ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!»

Решения задач заочного тура по МАТЕМАТИКЕ

2015/2016 учебный год

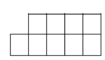
7-8 Классы

1. Деревни “Верхние Васюки” и “Нижние Васюки” расположены на берегу реки. Пароход проходит расстояние от Верхних до Нижних Васюков за один час, а катер — за 45 минут. Известно, что скорость катера в стоячей воде в два раза больше скорости парохода (тоже в стоящей воде). Определите, какое время (в минутах) потребуется плоту, чтобы спуститься из Верхних Васюков в Нижние Васюки?

   Ответ: 90 минут.

   Решение: Возьмем расстояние между деревнями за единицу длины (ед). Тогда скорость парохода по течению равна 1 ед./ч, а катера — 4/3 ед./ч. Следовательно, собственная скорость парохода равна 1/3 ед./ч, откуда скорость течения равна 2/3 ед./ч. Следовательно плот пройдет расстояние 1 ед. за 3/2 часа.

2. Сколькими способами можно разместить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 в девяти клетках фигуры, изображенной на рисунке, так, чтобы сумма чисел в каждом столбце, начиная со второго, была на 1 больше, чем в предыдущем?

   Ответ: 32.

   Решение: Не будем пока следить за порядком чисел в одном столбце.

   Сумма указанных чисел равна 45, обозначим x число стоящее в самой левой нижней клетке. Тогда $5x + 10 = 45$, откуда $x = 7$. Значит сумма чисел во втором столбце равна $8 = 5+3 = 6+2$. Если во втором столбце стоят 3 и 5, то в третьем столбце должны стоять 1 и 8, в четвертом — 6 и 4, в последнем — 2 и 9. Если во втором столбце стоят 6 и 2, то в третьем столбце могут стоять 1 и 8 или 4 и 5. Можно показать, что если в третьем столбце стоят 1 и 8, то невозможно подобрать числа в четвертом столбце. Значит там стоят 4 и 5, тогда в четвертом столбце стоят 1 и 9, а в последнем — 3 и 8. Получилось 2 варианта расстановки без учета порядка.

   Заметим, что в каждом столбце (кроме первого) числа можно менять местами, что дает по 16 вариантов для каждой расстановки. В итоге получаем 32 варианта с учетом порядка чисел в столбцах.

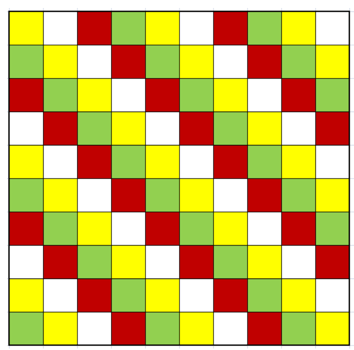
3. Решите ребус (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные). $\begin{array}{cccccc} \text{ч} & \text{е} & \text{т} & \text{ы} & \text{р} & \text{е} \\ + & & & & & \\ \text{ч} & \text{е} & \text{т} & \text{ы} & \text{р} & \text{е} \\ \hline \text{в} & \text{о} & \text{с} & \text{е} & \text{м} & \text{ь} \end{array}$ В ответе укажите десятичную запись числа «четыре».

   Ответ: $239153 + 239153 = 478306$.

4. Доска для игры в «морской бой» имеет размер 10×10. Какое наибольшее число кораблей размера 1×4 можно разместить на ней?

   Ответ: 24.

   Решение: Подбором легко показать, что 24 корабля расположить можно. Раскрасим доску в 4 цвета, как показано на рисунке. Заметим, что каждый корабль размера 1×4 содержит по одной клетке каждого цвета, а клеток желтого цвета будет 24.



5. Пусть $\Sigma(n)$ обозначает сумму цифр числа n. Найдите наименьшее трехзначное n, такое, что $\Sigma(n) = \Sigma(2n) = \Sigma(3n) = \ldots = \Sigma(n^2)$

   Ответ: 999.

   Решение: Обозначим искомое число $\overline{abc}$. Заметим, что это число не меньше 101 (т.к. 100 не подходит). Следовательно $101 \cdot \overline{abc} = \overline{abc00} + \overline{abc}$ тоже имеет такую же сумму цифр. Но у этого числа последние цифры, очевидно, b и c, следовательно, сумма остальных цифр должна быть равна a. Следовательно $\Sigma(\overline{abc} + a) = a$. Если $a < 9$, то $\overline{abc} + a$ — трехзначное число, первая цифра которого не меньше a, что приводит к противоречию, т.к. вторая и третья цифра не могут быть нулями. Таким образом, $a = 9$ и $\overline{abc} + a \leqslant 999 + 9 = 1008$. Поэтому $\overline{abc} + a = \overline{100d}$. Но $\Sigma(\overline{100d}) = a = 9$, следовательно, $d = 8$, откуда $\overline{abc} = 999$.

6. Сравните числа

$$\left(1 + \frac{1}{1755}\right)\left(1 + \frac{1}{1756}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{2015}\right) \text{ и } \sqrt{\frac{8}{7}}.$$

Укажите в ответе «1» если первое из чисел больше; «2», если второе из чисел больше; «0», если числа равны.

Ответ: Первое больше.

Решение: Приведем слева каждую скобку к общему знаменателю, затем пользуемся неравенством $\frac{n \cdot n}{(n-1)(n+1)} > 1$ Тогда получаем, что квадрат первого числа больше, чем $\frac{2015}{1755} = \frac{31}{27} > \frac{8}{7}$.

7. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств
$$\begin{cases} x^3 + y^2 - 3y + 1 < 0, \\ 3x^3 - y^2 + 3y > 0. \end{cases}$$
В ответе укажите произведение всех y для всех таких пар.

Ответ: $(0; 1), (0; 2)$.

Решение: Домножим первое неравенство на -3 и сложим со вторым, получим $-4y^2 + 12y - 3 > 0$. Этому неравенству удовлетворяют всего 2 целых значения — $y = 1$ или $y = 2$. Подставляя в исходную систему, в обоих случаях получаем единственный вариант $x = 0$.)

8. Несколько автобусов (больше трех) в начале рабочего дня поочередно выезжают с постоянными и одинаковыми скоростями из одного пункта в другой. По прибытии в конечный пункт каждый из них, не задерживаясь, разворачивается и едет в обратном направлении. Все автобусы делают одинаковое число рейсов туда и обратно, причем первый автобус заканчивает первый рейс позже, чем в первый рейс выезжает последний автобус. Каждый водитель подсчитал, сколько раз в течение дня он встретился с остальными автобусами, и в сумме у всех водителей получилось число 300. Определите, сколько было автобусов и сколько рейсов они совершили? В ответе укажите произведение числа автобусов на число рейсов.

Ответ: 52 или 40.

Решение: Если обозначить n — количество автобусов и k — количество рейсов, то можно подсчитать число встреч (например, по графику, иллюстрирующему движение автобусов). Получается, что каждые два автобуса встречаются $2k-1$ раз. Всего получается $n(n-1)(2k-1) = 300$, т.е. надо разложить число 300 на два три множителя, один из которых на 1 меньше другого, а третий нечетный. Есть два варианта: $300 = 4 \times 3 \times 25 = 5 \times 4 \times 15$. Следовательно, $n = 4$, $k = 13$ или $n = 5$, $k = 8$.