Отборочный этап олимпиады «Покори Воробьёвы горы!» по математике состоял из блиц-тура (5 задач, 3 часа на решение) и творческой части (5 задач, решение которых нужно было отправить в течение недели).

Отборочный этап. Блиц-тур

Каждый участник блиц-тура получал свой набор задач, отличающийся от наборов задач других участников. Приводим типичный набор из пяти задач этого блиц-тура.

1. Решите неравенство
$$\frac{4+\sqrt{-3-x}}{3-|x+4|} \leqslant 1.$$
В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству и не превосходящих по абсолютной величине 12.

Решение. Переносим 1 в левую часть и приводим к общему знаменателю:
$$\frac{1+\sqrt{-3-x}+|x+4|}{3-|x+4|} \leqslant 0.$$
При $x > -3$ подкоренное выражение отрицательно, то есть решений нет. При $x \leqslant -3$ числитель положителен, а, значит,
$$3-|x+4|<0 \Longleftrightarrow |x+4|>3 \Longleftrightarrow x>-1$$
или $x < -7$.

Таким образом, решение неравенства: $x < -7$. Нужные по условию целые корни: -12, -11, $\ldots$, -8. Их сумма равна -50.

Ответ: -50.

$\square$

2. Решите уравнение $\cos 8x = \frac{14}{3}(\cos 2x - \sin 2x)^2 - 1$. В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку $\left[\frac{11\pi}{2}; \frac{13\pi}{2}\right]$, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению
$$1-2\sin^2 4x = \frac{14}{3}(1-\sin 4x) - 1 \Longleftrightarrow 2\sin^2 4x - \frac{14}{3}\sin 4x + \frac{8}{3} = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \sin 4t = 1 \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$
В данный в условии отрезок попадают корни $6\pi + \frac{\pi}{8}$ и $6\pi - \frac{3\pi}{8}$. Их сумма равна $\frac{47\pi}{4} = 36,913\ldots \approx 36,91$.

Ответ: 36,91.

$\square$

3. Найдите сторону BC четырехугольника $ABCD$, если $\angle BAC = \alpha$, $\angle ACD = \beta$, $\angle BCA + \angle CAD = \frac{\pi}{2}$ и $AD = a$. В ответ напишите результат округления найденного числа до двух знаков после запятой.
$$\alpha = \arcsin\frac{5}{13}, \beta = \arcsin\frac{12}{13}, a = 24.$$

Решение. Поскольку сумма углов $\angle BAC + \angle ACD = \arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$, то $\angle BAD + \angle BCD = \pi$. Следовательно, вокруг четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Далее, по теореме синусов $\frac{AD}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin\alpha} \Rightarrow BC = \frac{24\cdot 5}{12} = 10$.

Ответ: 10.

$\square$

4. Решите систему

$$\begin{cases} \log_{x+a}(y^2 - 2cy + c^2) + \log_{y-c}(x^2 + 2xa + a^2) = 4, \\ \log_{x+a}(-2y + 3 + 2c) + \log_{y-c}(2x - 1 + 2a) = 2, \end{cases}$$

если $a = 8$, $c = 20$. Вычислите значения выражения $x_k \cdot y_k$для каждого решения $(x_k,\ y_k)$системы и найдите среди них минимальное. В ответе укажите найденное минимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Решение. Первое уравнение системы при $x > -a$, $x \neq 1 - a$, $y > c$, $y \neq 1 + c$ равносильно уравнению

$$\log_{x+a}(y-c) + \log_{y-c}(x+a) = 2 \Longleftrightarrow \log_{x+a}(y-c) = 1 \Longleftrightarrow y = x + a + c,$$

или при данных значениях $y = x + 28$. Подстановка во второе уравнение приводит к уравнению

$$\log_{x+8}(-2x - 13) + \log_{x+8}(2x + 15) = 2,$$

которое при $-\frac{15}{2} < x < -\frac{13}{2}$, $x \neq -7$ равносильно уравнению

$$\log_{x+8}(-2x-13)(2x+15) = \log_{x+8}(x+8)^2 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (x+8)^2 + (2x+13)(2x+15) = 0 \Longleftrightarrow 5x^2 + 72x + 259 = 0.$$

Из двух получившихся корней $x = -7$ и $x = -\frac{37}{5}$ последнего уравнения только второй входит в ОДЗ. Поэтому $(x; y) = \left(-\frac{37}{5};\ \frac{103}{5}\right)$, и искомая величина равна $-\frac{37\cdot 103}{5\cdot 5} = -152,44$.

Ответ: $-152,44$.

$\square$

5. При сушке абрикосы теряют 10% своей массы, а виноград – 30% массы. Определите, в какой пропорции необходимо взять абрикосы и виноград, чтобы после сушки получилась смесь, содержащая урюка в 2 раза больше, чем изюма. В ответе укажите отношение начальной массы абрикос к массе винограда в виде десятичной дроби, округлив ее при необходимости до двух знаков после запятой.

Решение. Если взять x (кг) абрикос и y (кг) винограда, то после сушки абрикос станет $0{,}9x$, а винограда $0{,}7y$. Так как первая масса должна быть в 2 раза больше второй, то $0{,}9x = 1{,}4y$, то есть $\frac{x}{y} = \frac{14}{9} \approx 1,56$.

Ответ: 1,56.

$\square$