ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!»

решения задач заочного тура по МАТЕМАТИКЕ

2014/2015 учебный год

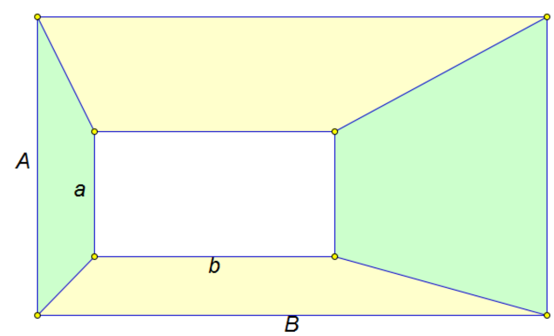
5–7 классы.

1. Некоторое трехзначное число сложили с числом, записываемым теми же цифрами, но в обратном порядке, и получили 1777. Какие числа складывали?

   Ответ: 839 и 938.

   Решение: Пусть число равно $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, тогда $\overline{abc} + \overline{cba} = 101a + 20b + 101c = 1777$. Сумма $a + c$ должна оканчиваться на 7, т.е. $a + c = 7$ или $a + c = 17$. Первый случай невозможен, поскольку тогда $101a + 20b + 101c \leqslant 7 \cdot 101 + 9 \cdot 20 = 777 + 180 < 1777$. Следовательно $a + c = 17$, что возможно только если $a = 8, c = 9$ или наоборот. Подставляя в равенство, получи $707 + 20b = 1777$, откуда $b = 3$.

2. Внутри большого прямоугольника размера $A \times B$ расположен малень-



   кий прямоугольник размера $a \times b$ (см. рис.)

   Найдите разность между суммарной площадью желтых и суммарной площадью зеленых четырехугольников, если известно, что $A = 20$, $B = 30$, $a = 4$, $b = 7$.

   Ответ: 20.

   Решение: см. зад для 8-9.

3. Пункты A, B, C расположены последовательно, причем расстояние AB равно 3 км, а расстояние BC равно 4 км. Из пункта A выехал велосипедист и поехал в пункт C. Одновременно с ним из пункта B

вышел пешеход и направился в пункт A. Известно, что пешеход и велосипедист пришли в пункты A и C одновременно. Найдите, на каком расстоянии от пункта A они встретились.

Ответ: 2,1 км.

Решение: Скорости велосипедиста и пешехода относятся как $7 : 3$, точка их встречи делит AB в таком же отношении.

4. Некоторое 4-значное число является точным квадратом. Если убрать первую цифру слева, то оно станет точным кубом, а если убрать 2 первые цифры, то оно станет четвертой степенью целого числа. Найдите это число.

   Ответ: 9216.

   Решение: Только 16 и 81 являются двузначными четвертыми степенями. Но 81 не подходит, т.к. никакой трехзначный куб не оканчивается на 81 ($5^3 = 125$, $7^3 = 343$, $9^3 = 729$). А на 16 оканчивается $6^3 = 216$. Далее ищем точный квадрат, который оканчивается на 216.

5. Сколько натуральных чисел от 1 до 2015 включительно имеют сумму цифр, кратную 5?

   Ответ: 402.

   Решение: Заметим, что среди десяти чисел вида $\overline{a0}, ..., \overline{a9}$ ровно два числа обладают суммой цифр кратной пяти. Таким образом среди чисел от 10 до 2009 ровно 200 таких десятков и, значит, 400 таких чисел. Учитывая также числа 5 и 2012, получаем 402 таких числа.

6. В ролевой игре «World of MSU» имеется три класса: воин, маг, целитель. Каждый игрок может управлять персонажем некоторого класса (одиночный класс) или персонажем, совмещающим способности двух классов (двойной класс), например, маг-целитель. Партия из 32 игроков штурмует «Цитадель зла». Известно, что целителей (т.е. всех, имеющих способности целителей) в два раза больше магов и в k раз меньше, чем воинов (k — целое число, большее двух). Сколько игроков имеют одиночный класс, если известно, что что игроков, имеющих двойной класс на 2 больше, чем целителей?

   Ответ: 26.

   Решение: Пусть x — количество магов, тогда целителей $2x$, а воинов — $2kx$. Их суммарное количество больше 32, поскольку некоторые игроки совмещают два класса. Очевидно количество игроков, совмещающих два класса равно $x + 2x + 2kx - 32$. Тогда целителей будет $x + 2x + 2kx - 34$, откуда получаем уравнение: $x + 2x + 2kx - 34 = 2x$. Преобразовав, получим $x(2k + 1) = 34$. Таким образом $2k + 1$ — делитель 34, следовательно, $k = 8$ и $x = 2$. Тогда целителей — 4, игроков двойных классов — 6, а все остальные $32 - 6 = 26$ имеют одиночный класс.

7. Числа 1,2,..., 2016 разбили на пары, при этом оказалось, что произведение чисел в каждой паре не превосходят некоторого натурального N. При каком наименьшем N это возможно?

   Ответ: $1017072 = 1008 \times 1009$.

   Решение: Если рассмотреть числа 1008, 1009, ..., 2016, то какие-то два должны попасть в одну пару. Значит N не может быть меньше $1008 \cdot 1009$. Покажем, что при $N = 1008 \cdot 1009$ такое разбиение возможно. Разобьем на пары: $(1, 2016)$, $(2, 2016)$, ..., $(1008, 1009)$. Несложно показать, что для этого разбиения выполняется условие задачи .