Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заочного этапа 2019/2020 учебного года для 9 класса

1. Известно, что у правильного треугольника, квадрата, правильного пятиугольника и правильного шестиугольника все углы составляют целое число градусов. Сколько существует различных типов правильных многоугольников обладающих этим свойством?

Ответ: 22.

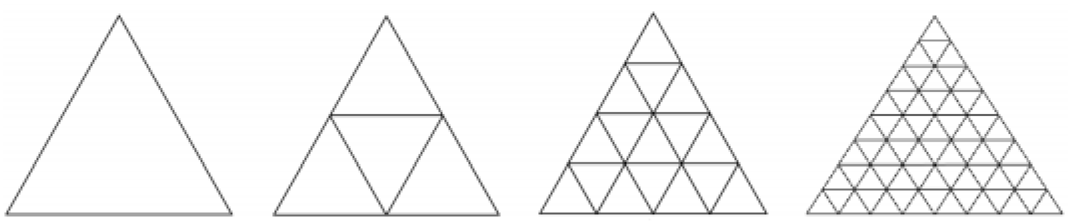
2. Назовем *парными* два различных числа, если десятичная запись одного совпадает с десятичной записью другого в обратном порядке. Например, числа 2019 и 9102 – парные. Сколько пар таких чисел, где оба числа лежат в диапазоне [400;900]? (Пары (*a,b*) и (*b,a*) считаем за одну пару.)

Ответ: 100 пар.

3. Найдите наименьшее натуральное *N*, для которого найдется натуральное *n*, такое, что $n^5 - 5n^3 + 4n$ не делится на *N* без остатка.

Ответ: *N*=7.

4. Петр строит последовательность фигур по следующему правилу: первая фигура – равносторонний треугольник. Каждая последующая получается из предыдущей путем соединения середин сторон в образующих ее правильных равносторонних треугольниках (см. рис.).



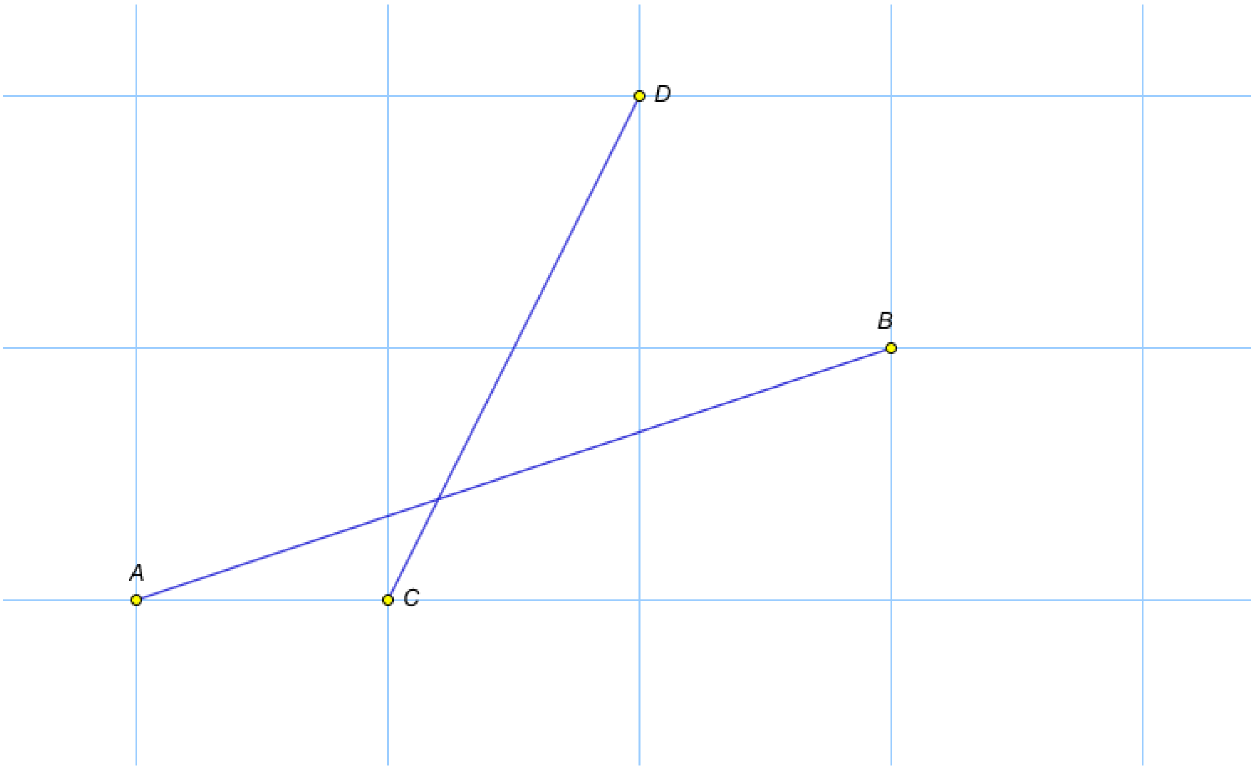
Петр заметил, что суммарное количество треугольников в *n*-й и *n*+1-й фигурах равно 20480. Чему равно *n*?

Ответ: n=7.

5. Про натуральные числа a и b известно, что a^b имеет пять натуральных делителей, а b^a- семь натуральных делителей. Сколько делителей у произведения $a \cdot b$?

Ответ: 6.

6. На клетчатой бумаге нарисовали отрезки *AB* и *CD* как показано на рисунке:



Найдите угол, образованный этими отрезками.

Ответ: $45°$.

7. Назовем *тройственными* числа, которые либо сами являются целыми неотрицательными степенями числа 3 либо представимы как сумма нескольких различных степеней. Например, число $13 = 3^2 + 3 + 1$ - тройственное, а 14 – нет. Тройственные числа выписали в порядке возрастания: 1, 3, 4, 9, 10,…

Какое число будет на 33-м месте в этой последовательности?

Ответ: $3^5 + 1$