Отборочный этап олимпиады “Покори Воробьевы горы!” по математике состоял из блиц-тура (5 задач на 3 часа) и творческой части (7 задач).

Комплект блиц-задач

Каждый участник отборочного этапа получал свой набор задач, отличающийся от наборов задач других участников. Приводим набор типичных задач этого блиц-тура.

---

1. Решите неравенство
$$(2+\sqrt{3})^x+2<3(\sqrt{2-\sqrt{3}})^{2x}.$$
В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству и принадлежащих интервалу (-20;53).

Ответ: Решение неравенства $(-\infty;0)$. Искомая сумма $-19-18-\cdots-2-1=-190$. В ответ записываем -190.

2. Решите уравнение
$$\cos^2 8x+\cos^2 x=2\cos^2 x\cdot\cos^2 8x.$$
В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку $[3\pi;6\pi]$, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

Ответ: Решение уравнения πn, $n\in\mathbb{Z}$. На отрезок $[3\pi;6\pi]$ попадает четыре значения 3π, 4π, 5π, 6π. В ответ записываем $56,55$, поскольку $12\pi\approx 56,54866\ldots$.

3. Площадь треугольника $\triangle ABC$ равна 10 см^2. Какое наименьшее значение в сантиметрах может принимать длина окружности, описанной около треугольника $\triangle ABC$, если известно, что середины высот этого треугольника лежат на одной прямой? В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: Наименьшее значение равно $2\pi\sqrt{10}$ см. В ответ записываем 20, поскольку $2\pi\sqrt{10}\approx 19,8691\ldots$.

4. Определить число студентов, сдававших экзамен, если известно, что третья часть из них получила оценку "удовлетворительно" , 44% получили оценку "хорошо" , а пять человек получили оценку "отлично" , причем эти отличники составляют более 3%, но менее 4% от искомого числа студентов. Если решений нет, либо решений несколько, то в графу ответа поставьте цифру 0.

Ответ: 150.

5. Найдите множество пар действительных чисел (x,y), удовлетворяющих условиям:
$$\begin{cases}3^{-x}y^4-2y^2+3^x\leqslant 0,\\ 27^x+y^4-3^x-1=0.\end{cases}$$
Вычислите значения выражения $x_k^3+y_k^3$ для каждого решения (x_k,y_k) системы и найдите среди них минимальное. В ответе укажите найденное минимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если решений у исходной системы нет, то в графу ответа поставьте цифру 0.

Ответ: Решение системы $(x,y)=(0,\pm 1)$. Ответ -1.
