то $60=15\cdot q^2$, $q=\pm 2$.

Поэтому $\frac{a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3}{4}=15 \Rightarrow a_1\left(1+q+q^2+q^3\right)=60$. Отсюда при $q=2$ получаем $a_1=4$, а при $q=-2$ получаем $a_1=-12$.

В первом случае $a_6=4\cdot 2^5=128$, во втором – $a_6=-12\cdot(-2)^5=384$.

1-2. Ответ: 162 или -324.

1-3. Ответ: 64 или 192.

1-4. Ответ: 486 или 243.

2-1. Ответ: $\frac{60}{3599}$. Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $\sin(180x°)=\sin(3x°)$,

откуда $\left[\begin{array}{l}180x=3x+360n,\\180x=180-3x+360m,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{120}{59}n,\\x=\frac{60}{61}+\frac{120}{61}m,\end{array}\right. \quad n,m\in\mathbb{Z}$.

Корни из одной и той же серии отличаются не менее, чем на 1. Найдём расстояние между корнями из разных серий: $\left|\frac{120}{59}n-\frac{60}{61}-\frac{120}{61}m\right|=\frac{60}{59\cdot 61}\cdot\left|2n\cdot 61-(2m+1)\cdot 59\right|$.

Поскольку число $(2m+1)\cdot 59$ нечётно, имеем $\left|2n\cdot 61-(2m+1)\cdot 59\right|\geq 1$, причём равенство достигается, например, при $n=m=15$. Значит, ответ: $\frac{60}{59\cdot 61}=\frac{60}{3599}$.

2-2. Ответ: $\frac{180}{32399}$.

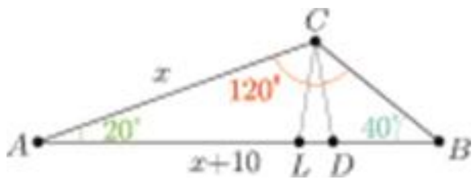
2-3. Ответ: $\frac{90}{8099}$.

2-4. Ответ: $\frac{36}{1295}$.

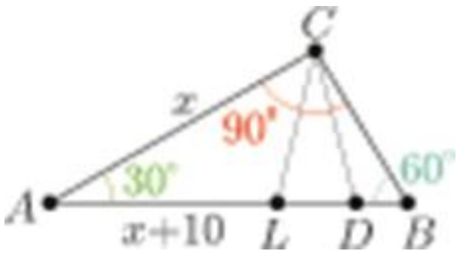
3-1. Ответ: 10 или $5\sqrt{2}\left(3+\sqrt{3}\right)$.

Решение. Пусть наименьший угол треугольника равен α. Тогда еще один угол равен 2α, а третий угол равен или 3α, или 6α. Значит, или $\alpha+2\alpha+3\alpha=180°$, $\alpha=30°$, или $\alpha+2\alpha+6\alpha=180°$, $\alpha=20°$. Значит, углы данного треугольника равны либо $30°$, $60°$, $90°$, либо $20°$, $40°$, $120°$.

Пусть углы треугольника равны $\angle A=20°$, $\angle B=40°$, $\angle C=120°$. По условию $AB=AC+10$. Отметим на отрезке AB такую точку D, что AD = AC. Тогда $BD=10$, $\angle DCA=\angle CDA=80°$. Если CL – биссектриса, то $\angle LCA=60°$, $\angle CLB=80°$, $\angle DCL=20°$, $\angle BCD=40°$. Поэтому ΔDCL и ΔBDC – равнобедренные, и CL = DC = BD = 10.



Если углы треугольника равны $\angle A=30°$, $\angle B=60°$, $\angle C=90°$ и $AB=AC+10$, то аналогично отметим на отрезке AB такую точку D, что AD = AC. Тогда $\angle DCA=\angle CDA=75°$, BD = 10. Если CL – биссектриса, то $\angle LCA=45°$, $\angle CLB=75°$, $\angle DCL=30°$, $\angle BCD=15°$. Значит, по теореме синусов $\frac{CD}{\sin 60°}=\frac{BD}{\sin 15°}$, и $CL=CD=\frac{BD\cdot\sin 60°}{\sin 15°}$ $=\frac{5\sqrt{3}}{\sin 15°}$. Можно посчитать $\sin 15°$, тогда $CL=\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=5\sqrt{3}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)=5\sqrt{2}\left(3+\sqrt{3}\right)$.



Возможно также решение другими способами.

3-2. Ответ: $2\sqrt{2}$ или $6+2\sqrt{3}$.

3-3. Ответ: 20 или $10\sqrt{2}\left(3+\sqrt{3}\right)$.

3-4. Ответ: $3\sqrt{2}$ или $9+3\sqrt{3}$.

4-1. Ответ: $\frac{1}{4}$. Решение. Так как $3x^3-(3a-4)x^2-(2a-3)x+a+2$

$=(x+1)\left(3x^2-(3a-1)x+a+2\right)$, то $x=-1$ будет корнем при всех a.

Решим в целых числах уравнение $3x^2-(3a-1)x+a+2=0$. Его удобно записать в виде

$a(3x-1)=3x^2+x+2$, или $a=\frac{3x^2+x+2}{3x-1}=\frac{x(3x-1)+\frac{2}{3}(3x-1)+\frac{8}{3}}{3x-1}=x+\frac{2}{3}+\frac{8}{3(3x-1)}$.

Поэтому $3a=3x+2+\frac{8}{3x-1}$, и значит, $3x-1$ равно одному из чисел ±1, ±2, ±4, ±8. В итоге получаем целые решения: $x = 1$, если $a = 3$; $x = 3$, если $a = 4$; $x = 0$, если $a=-2$; $x=-1$, если $a=-1$.

Таким образом, при всех a, кроме $a = 3, 4, -2$ и -1, исходное уравнение имеет один целый корень $x=-1$, а других целых корней не имеет.

При $a=3$ уравнение имеет целые корни $x=-1$, $x=1$ и корень $x=\frac{5}{3}$.

При $a=4$ уравнение имеет целые корни $x=-1$, $x=3$ и корень $x=\frac{2}{3}$.

При $a=-2$ уравнение имеет целые корни $x=-1$, $x=0$ и корень $x=-\frac{7}{3}$.

При $a=-1$ уравнение имеет два корня: $x=-1$ и $x=-\frac{1}{3}$.

Поэтому три различных корня, из которых два будут целыми, получаются в 3 случаях из 12.

Вероятность равна $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

4-2. Ответ: $\frac{1}{6}$.

4-3. Ответ: $\frac{1}{4}$.

4-4. Ответ: $\frac{1}{6}$.

5-1. Ответ: 86. Решение. Обозначим через $F(n)$ количество *n*-буквенных слов. Получаем $F(1)=1$ (слово А), $F(2)=0$, $F(3)=1$ (слово АБА), $F(4)=1$ (слово АББА), $F(5)=1$ (слово АБАБА), $F(6)=2$ (слова АББАБА и АБАББА).

Дальнейший прямой подсчёт становится очень громоздким. Получить $F(7)$, $F(8)$, $F(9)$ ещё можно, но чем больше *n*, тем больше времени требуется. Можно заметить следующее.

Так как из любого слова новое слово образуется добавление справа либо двух букв БА, либо трех букв ББА, то $F(n)=F(n-3)+F(n-2)$. Тогда последовательно получаем:

$F(7)=F(4)+F(5)=2$, $F(8)=F(5)+F(6)=3$, $F(9)=F(6)+F(7)=4$,

$F(10)=F(7)+F(8)=5$, $F(11)=F(8)+F(9)=7$, $F(12)=F(9)+F(10)=9$,

$F(13)=F(10)+F(11)=12$, $F(14)=F(11)+F(12)=16$, $F(15)=F(12)+F(13)=21$,

$F(16)=F(13)+F(14)=28$, $F(17)=F(14)+F(15)=37$, $F(18)=F(15)+F(16)=49$,

$F(19)=F(16)+F(17)=65$, $F(20)=F(17)+F(18)=86$.

Для других вариантов: $F(21)=F(18)+F(19)=114$, $F(22)=F(19)+F(20)=151$.

Возможны и другие способы решения. Например, рассмотрим, вместо 20-буквенного слова, соответствующее 19-буквенное слово, образующееся из 20-буквенного вычёркиванием последней буквы А. Проанализировав условие задачи, заметим, что любое такое слово состоит из *m* двухбуквенных наборов АБ и *n* трехбуквенных наборов АББ. При этом $2m+3n=19$.

Решение данного уравнения в целых числах: $m=5-3k$, $n=3+2k$, $k\in\mathbb{Z}$, что приводит к трём решениям в натуральных числах: (m, n) = (2, 5), (5, 3) или (8, 1).

С учетом перестановок каждое из этих решений соответственно дает следующие количества слов: $\frac{7!}{2!5!}=21$, $\frac{8!}{3!5!}=56$, $\frac{9!}{8!1!}=9$. Итого: 21 + 56 + 9 = 86 слов.

5-2. Ответ: 65.

5-3. Ответ: 114.

5-4. Ответ: 151.