

**ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!»**

Задания ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО тура по МАТЕМАТИКЕ
2013/2014 учебный год

9 класс

1. На острове рыцарей и лжецов рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. В школе на этом острове учатся как рыцари, так и лжецы — в одном классе. Однажды учитель спросил у четырех детей: Ану, Бану, Вану и Дану, кто из них сделал домашнее задание. Они ответили:

- **Ану:** Домашнее задание сделали Бану, Вану и Дану.
- **Бану:** Домашнее задание не сделали Ану, Вану и Дану.
- **Вану:** Не верьте им, господин учитель! Ану и Бану — лжецы!
- **Дану:** Нет, господин учитель, Ану, Бану и Вану — рыцари!

Сколько рыцарей среди этих детей?

Ответ: 1.

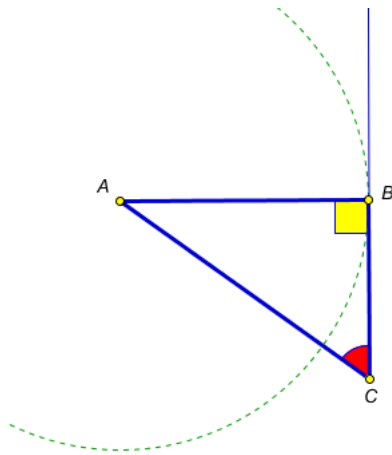
Решение: Если Вану — рыцарь, то все остальные — лжецы.

Пусть Вану — лжец. Тогда Дану — тоже лжец (поскольку говорит, что Вану — рыцарь). А из Ану и Бану по крайней мере один должен быть рыцарем. Оба они рыцарями быть не могут, т.к. противоречат друг другу. В любом случае только один из детей является рыцарем.

2. В треугольнике $\triangle ABC$ известны стороны $AB = 5$ и $AC = 6$. Какой должна быть сторона BC , чтобы угол $\angle ACB$ был максимально возможным? В ответе укажите длину стороны BC , округленную до ближайшего целого числа.

Ответ: 3

Решение: Построим $AC = 6$. Тогда геометрическим местом точек B будет окружность радиуса 5 с центром в точке A . Угол $\angle ACB$ будет наибольшим, когда CB касается окружности (см. рис.). Тогда $CB \perp AB$ и по теореме Пифагора получим $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{11} \approx 3$.



3. Уходя на работу мама поручила Мише, Пете и Васе: а) подмести пол в прихожей; б) помыть посуду; в) купить хлеба; г) заплатить за электричество; д) вынести мусор; е) пропылесосить ковер в гостиной. Сколькими различными способами они могут распределить задания, так, чтобы каждое задание делал кто-то один из ребят и при условии, чтобы каждый что-нибудь делал?

Ответ: 540.

Решение: Всего существует $3^6 = 729$ способов распределить задания. Но при этом в $2^6 = 64$ способах все работы будут выполнять Миша и Петя. Также есть 64 способа, когда все работы будут выполнять Петя и Вася, а также 64 — когда Миша и Вася. Если вычесть 3×64 , получится, что случаи, когда всю работу выполняет один человек мы вычли по два раза. Поэтому к результату прибавим 3: $3^6 - 3 \cdot 2^6 + 3 = 540$.

4. Решите в натуральных числах уравнение

$$abc + ab + bc + ac + a + b + c = 164.$$

В ответе укажите произведение abc .

Ответ: 80.

Решение: $(a+1) \times (b+1) \times (c+1) = abc + ab + bc + ac + a + b + c + 1 = 165 = 3 \times 5 \times 11$, следовательно, $a = 2$, $b = 4$ и $c = 10$. Заметим, что решение единственно с точностью до перестановки a , b и c , поскольку 3, 5, 11 — простые числа.

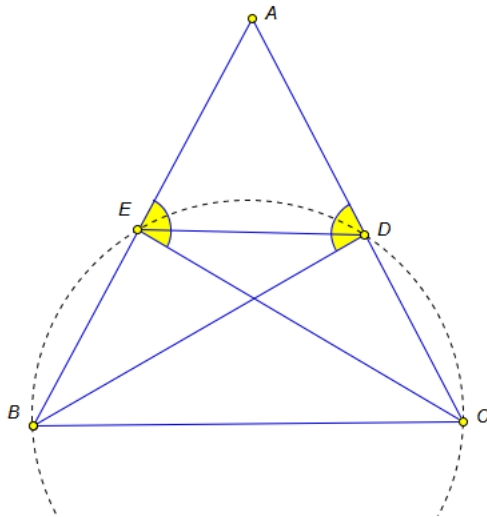
5. Петя хотел нарисовать правильный треугольник $\triangle ABC$. Но, поскольку он рисовал неточно, получился треугольник с углами $\angle A = 59^\circ$ и

$\angle B = 63^\circ$. Потом Петя провел высоты CE и BD , но, поскольку угольник был слегка перекошен, получил углы $\angle ADB = \angle AEC = 92^\circ$. Найдите градусную меру угла $\angle AED$.

Ответ: 58° .

Решение: Заметим, что $\angle BDC = \angle BEC = 88^\circ$, следовательно, можно провести окружность, проходящую через точки B, C, D и E . Действительно, опишем окружность около треугольника $\triangle BCD$. Она должна пройти через точку E , т.к. если прямая CE пересекает окружность в точке E_1 , то $\angle BE_1C = \angle BEC$, что возможно только если E совпадает с E_1 .

Тогда угол $\angle AED = 180^\circ - \angle BED = \angle BCD$ по свойству вписанных четырехугольников. А $\angle BCD = 180^\circ - \angle ABC - \angle BAC = 58^\circ$.



6. Последовательность чисел задана следующим образом:
 $a_1 = 0, a_2 = 1$ и $a_{n+1} = 4(a_n - a_{n-1})$ при $n \geq 2$. Найдите наименьший положительный член последовательности, кратный 2014. В ответе укажите номер этого члена.

Ответ: 1008.

Решение: Заметим, что $a_{n+1} - 2a_n = 2a_n - 4a_{n-1} = 2(a_n - 2a_{n-1})$. Обозначим $b_n = a_{n+1} - 2a_n$, тогда $b_1 = 1$ и $b_{n+1} = 2b_n$, следовательно, $b_n = 2^{n-1}$. Таким образом, $a_n = b_{n-1} + 2a_{n-1} = b_{n-1} + 2b_{n-2} + 4a_{n-2} = \dots = b_{n-1} + 2b_{n-2} + \dots + 2^{n-1}b_1 + 2^n a_1 = (n-1)2^{n-2}$. Если это число кратно 2014, то $(n-1)$ кратно 1007, т.е. $n = 1008$.