ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!»

Решения задач заочного тура по МАТЕМАТИКЕ

2015/2016 учебный год

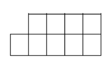
9 Класс

1. Деревни "Верхние Васюки" и "Нижние Васюки" расположены на берегу реки. Пароход проходит расстояние от Верхних до Нижних Васюков за один час, а катер — за 45 минут. Известно, что скорость катера в стоячей воде в два раза больше скорости парохода (тоже в стоящей воде). Определите, какое время (в минутах) потребуется плоту, чтобы спуститься из Верхних Васюков в Нижние Васюки?

   Ответ: 90 минут.

   Решение: Возьмем расстояние между деревнями за единицу длины (ед). Тогда скорость парохода по течению равна 1 ед./ч, а катера — 4/3 ед./ч. Следовательно, собственная скорость парохода равна 1/3 ед./ч, откуда скорость течения равна 2/3 ед./ч. Следовательно плот пройдет расстояние 1 ед. за 3/2 часа.

2. Сколькими способами можно разместить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 в девяти клетках фигуры, изображенной на рисунке, так, чтобы сумма чисел в каждом столбце, начиная со второго, была на 1 больше, чем в предыдущем?

   Ответ: 32.

   Решение: Не будем пока следить за порядком чисел в одном столбце.

   Сумма указанных чисел равна 45, обозначим x число стоящее в самой левой нижней клетке. Тогда $5x + 10 = 45$, откуда $x = 7$. Значит сумма чисел во втором столбце равна $8 = 5+3 = 6+2$. Если во втором столбце стоят 3 и 5, то в третьем столбце должны стоять 1 и 8, в четвертом — 6 и 4, в последнем — 2 и 9. Если во втором столбце стоят 6 и 2, то в третьем столбце могут стоять 1 и 8 или 4 и 5. Можно показать, что если в третьем столбце стоят 1 и 8, то невозможно подобрать числа в четвертом столбце. Значит там стоят 4 и 5, тогда в четвертом столбце стоят 1 и 9, а в последнем — 3 и 8. Получилось 2 варианта расстановки без учета порядка.

   Заметим, что в каждом столбце (кроме первого) числа можно менять местами, что дает по 16 вариантов для каждой расстановки. В итоге получаем 32 варианта с учетом порядка чисел в столбцах.

3. Пусть $\Sigma(n)$ обозначает сумму цифр числа n. Найдите наименьшее трехзначное n, такое, что $\Sigma(n) = \Sigma(2n) = \Sigma(3n) = \ldots = \Sigma(n^2)$

   Ответ: 999.

   Решение: Обозначим искомое число $\overline{abc}$. Заметим, что это число не меньше 101 (т.к. 100 не подходит). Следовательно $101 \cdot \overline{abc} = \overline{abc00} + \overline{abc}$ тоже имеет такую же сумму цифр. Но у этого числа последние цифры, очевидно, b и c, следовательно, сумма остальных цифр должна быть равна a. Следовательно $\Sigma(\overline{abc} + a) = a$. Если $a < 9$, то $\overline{abc} + a$ — трехзначное число, первая цифра которого не меньше a, что приводит к противоречию, т.к. вторая и третья цифра не могут быть нулями. Таким образом, $a = 9$ и $\overline{abc} + a \leqslant 999 + 9 = 1008$. Поэтому $\overline{abc} + a = \overline{100d}$. Но $\Sigma(\overline{100d}) = a = 9$, следовательно, $d = 8$, откуда $\overline{abc} = 999$.

4. Сравните числа

$$\left(1 + \frac{1}{1755}\right)\left(1 + \frac{1}{1756}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{2015}\right) \text{ и } \sqrt{\frac{8}{7}}.$$

   Укажите в ответе «1» если первое из чисел больше; «2», если второе из чисел больше; «0», если числа равны.

   Ответ: Первое больше.

   Решение: (Решение: приводим слева каждую скобку к общему знаменателю, пользуемся неравенством $\frac{n \cdot n}{(n-1)(n+1)} > 1$ и получаем, что квадрат первого числа больше, чем $\frac{2015}{1755} = \frac{31}{27} > \frac{8}{7}$.)

5. В окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды AC и BD. Найдите радиус окружности, если известно, что $AB = 3$, $CD = 4$.

   Ответ: $\frac{5}{2}$.

   Решение: Если отразить C относительно серединного перпендикуляра к BD, получим точку C' на окружности такую, что $\angle ABC' = 90°$, поэтому $BC' = CD = 4$, $2R = \sqrt{AB^2 + BC'^2} = 5$.)

6. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x^3 + y^2 - 3y + 1 < 0, \\ 3x^3 - y^2 + 3y > 0. \end{cases}$$

   В ответе укажите произведение всех y для всех таких пар.

   Ответ: $(0; 1), (0; 2)$.

   Решение: Домножаем первое неравенство на -3 и складываем со вторым, получившемуся условию на y удовлетворяют всего 2 целых значения. Каждое подставляем, в обоих случаях получаем единственный вариант для x.

7. Несколько автобусов (больше трех) в начале рабочего дня поочередно выезжают с постоянными и одинаковыми скоростями из одного пункта в другой. По прибытии в конечный пункт каждый из них, не задерживаясь, разворачивается и едет в обратном направлении. Все автобусы делают одинаковое число рейсов туда и обратно, причем первый автобус заканчивает первый рейс позже, чем в первый рейс выезжает последний автобус. Каждый водитель подсчитал, сколько раз в течение дня он встретился с остальными автобусами, и в сумме у всех водителей получилось число 300. Определите, сколько было автобусов и сколько рейсов они совершили? В ответе укажите произведение числа автобусов на число рейсов.

   Ответ: 52 или 40.

   Решение: Если обозначить n — количество автобусов и k — количество рейсов, то можно подсчитать число встреч (например, по графику, иллюстрирующему движение автобусов). Получается, что каждые два автобуса встречаются $2k-1$ раз. Всего получается $n(n-1)(2k-1) = 300$, т.е. надо разложить число 300 на два три множителя, один из которых на 1 меньше другого, а третий нечетный. Есть два варианта: $300 = 4 \times 3 \times 25 = 5 \times 4 \times 15$. Следовательно, $n = 4$, $k = 13$ или $n = 5$, $k = 8$.

8. Найдите все значения параметра a, при которых квадратный трёхчлен $\frac{1}{3}x^2 + (a + \frac{1}{2})x + (a^2 + a)$ имеет два корня, сумма кубов которых ровно в 3 раза больше их произведения. В ответе укажите наибольшее из таких a.

   Ответ: $a = -1/4$.

   Решение: По теореме Виета выражаем равенство $x_1^3 + x_2^3 = 3x_1x_2$ через a, откуда получается квадратное уравнение на a и находятся два варианта для a, но в ответ идёт только один, т. к. при другом значении исходное уравнение не имеет корней.)

9. Вычислить (без использования калькулятора) $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$, если известно, что это число — целое.

   Ответ: 3.

   Решение: Заметим, что $2 < \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} < 3$ и $0 < \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} < 1$. Поэтому $2 < \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} < 4$, следовательно, это число равно 3.

10. Точка C делит диаметр AB в отношении $AC : BC = 2 : 1$. На окружности выбрана точка P. Определите, какие значения может принимать отношение $\operatorname{tg} \angle PAC : \operatorname{tg} \angle APC$. В ответе укажите наименьшее такое значение.

    Ответ: $\frac{1}{2}$.

Решение: Угол $\angle APB = 90^\circ$, как опирающийся на диаметр. Опустим перпендикуляр CH на AP, он будет параллелен PB. Следовательно, $\triangle APB \propto \triangle AHC$ с коэффициентом $\frac{2}{3}$. Поэтому $\operatorname{tg}\angle APC = \frac{HC}{PC} = 2\frac{PB}{AP} = 2\operatorname{tg}\angle PAC$.