Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **3–1** (Уфа)*

1. Найдите все натуральные числа x и y, удовлетворяющие уравнению $x^3 + 2y^2 = 2016$.

2. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна 93, а сумма следующих 5 членов равна 2976. Найдите сумму первых 7 членов прогрессии.

3. Серединами оснований BC и AD трапеции $ABCD$ являются точки K и L соответственно. Известно, что $AD = 10 \cdot BC$. На боковых сторонах AB и CD взяты, соответственно, точки M и N, так что прямая MN параллельна основаниям трапеции. При каком значении отношения $AM : MB$ сумма площадей треугольников BKN и MNL будет наибольшей?

4. Решите неравенство

$$\sqrt{2\sin x\cos x} > \cos^3 x - \sin^3 x + \sin x\cos x(\sin x - \cos x).$$

5. При каких значениях a и b неравенство $b < 16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}} \leqslant a$ выполняется для всех действительных x?

март 2016 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **3–2** (Уфа)*

1. Найдите все натуральные числа x и y, удовлетворяющие уравнению $8x^2 + y^3 = 2016$.

2. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна 242, а сумма следующих 5 членов равна 58806. Найдите сумму первых 6 членов прогрессии.

3. Серединами оснований BC и AD трапеции $ABCD$ являются точки K и L соответственно. Известно, что $AD = 9 \cdot BC$. На боковых сторонах AB и CD взяты, соответственно, точки M и N, так что прямая MN параллельна основаниям трапеции. При каком значении отношения $AM : MB$ сумма площадей треугольников BKN и MNL будет наибольшей?

4. Решите неравенство

$$\cos^3 x + (\sin x + \cos x)\sin x\cos x + \sin^3 x < \sqrt{-\sin 2x}.$$

5. При каких значениях a и b неравенство $b \leqslant 9^{\frac{6x+3}{4x^2+4x+10}} < a$ выполняется для всех действительных x?

март 2016 г.

*Ответы и решения к варианту **3–1***

1. Перебором, который можно сократить из соображений делимости, получаем.

Ответ: $x = 12, y = 12$, $x = 6, y = 30$.

Ответ к варианту: *3–2*: $x = 6, y = 12$, $x = 15, y = 6$.

2. Получаем систему $\begin{cases} b_1(1+q+\ldots+q^4) = 93, \\ b_1q^5(1+q+\ldots+q^4) = 2976, \end{cases}$

откуда $q = 2$, $b_1 = 3 \Rightarrow S_7 = \dfrac{3(128-1)}{2-1} = 381$.

Ответ: 381.

Решение второго варианта:

Получаем систему $\begin{cases} b_1(1+q+\ldots+q^4) = 242, \\ b_1q^5(1+q+\ldots+q^4) = 58806, \end{cases}$, откуда $q = 3$, $b_1 = 2$

$\Rightarrow S_6 = \dfrac{2(2187-1)}{3-1} = 2186.$

Ответ: 2186.

3. Введем обозначения: $S_{ABCD} = S$, $AD = k \cdot BC$ $(k > 1)$, $BC = a$, высота трапеции $ABCD$ — h, $x = \dfrac{MB}{AB}$. Тогда $S = \frac{a+ka}{2}h$, откуда $ah = \frac{2S}{1+k}$. Получаем: $S_{BKN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot hx = \frac{xS}{2(1+k)}$. Так как $MN = x(k-1)a + a$, то

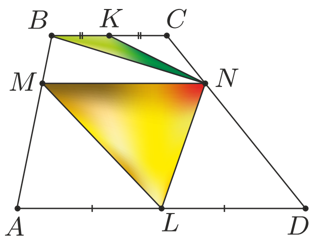


Рис. 1:

$S_{MNL} = \frac{a(x(k-1)+1)}{2} \cdot (1-x)h = \frac{S(x(k-1)+1)(1-x)}{1+k}$.

$$S_{BKN} + S_{MNL} = \frac{S}{2(1+k)}(2x^2(1-k) + x(2k-3) + 2).$$

Функция $f(x) = 2x^2(1-k) + x(2k-3) + 2$ имеет максимум при $x_0 = \frac{2k-3}{4(k-1)}$. Если $k = 10$, то $x_0 = \frac{17}{36}$, откуда $AM : MB = 19 : 17$.

Ответ: $19 : 17$.

Ответ к варианту: *3–2*: $17 : 15$.

4. Неравенство равносильно неравенству $\sqrt{2\sin x\cos x} > \cos x - \sin x$.

1-ый случай $\begin{cases} \cos x - \sin x < 0 \\ \sin x\cos x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x - \dfrac{\pi}{4}) > 0 \\ \sin 2x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k < x \leqslant \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \pi + 2\pi k \leqslant x < \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k \end{array}\right.$

2-ой случай $\begin{cases} \cos x - \sin x \geqslant 0 \\ 2\sin x\cos x > \cos^2 x - 2\sin x\cos x + \sin^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x - \dfrac{\pi}{4}) \leqslant 0 \\ \sin 2x > \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{12} + 2\pi k < x \leqslant \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \\ \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k \leqslant x < \dfrac{17\pi}{12} + 2\pi k \end{array}\right.$

Ответ: $(\frac{\pi}{12} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k] \cup [\pi + 2\pi k; \frac{17\pi}{12} + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ к варианту: *3–2*: $(\frac{7\pi}{12} + 2\pi k; \pi + 2\pi k] \cup [-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; -\frac{\pi}{12} + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Пусть $t = 2x - 1$. Рассмотрим функцию $f(t) = \frac{t}{t^2+4}$. Так как $t^2 + 4 \geqslant 2\sqrt{4t^2} = 4|t|$, то $-\frac{1}{4} \leqslant \frac{t}{t^2+4} \leqslant \frac{1}{4}$. Значения $\pm\frac{1}{4}$ достигаются при $t = \pm 2$. Следовательно, множество значений функций $g(t) = 16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}} = 16^{\frac{t}{t^2+4}}$ есть полуинтервал $[\frac{1}{2}; 2]$.

Ответ: $a \geqslant 2$, $b < \frac{1}{2}$.

Ответ к варианту: *3–2*: $a > 3$, $b \leqslant \frac{1}{3}$.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **4–1** (Сочи)*

1. На соревнования по легкой атлетике ученики школы приехали на автобусе, вмещающем не более 40 человек. Каждый из них участвовал в одном из видов соревнований. При этом 1/7 часть учеников завоевали золотые медали, 1/4 часть — серебряные и еще 1/4 — бронзовые. На обратном пути медалисты решили собрать деньги и купить по одному торту каждому из спортсменов, оставшемуся без медалей. Сколько тортов им придется покупать?

2. Какие значения может принимать выражение $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$, где x_1 и x_2 — несовпадающие между собой корни уравнения $x^3-2015x+2016=0$?

3. В окружность с центром O вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали AC и BD которого пересекаются в точке M, причем $AM=4$, $AB=6$. Определите, какой может быть наименьшая длина диагонали BD, если известно, что стороны AB и AD равноудалены от точки O.

4. Найдите сумму всех принадлежащих отрезку $[-75;5]$ целых решений неравенства

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+1}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-1}\geqslant \sin\left(\arcsin\frac{x}{10}\right)-\frac{x}{10}.$$

5. Укажите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+2y^2+2y(x-a)+a^2=0,\\ 2^{-2-y}\cdot\log_2 x<1 \end{cases}$$

имеет решения, и найдите эти решения.

март 2016 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **4–2** (Сочи)*

1. На соревнования по легкой атлетике ученики школы приехали на автобусе, вмещающем не более 79 человек. Каждый из них участвовал в одном из видов соревнований. При этом 1/11 часть учеников завоевали золотые медали, 1/4 часть — серебряные и еще 1/4 — бронзовые. На обратном пути медалисты решили собрать деньги и купить по одному торту каждому из спортсменов, оставшемуся без медалей. Сколько тортов им придется покупать?

2. Какие значения может принимать выражение $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$, где x_1 и x_2 — несовпадающие между собой корни уравнения $x^3-2016x+2017=0$?

3. В окружность с центром O вписан четырехугольник $ABCD$, в котором диагональ AC равна 9/2, а сторона AD равна 3. Определите, какой может быть наименьшая длина диагонали BD, если известно, что стороны AB и AD равноудалены от точки O.

4. Найдите сумму всех принадлежащих отрезку $[-5;65]$ целых решений неравенства

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-1}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+1}\geqslant \frac{x}{10}-\sin\left(\arcsin\frac{x}{10}\right).$$

5. Укажите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+2y^2+2y(x+a)+a^2=0,\\ 3^{-3-x}\cdot\log_3 y<1 \end{cases}$$

имеет решения, и найдите эти решения.

март 2016 г.

Ответы и решения к варианту 4–1

1. Общее число учеников школы должно делиться на 7 и на 4, а значит, на 28. Так как по условию это число не более 40, то всего было 28 спортсменов. Призерами стали $(1/7 + 1/4 + 1/4) \cdot 28 = 18$ человек. Значит, остались без медалей 10.

Ответ: $x = 10$.

Ответ к варианту: *4–2*: $x = 18$.

2. *Первый способ*: Так как $x_1^3 - 2015x_1 + 2016 = 0$ и $x_2^3 - 2015x_2 + 2016 = 0$, то $x_1^3 - x_2^3 = 2015 \cdot (x_1 - x_2)$. Значит, $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 2015$.

Второй способ: По теореме Виета (но тогда нужно обосновать наличие трех разных корней): $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2x_3 = -2016$. Поэтому

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 = (-x_3)^2 + \frac{2016}{x_3} = \\ = \frac{x_3^3 + 2016}{x_3} = \frac{2015x_3}{x_3} = 2015.$$

Ответ: 2015.

Ответ к варианту: *4–2*: 2016.

3. Из равноудалённости сторон AB и AD от точки O вытекает их равенство. Следовательно равны углы $\angle ACD = \angle ADB = \angle ABD$. Таким образом

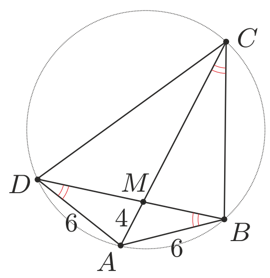


Рис. 2:

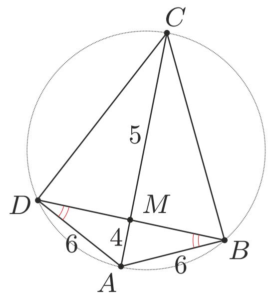


Рис. 3:

треугольники ABM и ACB подобны. Откуда $AB^2 = AM \cdot AC$, т.е. $AC = 9$, а следовательно $MC = 5$. Так как $DM \cdot MB = CM \cdot MA = 5 \cdot 4$, то $DM = 5x$, $MB = 4/x$. Следовательно

$$BD = 5x + \frac{4}{x} = 5\left(x + \frac{4}{5x}\right) \geqslant 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}.$$

Остаётся заметить, что данный случай реализуется, когда AC проходит через центр окружности (см. рис. 3).

Ответ: $4\sqrt{5}$.

Ответ к варианту: *4–2*: $2\sqrt{5}$.

4. Правая часть неравенства равна нулю при $|x| \leqslant 10$ (при остальных x она не определена). Обозначив $\alpha = \frac{\pi x}{4}$, получим:

$$\frac{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha + 1}{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha - 1} \geqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{2\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha - 2\sin^2\alpha} \geqslant 0 \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} \geqslant 0, \\ \sin\alpha \neq 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} \geqslant 0, \\ \operatorname{tg}\alpha \neq 0. \end{cases}$$

Поэтому $x \in [-1 + 4k; 4k) \cup (4k; 4k + 1)$. На отрезке $[-10, 10]$ находятся целые числа -9, -5, -1, 3, 7, из которых на заданном в условии отрезке находятся числа -9, -5, -1, 3 сумма которых равна -12.

Ответ: -12.

Ответ к варианту: *4–2*: 12.

5. Первое уравнение приводится к виду $(x+y)^2+(y-a)^2 = 0$, откуда получаем $x = -a$; $y = a$. Подстановка в неравенство дает:

$$2^{-2-a} \cdot \log_2(-a) < 1 \Longleftrightarrow \log_2(-a) < 2^{2+a}.$$

Равенство достигается при $a = -2$, и ввиду монотонности получаем $a \in (-2; 0)$.

Ответ: $x = -a$; $y = a$ при $a \in (-2; 0)$.
Ответ к варианту: *4–2*: $x = a$; $y = -a$ при $a \in (-3; 0)$.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **5–1** (Барнаул)*

1. Решите уравнение $\sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \cdot \log_2 x = -1$.

2. Футбольный мяч шьется из 32-х кусочков кожи: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый черный кусочек граничит только с белыми кусочками, каждый белый кусочек граничит с тремя черными и тремя белыми. Сколько черных кусочков нужно для изготовления мяча?

3. Решите уравнение

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{16} \cos^4 2x.$$

4. На плоскости основания конуса с высотой, равной радиусу основания, дана точка (вне конуса), удалённая от окружности основания на расстояние равное двум радиусам основания. Найдите угол между касательными плоскостями к боковой поверхности конуса, проходящими через данную точку.

5. Найдите все значения a, при которых имеет единственное решение система

$$\begin{cases} (x^2+1)a = y - \cos x, \\ \sin^4 x + |y| = 1. \end{cases}$$

март 2016 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **5–2** (Барнаул)*

1. Решите уравнение $(1 - \log_2 x) \cdot \sqrt{\log_{\frac{x}{2}} \sqrt{x}} = 1$.

2. Футбольный мяч шьется из 32-х кусочков кожи: черных шестиугольников и белых пятиугольников. Каждый белый кусочек граничит только с черными кусочками, каждый черный кусочек граничит с тремя черными и тремя белыми. Сколько черных кусочков нужно для изготовления мяча?

3. Решите уравнение

$$((\cos x + \sin x)^2 + 28 - \sin 2x) \cos^4 2x = 16 \cos^{10} x + 16 \sin^{10} x.$$

4. На плоскости основания конуса с высотой, равной двум радиусам основания, дана точка (вне конуса), удалённая от окружности основания на расстояние равное радиусу основания. Найдите угол между касательными плоскостями к боковой поверхности конуса, проходящими через данную точку.

5. Найдите все значения a, при которых имеет единственное решение система

$$\begin{cases} (|x|+1)a = y + \cos x, \\ \sin^4 x + y^2 = 1. \end{cases}$$

март 2016 г.

Ответы и решения к варианту ***5–1***

1. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \log_x \sqrt{2x} > 0, \\ \log_2^2 x + \log_2 x - 2 = 0. \end{cases}$$

Последнее уравнение получено после возведения исходного в квадрат и простых преобразований.

Ответ: $x = \frac{1}{4}$.

Ответ к варианту: *5–2*: $x = \frac{1}{2}$.

2. Если черных кусочков x, то белых $32-x$. Так как каждый черный кусочек (пятиугольный) граничит только с белыми, то границ черных и белых кусочков будет $5x$. С другой стороны, таких границ $3\cdot(32-x)$. Из уравнения $5x = 3\cdot(32-x)$ получаем $x = 12$.

Ответ: 12.

Ответ к варианту: *5–2*: 20.

3. Исходное уравнение равносильно

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^5 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^5 = \frac{29}{16}\cos^4 2x \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \frac{2+20\cos^2 2x + 10\cos^4 2x}{32} = \frac{29}{16}\cos^4 2x,$$

Откуда $24\cos^4 2x - 10\cos^2 2x - 1 = 0$, $\cos^2 2x = \frac{1}{2}$, $\cos 4x = 0$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$.

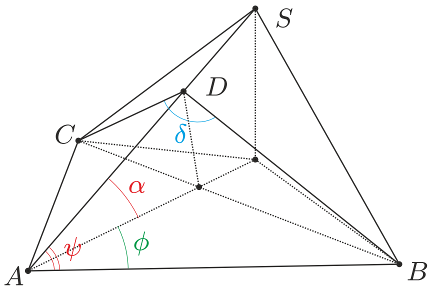
Ответ к варианту: *5–2*: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$.

4. *На плоскости основания конуса с высотой h и радиусом основания R дана точка (вне конуса), удалённая от окружности основания на расстояние aR. Найдите угол между касательными плоскостями к конусу, проходящими через данную точку.*

Первый способ:

Обозначим через L данную точку, через B и C — точки касания плоскостей с окружностью основания, $\varphi = \angle BAO$, $\psi = \angle SAB$, $\alpha = \angle SAO$. Точка K — точка пересечения хорды BC и прямой AO, где O — центр основания конуса. Тогда $\sin\varphi = \dfrac{BO}{OA} = \dfrac{1}{a+1}$, $BA = R\sqrt{a^2+2a}$, $BK = R\cos\varphi = \dfrac{R\sqrt{a^2+2a}}{a+1}$, $KA = BA\cos\varphi = \dfrac{R(a^2+2a)}{a+1}$.

Обозначим через S вершину конуса. Из прямоугольного $\triangle SOA$ находим $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{h}{(a+1)R}$. Следовательно $\sin\alpha = \dfrac{h}{\sqrt{h^2+(a+1)^2R^2}}$. Пусть D — точка основания перпендикуляров, проведённых из точек B и C на прямую SA. Тогда $\delta = \angle BDC$ искомый. Из $\triangle DKA$ находим



$$KD = KA\sin\alpha = \frac{Rh(a^2+2a)}{(a+1)\sqrt{h^2+(a+1)^2R^2}}.$$

$$\operatorname{tg}(\delta/2) = \operatorname{tg}\angle KDB = \frac{BK}{KD} = \frac{\sqrt{h^2+(a+1)^2R^2}}{h\sqrt{a^2+2a}},$$

откуда $\delta = 2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{h^2+(a+1)^2R^2}}{h\sqrt{a^2+2a}}$.

Второй способ: По теоореме косинусов для трёхгранного угла $SABC$ получаем[1]:

$$\cos\delta = \frac{\cos 2\varphi - \cos^2\psi}{\sin^2\psi},$$

где $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{a^2+2a}}{a+1}$, $\sin\psi = \dfrac{SB}{AS} = \dfrac{\sqrt{h^2+R^2}}{h^2+R^2(a+1)^2}$.

Поскольку $h = R$, $a = 2$, то получаем ответ.

Ответ: $2\operatorname{arctg}(\sqrt{5}/2)$.

Ответ к варианту: *5–2*: $2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}/\sqrt{3})$, (здесь $h = 2R$, $a = 1$).

5. Система чётна относительно x. Следовательно, для единственности решения необходимо $x = 0$. Тогда $a = y+1$, $y = \pm 1$, откуда $a = 0$ или $a = 2$. Проверяется, что при $a = 0$ решений бесконечно много, а при $a = 2$ решение единственно.

Ответ: $a = 2$.

Ответ к варианту: *5–2*: $a = -2$.

---

[1] Данное равенство можно доказать выразив BC^2 из двух треугольников BAC и BDC, используя планеметрическую теорему косинусов.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **6–1** (Саратов)*

1. В десятичной записи натурального числа, состоящей только из цифр 4 и 5, количество цифр 5 нечётно и на 17 больше количества цифр 4. Найдите все возможные остатки от деления этого числа на 9.

2. Решите уравнение

$$x + \log_2 x - \log_3 x + \log_4 x - 7 = \left(\frac{3}{4} - \log_3 \sqrt{2}\right) \cdot \log_2 49.$$

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N соответственно. При этом $AM : MB = 3 : 1$, $CN : NB = 1 : 7$. Какой процент от площади четырёхугольника $AMNC$ составляет площадь треугольника MBN?

4. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{2}\sin 3x + \sqrt{2 + \cos 3x}\right)(2\cos(\sqrt{2}\arcsin x) - 1) = 0.$$

5. Найдите количество точек на координатной плоскости, через которые проходит как кривая $(4x^3 - 3x)^{15} = 1 - (4y^3 - 3y)^{16}$, так и кривая $x^2 = 1 - y^2$.

март 2016 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **6–2** (Саратов)*

1. В десятичной записи натурального числа, состоящей только из цифр 2 и 7, количество цифр 7 нечётно и на 29 больше количества цифр 2. Найдите все возможные остатки от деления этого числа на 9.

2. Решите уравнение

$$\log_2 x - \log_3 x + \log_4 x - 5 = \left(\frac{1}{2} - \log_3 \sqrt[3]{2}\right) \cdot \log_2 125 - x.$$

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N соответственно. При этом $AM : MB = 1 : 3$, $CN : BN = 4 : 9$. Какой процент от площади четырёхугольника $AMNC$ составляет площадь треугольника MBN?

4. Решите уравнение

$$(2\sin(\sqrt{3}\arcsin x) - \sqrt{3})\left(\sqrt{2}\sin 3x + \sqrt{2 + \cos 3x}\right) = 0.$$

5. Найдите количество точек на координатной плоскости, через которые проходит как кривая $(3x - 4x^3)^{13} = 1 - (4y^3 - 3y)^{18}$, так и кривая $x^2 = 1 - y^2$.

март 2016 г.

Решения

1. Пусть N — натуральное число из условия задачи. Из условия вытекает, что количество четвёрок числа N равно $2m$, а пятёрок $2m+17$. Использую свойство равноостаточности деления на 9: *остаток при делении на* 9 *натурального числа равен остатку при деления на* 9 *суммы его цифр.* Получаем

$$N \pmod 9) = 4\cdot 2m + 5(2m+17) \pmod 9) = 5\cdot 17 \pmod 9) = 4.$$

Ответ: 4. Ответ к варианту: *6–2*: 5.

2. Уравнение равносильно $x+\log_2 x-\log_3 x+\log_4 x = 7+\log_2 7-\log_3 7+\log_4 7$. Поскольку $f(x) = \log_2 x - \log_3 x + \log_4 x = \log_2 x\cdot\left(1-\log_3 2+\frac{1}{2}\right) = \log_2 x\cdot\log_3\left(\frac{3^{3/2}}{2}\right)$ — монотонно возрастает, то функция $x+f(x)$ также монотонно возрастает на области определения. Следовательно решение $x=7$ является единственным решением данного уравнения.

Ответ: 7. Ответ к варианту: *6–2*: 5.

3. Отношение площади треугольника MBN к площади треугольника ABC равно $\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{32}$. Поэтому отношение площади четырёхугольника $AMNC$ к площади треугольника ABC равно $1-\frac{7}{32}=\frac{25}{32}$. Искомое отношение равно $\frac{7}{25}\cdot 100 = 28\%$.

Ответ: 28%.

Ответ к варианту: *6–2*: 108%.

4. *Решение.* О.Д.З. данного уравнения $x\in[-1;1]$. Выясним, когда каждый множитель равен нулю.

I. Решим уравнение

$$\sqrt{2}\sin 3x+\sqrt{2+\cos 3x}=0 \iff -\sqrt{2}\sin 3x = \sqrt{2+\cos 3x} \iff$$
$$\iff \begin{cases} 2\sin^2 3x = 2+\cos 3x,\\ \sin 3x \leqslant 0.\end{cases} \iff \begin{cases} 2\cos^2 3x+\cos 3x = 0,\\ \sin 3x\leqslant 0.\end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l}\cos 3x = 0,\\ \cos 3x = -1/2,\end{array}\right.\\ \sin 3x\leqslant 0.\end{cases}$$

Уравнение $\cos 3x = 0$ равносильно

$$3x = \pi/2+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\quad 3x = -\pi/2+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Но, первая серия не подходит из-за ограничения $\sin 3x\leqslant 0$. Таким образом из серии $x=-\pi/6+2\pi n/3$, $n\in\mathbb{Z}$ надо отобрать решения, подходящии под О.Д.З., т.е. $x\in[-1;1]$.

$$n\geqslant 1 \Longrightarrow -\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}\geqslant -\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}>1\Longrightarrow\emptyset,$$
$$n=0\Longrightarrow -\frac{\pi}{6}\in[-1;1],$$
$$n\leqslant -1\Longrightarrow -\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}\leqslant -\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6}<-1\Longrightarrow\emptyset.$$

Итак, уравнение $\cos 3x = 0$ дало единственное решение $x=-\pi/6$. Аналогично разбирается уравнение $\cos 3x = -1/2$, решением которого, с учетом О.Д.З., будет $x=-2\pi/9$.

II. Решим второе уравнение $2\cos(\sqrt{2}\arcsin x)-1=0$. Откуда

$$\cos(\sqrt{2}\arcsin x) = 1/2 \iff \sqrt{2}\arcsin x = \pm\pi/3+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\iff$$
$$\iff \arcsin x = \pm\frac{\pi}{3\sqrt{2}}+\sqrt{2}\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Поскольку множеством значений функции $\arcsin x$ является отрезок $[-\pi/2;\pi/2]$, то требуется проверить, чтобы правая часть последнего уравнения не выходила за данный отрезок.

$$n\geqslant 1\Longrightarrow \pm\frac{\pi}{3\sqrt{2}}+\sqrt{2}\pi n\geqslant \frac{5}{3\sqrt{2}}\,\pi>\frac{\pi}{2}\Longrightarrow\emptyset,$$
$$n=0\Longrightarrow\pm\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\in[-\pi/2;\pi/2],$$
$$n\leqslant -1\Longrightarrow \pm\frac{\pi}{3\sqrt{2}}+\sqrt{2}\pi n\leqslant -\frac{5}{3\sqrt{2}}\,\pi<-\frac{\pi}{2}\Longrightarrow\emptyset.$$

Таким образом второе уравнение равносильно $\arcsin x = \pm\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$, т.е. $x=\pm\sin(\pi/(3\sqrt{2}))$.

Ответ: $-\pi/6$, $-2\pi/9$, $\pm\sin(\pi/(3\sqrt{2}))$.
Ответ к варианту: *6–2*: $-\pi/6$, $-2\pi/9$, $\sin(\pi/(3\sqrt{3}))$, $\sin(2\pi/(3\sqrt{3}))$. □

5. После замены $x=\cos\alpha$, $y=\sin\alpha$ второе уравнение выполнено, а первое запишется в виде $\cos^{15}3\alpha+\sin^{16}3\alpha = 1$. Из цепочки

$$1=\cos^{15}3\alpha+\sin^{16}3\alpha\leqslant\cos^2 3\alpha+\sin^2 3\alpha = 1$$

следует, что $\cos^{15}3\alpha = \cos^2 3\alpha$ и $\sin^{16}3\alpha=\sin^2 3\alpha$. Значит, либо $3\alpha=\pi/2+\pi k$, либо $3\alpha = 2\pi k$, то есть $\alpha=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$ или $\alpha=\frac{2\pi n}{3}$. Получается 9 пар решений (x,y):

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\pm\frac{1}{2}\right);\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\pm\frac{1}{2}\right);\ \left(-\frac{1}{2};\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\ (0;\pm1);(1;0).$$

Ответ: 9.

Ответ к варианту: *6–2*: 9.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **7–1** (Йошкар-Ола)*

1. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{3}{2x-y}-\frac{2}{2x+y}-\frac{1}{2x-5y}\right):\frac{y^2}{4x^2-y^2}$$

при $x=\frac{4}{3}$, $y=\frac{7}{3}$.

2. Решите неравенство

$$\log_{3x}(x+1)-(x+1)^{(\log_{\cos 5}\sqrt{x+1})^{-1}}<\sin^2 5.$$

3. Для бригады маляров-учеников была запланирована окраска 360 кв.м. стен. Перед началом работы один из учеников заболел и вместо него работал мастер, производительность которого в 3 раза больше производительности каждого из учеников. Поэтому каждый из учеников в действительности покрасил на 6 кв.м. меньше чем планировалось. Все ученики и мастер работали одинаковое время. Сколько учеников работало?

4. Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ равен $\operatorname{arctg} 3$. В каком отношении делит боковую сторону SB сфера, центр которой лежит в плоскости основания, если известно, что вершины основания принадлежат сфере?

5. Найдите сумму первых ста положительных корней уравнения:

$$\cos(8\pi x)+2\cos(4\pi x)-\cos(2\pi x)+2\sin(\pi x)+3=0.$$

март 2016 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **7–2** (Йошкар-Ола)*

1. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{x+1}{x^2+2xy+y^2}-\frac{1}{x^2-y^2}\right)\cdot\frac{(x-y)^2}{x^2-2y-xy}+\frac{y-x}{(x-y)^2}$$

при $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{8}{3}$.

2. Решите неравенство

$$(1-x)^{(\log_{\sin 7}\sqrt{1-x})^{-1}}>\log_{(-3x)}(1-x)-\cos^2 7.$$

3. Для бригады маляров-учеников была запланирована окраска 420 кв.м. стен. Перед началом работы один из учеников заболел и вместо него работал мастер, производительность которого в 3 раза больше производительности каждого из учеников. Поэтому каждый из учеников в действительности покрасил на 5 кв.м. меньше чем планировалось. Все ученики и мастер работали одинаковое время. Сколько учеников работало?

4. Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ равен $\operatorname{arctg} 5$. В каком отношении делит боковую сторону SB сфера, центр которой лежит в плоскости основания, если известно, что вершины основания принадлежат сфере?

5. Найдите сумму первых ста положительных корней уравнения:

$$\cos(8\pi x)+2\cos(4\pi x)-\cos(2\pi x)-2\sin(\pi x)+3=0.$$

март 2016 г.

*Ответы и решения к варианту **7–1***

1. $\dfrac{3(2x+y)}{y^2}-\dfrac{2(2x-y)}{y^2}-\dfrac{4x^2-y^2)}{y^2(2x-5y)}=\dfrac{2x+5y)}{y^2}-\dfrac{4x^2-y^2)}{y^2(2x-5y)}=-\dfrac{24}{2x-5y}$.
При $x=\frac{4}{3}$, $y=\frac{7}{3}$ получаем $\frac{24}{9}=\frac{8}{3}$.

Ответ: $\frac{8}{3}$.

Решение второго варианта: $\frac{x-y}{(x+y)^2}+\frac{y-x}{(x-y)^2}=\frac{-4xy(x-y)}{(x^2-y^2)^2}=\frac{32}{189}$.

Ответ: $\frac{32}{189}$.

2. Область допустимых значений неравенства $(0;1/3)\cup(1/3;+\infty)$. Неравенство равносильно

$$\log_{3x}(x+1)<1\Longleftrightarrow(3x-1)(x+1-3x)<0\Longleftrightarrow(3x-1)(1-2x)<0.$$

Откуда, с учётом области допустимых значений исходного неравенства, получаем $x\in(0;1/3)\cup(1/2;+\infty)$.

Ответ: $x\in(0;1/3)\cup(1/2;+\infty)$.

Ответ к варианту: *7–2*: $x\in(-\infty;-1/2)\cup(-1/3;0)$.

3. Пусть N кв.м. надо покрасить, x — количество учеников, v — производительность каждого ученика, t_1 — время, за которое будет выполнена работа. Тогда выполнено, что $xvt_1=N$ и каждый ученик должен был покрасить $vt_1=\frac{N}{x}$ кв. м.

В условии задачи производительность мастера больше производительности каждого ученика в k раз ($k>1$). Поэтому в случае, когда один из учеников заболел, а его заменил мастер будет выполнено $((x-1)v+kv)t_2=N$, где t_2 — время, за которое будет выполнено работа. Тогда $vt_2=\frac{N}{x+k-1}$ кв. м.

Условие, что каждый оставшийся ученик, покрасил на a кв.м. меньше равносильно уравнению $\frac{N}{x}=\frac{N}{x+k-1}+a\Leftrightarrow(x+k-1)x=\frac{(k-1)N}{a}$. При $N=360$, $k=3$, $a=6$ получаем $(x+2)x=120\Rightarrow x=10$.

Ответ: 9.

Ответ к варианту: *7–2*: 11.

4. Центр сферы совпадает с центром O треугольника ABC. Если сфера пересекает ребро SB в точке P, то $OP=OB$ и перпендикуляр OQ к ребру SB является медианой треугольника POB. Обозначим сторону основания через a, через $\alpha=\operatorname{arctg}3$. Пусть M — основание перпендикуляра, проведенного из точки B на сторону AC. Находим $OM=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, $SO=\frac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\alpha$. Прямоугольные треугольники SOB и OQB подобны: $\frac{BQ}{BO}=\frac{BO}{SB}$. Получаем: $\frac{BQ}{SB}=\frac{BO^2}{SB^2}=\frac{4}{4+\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\frac{SP}{PB}=(1-2\frac{BQ}{SB}):2\frac{BQ}{SB}=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-4}{8}=\frac{5}{8}$.

Ответ: 5/8.

Ответ к варианту: *7–2*: 21/8.

5. Обозначим $\alpha=\pi x$.

$$\cos(8\alpha)+2\cos(4\alpha)-\cos(2\alpha)+2\sin(\alpha)+3=0\Longleftrightarrow$$
$$2\cos^2 4\alpha-1+2\cos 4\alpha-1+2\sin^2\alpha+2\sin\alpha+3=0\Longleftrightarrow$$
$$2\left(\cos 4\alpha+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\sin\alpha+\frac{1}{2}\right)^2=0.$$

Откуда

$$\begin{cases}\cos 4\alpha=-1/2,\\ \sin\alpha=-1/2\end{cases}\Longleftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha=-\frac{\pi}{6}+2\pi m, m\in\mathbb{Z},\\ \alpha=-\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Следовательно $x=-1/6+2m$, $x=-5/6+2n$, $m,n\in\mathbb{Z}$. Сумма первых двух положительных корней: $1\frac{1}{6}+1\frac{5}{6}=3$. Следующие два положительных корня больше на 4, т.е. равны 7 и т.д. Искомая сумма равна

$$3+7+11+\dots+(3+4\cdot 49)=\frac{6+4\cdot 49}{2}\cdot 50=5050.$$

Ответ: 5050.

Ответ к варианту: *7–2*: 4950.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **17-1** (Москва)*

1. Сравните числа $(\sin 1 + \cos 1)$ и $\frac{49}{36}$. Ответ обоснуйте.

2. Два мальчика в течение нескольких часов ходили кругами вокруг здания, оба по часовой стрелке, каждый с постоянной скоростью. Более быстрый проходил один круг за 5 минут, а более медленный — за некоторое целое число минут. При этом время между встречами тоже равнялось некоторому целому числу минут, причём оно было не меньше 12. За какое время более медленный мальчик проходил полный круг?

3. Найдите минимальное значение выражения

$$\sqrt{(x+6)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-4)^2}$$

при условии $2|x|+3|y|=6$.

4. Решите уравнение

$$[\log_2(\log_3 x)]^2 - 11\log_2([\log_3 x]) + 18\log_2(\log_3([x])) = 0$$

(через $[t]$ обозначена целая часть числа t, то есть наибольшее целое число, не превосходящее t).

5. Боковые рёбра SA, SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ взаимно перпендикулярны. Точка D лежит на основании пирамиды ABC на расстоянии $\sqrt{5}$ от ребра SA, на расстоянии $\sqrt{13}$ от ребра SB и на расстоянии $\sqrt{10}$ от ребра SC. Какое наименьшее значение может иметь объём пирамиды $SABC$ при этих условиях?

март 2016 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **17-2** (Москва)*

1. Сравните числа $\frac{26}{19}$ и $\left(\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}\right)$. Ответ обоснуйте.

2. Два водителя в течение нескольких часов ездили кругами по кольцевой трассе, оба против часовой стрелки, каждый с постоянной скоростью. Более быстрый проезжал один круг за 3 минуты, а более медленный — за некоторое целое число минут. При этом время между обгонами более медленного водителя более быстрым тоже равнялось некоторому целому числу минут, причём оно было больше 7. Каким было время между обгонами?

3. Найдите минимальное значение выражения

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+6)^2}$$

при условии $2|x|+|y|=4$.

4. Решите уравнение

$$[\log_3(\log_2 x)]^2 - 10\log_3([\log_2 x]) + 21\log_3(\log_2([x])) = 0$$

(через $[t]$ обозначена целая часть числа t, то есть наибольшее целое число, не превосходящее t).

5. Точка D лежит на основании ABC треугольной пирамиды $SABC$ на расстоянии 5 от ребра SA, на расстоянии $2\sqrt{5}$ от ребра SB и на расстоянии $\sqrt{13}$ от ребра SC. Боковые рёбра SA, SB и SC этой пирамиды взаимно перпендикулярны. Какое наименьшее значение может иметь объём пирамиды $SABC$ при этих условиях?

март 2016 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **17-3** (Москва)*

1. Определите, какое из чисел $\frac{42}{31}$ и $(\sin 1 + \cos 1)$ больше. Ответ обоснуйте.

2. Два спортсмена в течение нескольких часов бегали кругами вокруг озера, оба по часовой стрелке, каждый с постоянной скоростью. Более быстрый пробегал один круг за 7 минут, а более медленный — за некоторое целое число минут. При этом время между встречами тоже равнялось некоторому целому числу минут, причём оно было не меньше 16. Каким было время между встречами?

3. Найдите минимальное значение выражения

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+9)^2}$$

при условии $3|x|+|y|=6$.

4. Решите уравнение

$$[\log_2(\log_3 x)]^2 - 8\log_2([\log_3 x]) + 15\log_2(\log_3([x])) = 0$$

(через $[t]$ обозначена целая часть числа t, то есть наибольшее целое число, не превосходящее t).

5. Боковые рёбра SA, SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ взаимно перпендикулярны. Точка D лежит на основании пирамиды ABC на расстоянии $\sqrt{13}$ от ребра SA, на расстоянии $\sqrt{10}$ от ребра SB и на расстоянии $\sqrt{5}$ от ребра SC. Какое наименьшее значение может иметь объём пирамиды $SABC$ при этих условиях?

март 2016 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **17-4** (Москва)*

1. Определите, какое из чисел $\left(\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}\right)$ и $\frac{40}{29}$ меньше. Ответ обоснуйте.

2. Два водителя ездили кругами по кольцевой трассе, оба против часовой стрелки, каждый с постоянной скоростью. Более быстрый проезжал один круг за 3 минуты, а более медленный — за некоторое целое число минут. При этом время между обгонами более медленного водителя более быстрым тоже равнялось некоторому целому числу минут, причём оно было больше 8. За какое время проезжал круг более медленный водитель?

3. Найдите минимальное значение выражения

$$\sqrt{(x+4)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+2)^2}$$

при условии $|x|+2|y|=2$.

4. Решите уравнение

$$[\log_3(\log_2 x)]^2 - 12\log_3([\log_2 x]) + 20\log_3(\log_2([x])) = 0$$

(через $[t]$ обозначена целая часть числа t, то есть наибольшее целое число, не превосходящее t).

5. Точка D лежит на основании ABC треугольной пирамиды $SABC$ на расстоянии $2\sqrt{5}$ от ребра SA, на расстоянии $\sqrt{13}$ от ребра SB и на расстоянии 5 от ребра SC. Боковые рёбра SA, SB и SC этой пирамиды взаимно перпендикулярны. Какое наименьшее значение может иметь объём пирамиды $SABC$ при этих условиях?

март 2016 г.

*Решения варианта **17-1** и ответы ко всем вариантам*

1. Функция $f(x) = \sin x + \cos x$ убывает на отрезке $[\pi/4; \pi/2]$ (монотонность можно обосновать равенством $f(x) = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$, либо при помощи производной, либо напрямую, используя определение). Значит, $\sin 1 + \cos 1 > \sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Остаётся убедиться в справедливости оценки $\frac{1+\sqrt{3}}{2} > \frac{49}{36}$. Действительно,

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \vee \frac{49}{36} \iff 1+\sqrt{3} \vee \frac{49}{18} \iff \sqrt{3} \vee \frac{31}{18} \iff 3 > \frac{961}{324}.$$

Ответ: первое число больше.

Ответ к варианту ***17-2***: первое число больше.

Ответ к варианту ***17-3***: второе число больше.

Ответ к варианту ***17-4***: второе число больше.

2. Обозначим через n время в минутах за которое проходит круг более медленный мальчик. Тогда $n > 5$, $n \in \mathbb{N}$. Скорость с которой более быстрый мальчик догоняет медленного равна

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{n} = \frac{n-5}{5n}\left(\frac{\text{круг}}{\text{мин}}\right),$$

поэтому время между встречами составляет

$$\frac{5n}{n-5} = \frac{5(n-5)+25}{n-5} = 5 + \frac{25}{n-5}\,(\text{мин}),$$

а поскольку это целое число, то $(n-5)$ делит 25. Натуральные делители 25 — числа 1; 5 и 25. Тогда $n = 6$ или $n = 10$ или $n = 30$, что соответствует времени между встречами 30 минут, 10 минут и 6 минут. Поскольку время между встречами не менее 12 минут, заданному условию удовлетворяет только $n = 6$.

Ответ: 6 мин.

Ответ к варианту ***17-2***: 12 мин.

Ответ к варианту ***17-3***: 56 мин.

Ответ к варианту ***17-4***: 4 мин.

3. Поскольку выражение $\sqrt{(x+6)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y-4)^2}$ равно сумме расстояний от точки $(x;y)$ до точек с координатами $(-6;0)$ и $(0;4)$, а геометрическое место решений уравнения $2|x| + 3|y| = 6$ на плоскости есть ромб

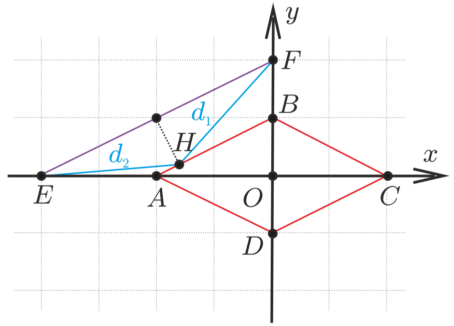


Рис. 4:

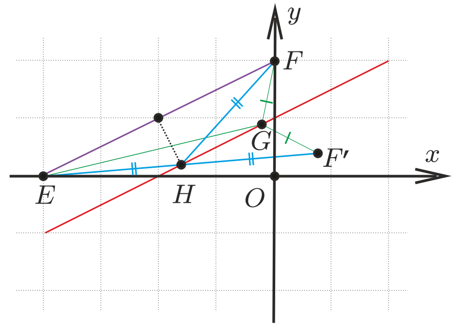


Рис. 5:

с вершинами $(3;0)$, $(0;-2)$, $(-3;0)$ и $(0;2)$, то задача равносильна поиску минимума суммы расстояний от точки, лежащей на указанном ромбе, до точек с координатами $(-6;0)$, $(0;4)$ (см. рис. 1).

Докажем, что минимум этой суммы достигается в точке, лежащей на стороне ромба и равноудалённой от точек $(-6;0)$ и $(0;4)$. Пусть точка G лежит на прямой l, параллельной EF и удалённой от прямой EF на расстояние h (см. рис. 2). Пусть также точка H на прямой l такова, что $EH = HF$, а точка F' симметрична точке F относительно прямой l. Тогда получаем

$$EG + FG \geqslant EH + HF' = EH + HF,$$

причём неравенство обращается в равенство лишь при совпадении точек G и H.

В нашем случае сторона ромба AB параллельна EF, а точка H прямой AB, для которой $EH = FH$, лежит на стороне ромба. Сумма расстояний от любой другой точки ромба до точек E и F превосходит $EH + FH$. Остаётся найти EF и расстояние между прямыми EF и AB. Применяя теорему Пифагора, получаем $EF = \sqrt{16+36} = 2\sqrt{13}$. Расстояние между прямыми равно расстоянию от начала координат до прямой AB (например, это следует из подобия прямоугольных треугольников), поэтому

$$h \cdot AB = AO \cdot BO \Longrightarrow h = \frac{6}{\sqrt{13}}.$$

Таким образом, $EH + HF = 2\sqrt{\frac{36}{13} + 13} = 2\sqrt{\frac{205}{13}}$.

Ответ: $2\sqrt{\frac{205}{13}}$.

Замечание 1. Расстояние между параллельными прямыми $\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1$ и $\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=2$ можно найти сразу по формуле $\varrho=\frac{|2-1|}{\sqrt{1/9+1/4}}=\frac{6}{\sqrt{13}}$, либо по формуле расстояния от точки до прямой.

Замечание 2. Можно найти явный вид координат точки $H=(\frac{27}{13};\frac{8}{13}$.

Ответ к варианту ***17-2***: $\sqrt{\frac{241}{5}}$.

Ответ к варианту ***17-3***: $2\sqrt{\frac{117}{5}}$.

Ответ к варианту ***17-4***: $2\sqrt{\frac{29}{5}}$.

4. Уравнение имеет смысл при $[\log_3 x]>0 \iff \log_3 x\geqslant 1 \iff x\geqslant 3$.

Покажем, что при всех $x\geqslant 3$ справедливо неравенство $\log_3[x]\geqslant[\log_3 x]$ (на самом деле, это неравенство верно при всех $x\geqslant 1$, но нам это не требуется). Действительно, для любого $x\geqslant 3$ существует такое натуральное число k, что $x\in[3^k;3^{k+1})$, а тогда $[x]\in[3^k;3^{k+1})$, поэтому $\log_3[x]\geqslant k=[\log_3 x]$.

Следовательно,

$$f(x)=[\log_2(\log_3 x)]^2-11\log_2([\log_3 x])+18\log_2(\log_3([x]))\geqslant$$
$$\geqslant[\log_2(\log_3 x)]^2+7\log_2([\log_3 x])\geqslant 7\log_2([\log_3 x])\geqslant 0.$$

При $x\geqslant 9$ получаем $[\log_2(\log_3 x)]\geqslant 1>0$, поэтому на этом луче решений нет. На полуинтервале $[4;9)$ имеем $\log_2([\log_3 x])=0<\log_2(\log_3([x]))$, поэтому на этом промежутке решений также нет (первое неравенство в оценке $f(x)$ становится строгим). Наконец, любое число из полуинтервала $[3;4)$ является решением.

Ответ: $x\in[3;4)$.

Ответ к варианту ***17-2***: $x\in[2;3)$.

Ответ к варианту ***17-3***: $x\in[3;4)$.

Ответ к варианту ***17-4***: $x\in[2;3)$.

5. Опустим перпендикуляры DD_1, DD_2, DD_3 из точки D на плоскости SBC, SAC и SAB соответственно. Обозначим $DD_1=x$, $DD_2=y$, $DD_3=z$. Согласно условию составим систему уравнений

$$\begin{cases} y^2+z^2=5,\\ x^2+z^2=13,\\ x^2+y^2=10.\end{cases}$$

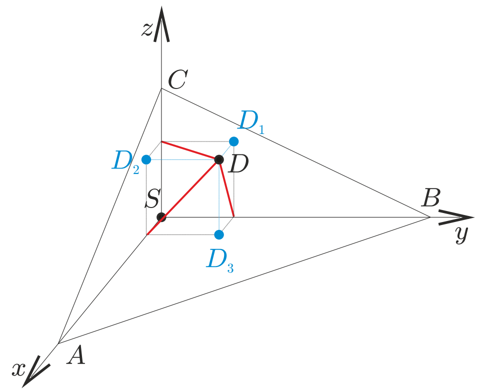


Рис. 6:

Отсюда находим $x=3$, $y=1$, $z=2$. Обозначим длины рёбер SA, SB и SC через a, b и c соответственно. Поскольку точки A, B, C и D лежат в одной плоскости, выполняется соотношение $\frac{3}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}=1$.

Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим для трёх переменных получаем:

$$\frac{\frac{3}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}}{3}\geqslant\sqrt[3]{\frac{3}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{2}{c}}=\sqrt[3]{\frac{6}{abc}}\iff$$
$$\iff 1=\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}\right)^3\geqslant\frac{6\cdot 27}{abc}\iff abc\geqslant 6\cdot 27.$$

причём равенство имеет место при $\frac{3}{a}=\frac{1}{b}=\frac{2}{c}=\frac{1}{3}$. Объём пирамиды $V=\frac{abc}{6}$, поэтому $V\geqslant 27$. Равенство имеет место при $a=9$, $b=3$, $c=6$.

Ответ: 27.

Ответ к варианту ***17-2***: 108.

Ответ к варианту ***17-3***: 27.

Ответ к варианту ***17-4***: 108.