ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

«ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!»

решения задач заочного тура по МАТЕМАТИКЕ

2014/2015 учебный год

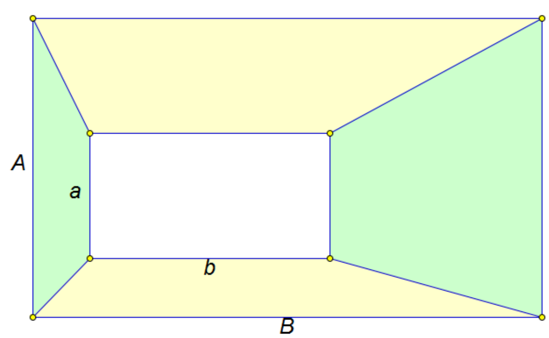
8 класс.

1. Некоторое 4-значное число сложили с числом, записываемым теми же цифрами, но в обратном порядке, и получили 4983. Какие числа складывали?

   Ответ: 1992 и 2991.

   Решение: Запишем условие в виде $\overline{abcd}+\overline{dcba} = 1001(a+d)+110(b+c) = 4983$. Заметим, что $a+d$ должно оканчиваться на 3, следовательно, $a+d = 3$ или $a+d = 13$. второй случай невозможен, поскольку тогда $1001(a+d)+110(b+c) > 13000$. Значит $a+d = 3$, подставив в исходное равенство, получим $3003+110(b+c) = 4983$, откуда $b+c = 18$, следовательно $b = c = 9$.

2. Внутри большого прямоугольника размера $A\times B$ расположен маленький прямоугольник размера $a\times b$ (см. рис.) Найдите разность между суммарной площадью желтых и суммарной площадью зеленых четырехугольников.

   Ответ: $Ab - aB$.

   Решение: Если убрать одинаковые треугольники (см. рис.), то площади оставшихся частей (желтой и зеленой) равны Ab и aB.

3. В ролевой игре «World of MSU» имеется три класса: воин, маг, целитель. Каждый игрок может управлять персонажем некоторого класса (одиночный класс) или персонажем, совмещающим способности двух

классов (двойной класс), например, маг-целитель. Партия из 32 игроков штурмует «Цитадель зла». Известно, что целителей (т.е. всех, имеющих способности целителей) в два раза больше магов и в k раз меньше, чем воинов (k — целое число, большее двух). Сколько игроков имеют одиночный класс, если известно, что что игроков, имеющих двойной класс на 2 больше, чем целителей?

Ответ: 26.

Решение: Пусть x — количество магов, тогда целителей $2x$, а воинов — $2kx$. Их суммарное количество больше 32, поскольку некоторые игроки совмещают два класса. Очевидно количество игроков, совмещающих два класса равно $x + 2x + 2kx - 32$. Тогда целителей будет $x+2x+2kx-34$, откуда получаем уравнение: $x+2x+2kx-34 = 2x$. Преобразовав, получим $x(2k+1) = 34$. Таким образом $2k+1$ — делитель 34, следовательно, $k = 8$ и $x = 2$. Тогда целителей — 4, игроков двойных классов — 6, а все остальные $32 - 6 = 26$ имеют одиночный класс.

4. Пункты A, B, C расположены последовательно, причем расстояние AB равно a км, а расстояние BC равно b км. Из пункта A выехал велосипедист и поехал в пункт C. Одновременно с ним из пункта B вышел пешеход и направился в пункт A. Известно, что пешеход и велосипедист пришли в пункты A и C одновременно. Найдите, на каком расстоянии от пункта A они встретились (a и b известны).

   Ответ: $\frac{a(a+b)}{2a+b}$ км.

   Решение: Пусть D — точка встречи. Поскольку скорости велосипедиста и пешехода относятся как $(a+b) : a$, точка D делит отрезок AB в таком же отношении. Следовательно, $AD = k(a + b)$, $BD = ka$ и $k(a + b) + ka = a$, откуда $k = \frac{a}{2a+b}$. В итоге получаем $AD = \frac{a(a+b)}{2a+b}$.

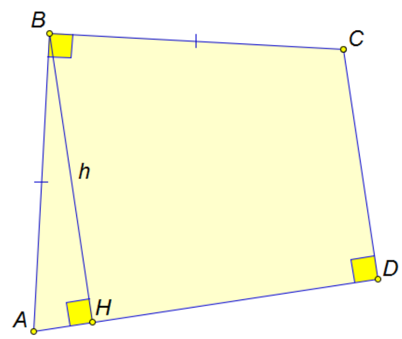
5. Число 2015 можно представить в виде суммы последовательных целых чисел различным образом, например, $2015 = 1007 + 1008$ или $2015 = 401 + 402 + 403 + 404 + 405$. Какое наибольшее количество слагаемых может быть в таком представлении? Замечание: целые числа могут быть отрицательными.

   Ответ: 4030.

   Решение: См. задачу для 9 класса.

6. В четырехугольнике $ABCD$ известно, что $AB = BC$, $\angle ABC = \angle ADC = 90°$. Из вершины B опущен перпендикуляр BH на сторону AD.Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если известно, что $BH = h$.

   Ответ: h^2.



Решение: Отрежем треугольник ABH, приложим его сверху — получим квадрат со стороной h.

7. Известно, что при некоторых натуральных a, b, число $N = \frac{a^2+b^2}{ab-1}$ — тоже натуральное. Найдите все возможные значения N.

   Ответ: 5.

   Решение: Несложно подобрать решение $a = 2$, $b = 1$, $N = 5$. Докажем, что других N быть не может.

   Пусть (a_0, b_0) решение, которому соответствует наименьшее значение $a^2 + b^2$. Не ограничивая общности можно считать, что $a_0 > b_0$. Если $b_0 = 1$, то $N = \frac{a^2+1}{a-1}$, откуда $a = 2$ или $a = 3$, причем в обоих случаях $N = 5$.

   Пусть теперь $b_0 > 1$. Рассмотрим квадратное уравнение $x^2 - b_0Nx + (b_0^2 + N) = 0$, тогда a_0 — его корень. Из теоремы Виета второй корень равен $a_1 = b_0N - a_0$ и он тоже положительный и целый. Из минимальности $a^2 + b^2$ следует, что $a_1 > a_0$ (равны они быть не могут). Тогда $(a_1 - 1)(a_0 - 1) \geqslant b_0(b_0 + 1)$, но, с другой стороны, $(a_1 - 1)(a_0 - 1) = a_1a_0 - (a_1 + a_0) + 1 = b_0^2 + N - b_0N + 1$. Следовательно, $b_0^2 + N - b_0N + 1 \geqslant b_0^2 + b$, что невозможно при $b_0 > 1$.

8. В трапеции диагонали пересекаются под прямым углом и одна из них равна средней линии. Определите, какой угол эта диагональ образует с основаниями трапеции.

   Ответ: 60°.

   Решение: Делаем параллельный перенос диагонали — получим прямоугольный треугольник, в котором катет равен половине гипотенузы.

9. Числа 1,2,..., 2016 разбили на пары, при этом оказалось, что произведение чисел в каждой паре не превосходят некоторого натурального N. При каком наименьшем N это возможно?

   Ответ: $1017072 = 1008 \times 1009$.

   Решение: Если рассмотреть числа 1008, 1009, ..., 2016, то какие-то два должны попасть в одну пару. Значит N не может быть меньше $1008 \cdot 1009$. Покажем, что при $N = 1008 \cdot 1009$ такое разбиение возможно. Разобьем на пары: $(1, 2016)$, $(2, 2016)$, ..., $(1008, 1009)$. Несложно показать, что для этого разбиения выполняется условие задачи .