ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!»

Задания ЗАОЧНОГО тура по МАТЕМАТИКЕ

2014/2015 учебный год

1. (5-7,8,9) На столе стоит 2014 коробок, в некоторых из них есть конфеты, а остальные пусты.
   На первой коробке написано: «Все коробки пустые».
   На второй — «По крайней мере 2013 коробок пустые».
   На третьей — «По крайней мере 2012 коробок пустые».
   ...
   На 2014-й — «По крайней мере одна коробка пустая».
   Известно, что надписи на пустых коробках ложны, а на коробках с конфетами — истинные. Определите, сколько коробок с конфетами?
   Ответ: 1007.

2. (5-7) Сережа собирает игрушечные железные дороги. У него есть несколько наборов, в каждом из которых разное количество вагонов. Если все наборы объединить в один состав, то в нем будет 112 вагонов. Если взять три самых маленьких набора, то в них будет 25 вагонов, а в трех самых больших — 50 вагонов. Сколько наборов у Сережи? Сколько вагонов в самом большом наборе?
   Ответ: 9 наборов. 18 вагонов.

3. (5-7,8) У Незнайки и Пончика есть одинаковые суммы денег, составленные из монет достоинством 1, 3, 5 и 7 фертингов.

   При этом у Незнайки 1-фертинговых монет столько же, сколько у Пончика 3-фертинговых;
   3-фертинговых — столько же, сколько у Пончика 5-фертинговых;
   5-фертинговых — столько же, сколько у Пончика 7-фертинговых;
   а 7-фертинговых — столько же, сколько у Пончика 1-фертинговых;

   Определите, сколько 7-фертинговых монет у Незнайки, если известно, что у каждого — по 20 монет.
   Ответ: 5 монет.

4. (5-7, 8) Пин-код телефона состоит из 4 цифр (и может начинаться с нуля, например, 0951). Петя называет «счастливыми» такие пин-коды, у которых сумма крайних цифр равна сумме средних, например 1357: $1+7=3+5$. В своем телефоне он использует только «счастливые» пин-коды. Петя говорит, что даже если забудет одну цифру (но будет помнить ее позицию), то он легко ее восстановит. А если он забудет две цифры (но будет помнить их позиции), то ему придется перебрать лишь небольшое количество пин-кодов.
   a) Сколько пин-кодов придется перебрать Пете в худшем случае?
   b) Сколько существует всего «счастливых» пин-кодов?
   Ответ: a) 10; b) 670.

5. (5-7,8) Имеется 10 отрезков, длина каждого из которых выражается целым числом, не превосходящим некоторого N. a) Пусть $N = 100$. Приведите пример набора из 10 отрезков, такого, что ни из каких трех нельзя сложить треугольник. b) Найдите максимальное N, при котором можно гарантировать, что найдутся три отрезка, из которых можно сложить треугольник? Ответ: a) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55; b) $N = 54$.

6. (5-7,8) Можно ли найти 100 последовательных натуральных чисел, первое из которых делится на 3, второе — на 5, третье — на 7, $\ldots$, 100-е — на 201?
Ответ: Да.
Решение: Начать с $\frac{3+3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot201}{2}$.

7. (5-7,8,9) a) В таблице 3x4 надо расставить числа от 1 до 12 так, чтобы разность любых двух чисел, стоящих в одной строке была кратна 3, а разность любых двух чисел в одном столбце — кратна 4. Пример такой расстановки:

1	4	7	10
5	8	11	2
9	12	3	6

Сколькими способами это можно сделать? b) Можно ли расставить числа от 1 до 24 в таблице 6×4 так, чтобы разность любых двух чисел в одной строке была кратна 6, а разность любых двух чисел в одном столбце была кратна 4?
Ответ: a) $144 = 3! \cdot 4!$; b) Нет.
Решение: Рассмотреть перестановки возможных остатков от деления на 3 и на 4.

8. (8,9) Известно, что число $\frac{(2+\sqrt{3})^4+(2-\sqrt{3})^4}{(2+\sqrt{3})^6+(2-\sqrt{3})^6}$ — рациональное. Запишите это число в виде несократимой дроби.
Ответ: $\frac{97}{1351}$.

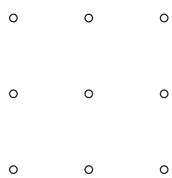
9. (8,9) Какова наибольшая возможная площадь четырехугольника $ABCD$, стороны которого равны $AB = 1$, $BC = 8$, $CD = 7$ и $DA = 4$?
Ответ: 18.
Решение: Заметим, что $1^2 + 8^2 = 7^2 + 4^2 = 65$. Площадь $\triangle ABC$ будет максимальна, если $\angle ABC = 90^\circ$, тогда $AC = \sqrt{65}$, тогда $\angle BCD = 90^\circ$ тоже и площадь $\triangle BCD$ тоже максимальна.

10. (8,9) Найдите наименьшее возможное значение $|2015m^5 - 2014n^4|$, если m и n — натуральные числа.
Ответ: 0.
Решение: Рассмотреть числа вида $2014^k \cdot 2015^l$.

11. (9) Целые числа a, b и c таковы, что $a\cdot\left(1-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+b\cdot\left(1-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)+c=5$. Каково минимальное значение $|a+b+c|$ при этом условии?
Ответ: 4.
Решение: Если $a=0$, то $b=0$ и $c=5$, следовательно $|a+b+c|=5$.

Если $a\neq 0$, то рассмотрим квадратичную функция $f(x)=ax^2+bx+c$. Заметим, что $f(x)-5$ имеет корни $1\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$. Следовательно, $f(x)=5+k\cdot(4x^2+8x-3)$, $k\neq 0$, т.е. $|a+b+c|=|5+9k|$, Минимум, равный 4 достигается при $k=-1$.

12. (9) На плоскости расположено 9 точек в виде решетки 3×3, как показано на рисунке.



а) Через все возможные пары точек провели прямые. Сколько различных прямых получилось? б) Сколько существует различных треугольников с вершинами в этих точках?

Ответ: a) 20; b) 76.
Решение: а) Пар точек будет $C_9^2=36$, но прямые совпадают, когда три точки лежат на одной прямой. Таких случаев 8= 3 горизонтали+3вертикали+2диагонали. Следовательно, отнимем $36-8\times 2=20$.

b) Троек точек $C_9^3=84$, но не все образуют треугольник, т.е. надо отнять 8 троек, лежащих на одной прямой. 84-8=76.

13. (9) Решите неравенство $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{2x+3-x^2}\geqslant 2$.
Ответ: $X=1$

14. (9) В параллелограмме $ABCD$ угол $\angle BAC$ в два раза больше угла $\angle BCD$. Найдите площадь параллелограмма, если известно, что $AB=AC=2$.
Ответ: $2\sqrt{3}$.
Решение: Указанный параллелограмм является ромбом с углом 60 градусов. Это можно доказать построив окружность с центром в точке A и радиуса 2. Тогда точки B, C, D будут лежать на этой окружности.

15. (9) Найдите q, при котором $x^2+x+q=0$ имеет два различных действительных корня, удовлетворяющих соотношению $x_1^4+2x_1x_2^2-x_2=19$.
Ответ: $q=-3$.
Решение: Если x корень, то $x^2=-x-q$, следовательно $x^4=x^2+2qx+q^2=(2q-1)x+q^2-q$. Тогда $x_1^4+2x_1x_2^2-x_2=(2q-1)x_1+q^2-q+2qx_2-x_2=(2q-1)(x_1+x_2)+q^2-q$. Воспользуемся теоремой Виета

$x_1 + x_2 = -1$, получим $q^2 - 3q + 1 = 19$. Решив, получим $q_1 = -3$, $q_2 = 6$, но при $q = 6$ исходное уравнение не имеет корней.