Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!», 2014/15 учебный год. 10 – 11 классы.

Решения варианта 01. Ответы к вариантам 02, 03, 04.

1. Можно ли представить выражение

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+bz)^2-(by-cx)^2-(cz+ay)^2$$

в виде квадрата некоторого многочлена от переменных a,b,c,x,y,z?

Ответ: да. **Решение.** Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+bz)^2-(by-cx)^2-(cz+ay)^2$$

$$=a^2z^2+b^2x^2+c^2y^2-2abxz+2bcxy-2acyz \;=\left(az-bx-cy\right)^2.$$

Ответ варианта 02: да. Например, в виде $\left(uz-vx+wy\right)^2$.

Ответ варианта 03: да. Например, в виде $\left(az+bx-cy\right)^2$.

Ответ варианта 04: да. Например, в виде $(uz+vx+wy)^2$.

2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2+\left(2+a\right)x-6a^2+11a=3$ имеет два корня x_1 и x_2, удовлетворяющие неравенству $\dfrac{2x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{2x_1}\le 2$.

Ответ: $a\in\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)\cup\left\{\dfrac{5}{8}\right\}\cup\left\{1\right\}\cup\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. **Решение.** Обозначим $\dfrac{2x_1}{x_2}=t$. Тогда из условия задачи получаем: $t+\dfrac{1}{t}\le 2$. Ввиду того, что имеет место известное неравенство $\left|t+\dfrac{1}{t}\right|\ge 2$, приходим к выводу: $\left[\begin{array}{l} t<0 \\ t=1 \end{array}\right.$. Значит, возможны две ситуации:

а) $\dfrac{2x_1}{x_2}<0 \;\Leftrightarrow\; x_1x_2<0 \;\Leftrightarrow\; 6a^2-11a+3>0 \;\Leftrightarrow\; a\in\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. Важно отметить, что $x_1x_2<0 \;\Rightarrow\; D>0$, поэтому у исходного уравнения будет два разных корня.

б) $\dfrac{2x_1}{x_2}=1 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 2x_1=x_2\ne 0, \\ x_1+x_2=-2-a, \\ x_1x_2=-6a^2+11a-3 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x_1=-\dfrac{a+2}{3}\ne 0, \\ x_2=2x_1, \\ 2x_1^2=-6a^2+11a-3. \end{cases}$ Отсюда получаем уравнение

$2\dfrac{\left(a+2\right)^2}{9}=-6a^2+11a-3 \;\Leftrightarrow\; 8a^2-13a+5=0 \;\Leftrightarrow\; a=1;\ a=\dfrac{5}{8}$. Проверка $D>0$ здесь тоже не требуется, так как решение последней системы приводит к нахождению корней x_1 и x_2 (несовпадающих), что гарантирует их существование.

Ответ варианта 02: $b \in \left(-\infty; -\dfrac{5}{3}\right) \cup \left\{-\dfrac{11}{8}\right\} \cup \{-1\} \cup \left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ответ варианта 03: $a \in \left(-\infty; -\dfrac{3}{2}\right) \cup \{-1\} \cup \left\{-\dfrac{5}{8}\right\} \cup \left(-\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$.

Ответ варианта 04: $b \in \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right) \cup \{1\} \cup \left\{\dfrac{11}{8}\right\} \cup \left(\dfrac{5}{3}; +\infty\right)$.

3. Что больше: $2\sin\dfrac{5\pi}{16}\cos\dfrac{\pi}{16}$ или сумма корней уравнения $|3\cdot\arccos x| = |\arcsin x|$?

Ответ: первое число больше. **Решение.** Учитывая равенство $\arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$, получаем $\left[\begin{array}{l} 3\arccos x = \arcsin x, \\ 3\arccos x = -\arcsin x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\arccos x = \dfrac{\pi}{2}, \\ 2\arccos x = -\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \arccos x = \dfrac{\pi}{8}, \\ \arccos x = -\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \cos\dfrac{\pi}{8}$. Таким образом, сумма корней исходного уравнения равна $\cos\dfrac{\pi}{8}$.

Так как $2\sin\dfrac{5\pi}{16}\cos\dfrac{\pi}{16} = \sin\left(\dfrac{5\pi}{16} + \dfrac{\pi}{16}\right) + \sin\left(\dfrac{5\pi}{16} - \dfrac{\pi}{16}\right) = \sin\dfrac{3\pi}{8} + \sin\dfrac{\pi}{4} = \cos\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} > \cos\dfrac{\pi}{8}$, то первое число больше.

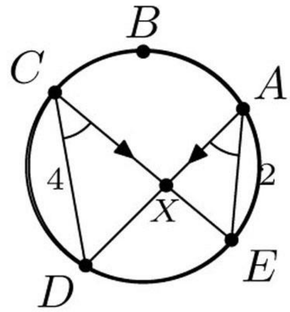
Ответ варианта 02: второе число больше.

Ответ варианта 03: первое число больше.

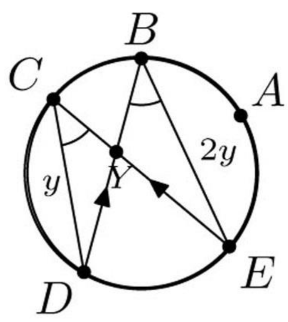
Ответ варианта 04: второе число больше.

4. Города *A, B, C, D, E* лежат на одной окружности и попарно соединены прямолинейными дорогами. Два велосипедиста выехали одновременно из *A* в *D* и из *C* в *E*, повстречавшись в пути. Затем они выехали одновременно из *D* в *B* и из *E* в *C*, опять повстречавшись в пути. Наконец, они выехали одновременно из *B* в *E* и из *C* в *B*, прибыв в пункты назначения одновременно. Найдите *BC*, если $AE = 2$ км и $CD = 4$ км, а скорость каждого велосипедиста постоянна.

Ответ: 16 км. **Решение.** Пусть при первом заезде велосипедисты встретились в точке *X*. Так как отрезки *AD* и *CE* есть хорды одной окружности, то треугольники *AXE* и *CXD* подобны. Следовательно, отношение скоростей велосипедистов равно $\dfrac{AX}{CX} = \dfrac{AE}{CD} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$. Если скорость первого велосипедиста, выехавшего из пункта *A*, равна *V*, то скорость второго, выехавшего из *C*, равна $2V$.



Пусть при втором заезде велосипедисты встретились в точке Y. Так как треугольники BYE и CYD подобны, то $\frac{CD}{BE}=\frac{CY}{BY}=\frac{V}{2V}=\frac{1}{2}$. Поэтому $BE=2CD=8$.



Наконец, при третьем заезде $\frac{BC}{2V}=\frac{BE}{V}$, откуда получаем $BC=2BE=16$ (км).

Ответ варианта 02: 27 км.

Ответ варианта 03: 24 км.

Ответ варианта 04: 54 км.

5. Гипербола $y=\frac{5}{x}$ пересекается с прямой $2x+y=12$ в точках A и B, а с прямой $x+2y=8$ – в точках C и D. Найдите координаты точки, равноудалённой от точек A, B и C.

Ответ: $(7;8)$. **Решение.** Координаты точек, лежащих на объединении этих прямых, удовлетворяют уравнению $0=(2x+y-12)\cdot(x+2y-8)=2x^2+5xy+2y^2-28x-32y+96$. Так как нас интересуют точки прямых, лежащих на гиперболе, то полагая $xy=5$, получаем уравнение-следствие $0=2x^2-28x+2y^2-32y+121 \Leftrightarrow (x-7)^2+(y-8)^2=R^2$, которому удовлетворяют координаты всех точек пересечения прямых с гиперболой.

Значит, все четыре точки A, B, C и D лежат на окружности с центром в точке $(7;8)$.

Ответ варианта 02: $(4;5)$.

Ответ варианта 03: $(8;10)$.

Ответ варианта 04: $(8;7)$.

Примечание. Так как в условии этой задачи в вариантах 03 и 04 первоначально была опечатка, то тем участникам, которые обосновали нерешаемость задачи при таком условии, также было засчитано полное решение.