ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!»

Задания ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО тура по МАТЕМАТИКЕ
2013/2014 учебный год

8 класс

1. На острове рыцарей и лжецов рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. В школе на этом острове учатся как рыцари, так и лжецы — в одном классе. Однажды учитель спросил у четырех детей: Ану, Бану, Вану и Дану, кто из них сделал домашнее задание. Они ответили:

   - **Ану:** Домашнее задание сделали Бану, Вану и Дану.
   - **Бану:** Домашнее задание не сделали Ану, Вану и Дану.
   - **Вану:** Не верьте им, господин учитель! Ану и Бану — лжецы!
   - **Дану:** Нет, господин учитель, Ану, Бану и Вану — рыцари!

   Сколько рыцарей среди этих детей?

   Ответ: 1.

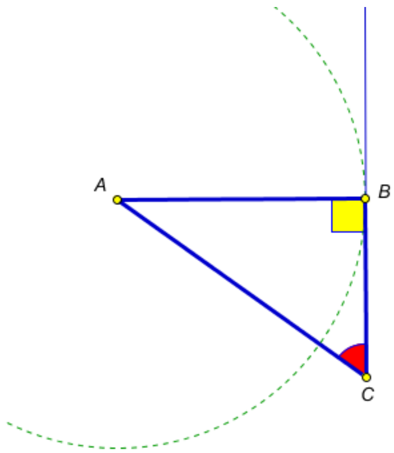
   Решение: Если Вану — рыцарь, то все остальные — лжецы.

   Пусть Вану — лжец. Тогда Дану — тоже лжец (посокльку говорит, что Вану — рыцарь). А из Ану и Бану по крайней мере один должен быть рыцарем. Оба они рыцарями быть не могут, т.к. противоречат друг другу. В любом случае только один из детей является рыцарем.

2. В треугольнике $\triangle ABC$ известны стороны $AB = 5$ и $AC = 6$. Какой должна быть сторона BC, чтобы угол $\angle ACB$ был максимально возможным? В ответе укажите длину стороны BC, округленную до ближайшего целого числа.

   Ответ: 3

   Решение: Построим $AC = 6$. Тогда геометрическим местом точек B будет окружность радиуса 5 с центром в точке A. Угол $\angle ACB$ будет наибольшим, когда CB касается окружности (см. рис.). Тогда $CB \perp AB$ и по теореме Пифагора получим $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{11} \approx 3$.



3. Уходя на работу мама поручила Мише, Пете и Васе: а) подмести пол в прихожей; б) помыть посуду; в) купить хлеба; г) заплатить за электричество; д) вынести мусор; е) пропылесосить ковер в гостиной. Скольками различными способами они могут распределить задания, так, чтобы каждое задание делал кто-то один из ребят и при условии, чтобы каждый что-нибудь делал?

   Ответ: 540.

   Решение: Всего существует $3^6 = 729$ способов распределить задания. Но при этом в $2^6 = 64$ способах все работы будут выполнять Миша и Петя. Также есть 64 способа, когда все работы будут выполнять Петя и Вася, а также 64 — когда Миша и Вася. Если вычесть 3×64, получится, что случаи, когда всю работу выполняет один человек мы вычли по два раза. Поэтому к результату прибавим 3: $3^6 - 3 \cdot 2^6 + 3 = 540$.

4. Найдите наибольшее трехзначное число, которое кратно сумме своих цифр и в котором первая цифра совпадает с третьей, но не совпадает со второй.

   Ответ: 828.

   Решение: По условию число $\overline{aba} = 101a + 10b$ должно делиться на $2a + b$, следовательно, $101a + 10b - 10(2a + b) = 81a$ — тоже.

   Рассмотрим $a = 9$ (нам надо найти наибольшее такое число). Но $81 \cdot 9 = 729 = 3^6$ может делиться только на степень 3, следовательно, $18 + b = 27$, что противоречит условию (a и b должны быть разными).

   Пусть $a = 8$. Тогда $81 \cdot 8 = 3^4 \cdot 2^3$ должно быть кратно $16 + b$. Такое возможно только при $b = 2$ и $b = 8$, но последнее не подходит. Следовательно $a = 8$, $b = 2$.

5. Решите в натуральных числах уравнение

$$abc + ab + bc + ac + a + b + c = 164.$$

В ответе укажите произведение abc.

Ответ: 80.

Решение: $(a+1)\times(b+1)\times(c+1) = abc+ab+bc+ac+a+b+c+1 = 165 = 3\times 5\times 11$, следовательно, $a = 2$, $b = 4$ и $c = 10$. Заметим, что решение единственно с точностью до перестановки a, b и c, поскольку 3, 5, 11 — простые числа.

6. Петя хотел нарисовать правильный треугольник $\triangle ABC$. Но, поскольку он рисовал неточно, получился треугольник с углами $\angle A = 59°$ и $\angle B = 63°$. Потом Петя провел высоты CE и BD, но, поскольку угольник был слегка перекошен, получил углы $\angle ADB = \angle AEC = 92°$. Найдите градусную меру угла $\angle AED$.

Ответ: 58°.

Решение: Заметим, что $\angle BDC = \angle BEC = 88°$, следовательно, можно провести окружность, проходящую через точки B, C, D и E. Действительно, опишем окружность около треугольника $\triangle BCD$. Она должна пройти через точку E, т.к. если прямая CE пересекает окружность в точке E_1, то $\angle BE_1C = \angle BEC$, что возможно только если E совпадает с E_1.

Тогда угол $\angle AED = 180° - \angle BED = \angle BCD$ по свойству вписанных четырехугольников. А $\angle BCD = 180° - \angle ABC - \angle BAC = 58°$.