

# ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!»

решения задач заочного тура по МАТЕМАТИКЕ  
2013/2014 учебный год

## 7 класс

1. На острове рыцарей и лжецов рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. В школе на этом острове учатся как рыцари, так и лжецы — в одном классе. Однажды учитель спросил у четырех детей: Ану, Вану, Вану и Дану, кто из них сделал домашнее задание. Они ответили:

- **Ану:** Домашнее задание сделали Вану, Вану и Дану.
- **Вану:** Домашнее задание не сделали Ану, Вану и Дану.
- **Вану:** Не верьте им, господин учитель! Ану и Вану — лжецы!
- **Дану:** Нет, господин учитель, Ану, Вану и Вану — рыцари!

Сколько рыцарей среди этих детей?

**Ответ:** 1

**Решение:** Если Вану — рыцарь, то все остальные — лжецы.

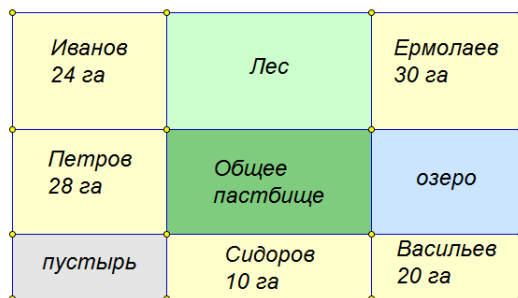
Пусть Вану — лжец. Тогда Дану — тоже лжец (поскольку говорит, что Вану — рыцарь). А из Ану и Вану по крайней мере один должен быть рыцарем. Оба они рыцарями быть не могут, т.к. противоречат друг другу. В любом случае только один из детей является рыцарем.

2. Найдите наименьшее возможное значение  $|2015m^5 - 2014n^4|$ , при условии, что  $m, n$  — натуральные числа.

**Ответ:** 0.

**Решение:** Найдем  $N = 2014^x \cdot 2015^y$  такое, что  $m^5 = 2014^{x-1} \cdot 2015^y$  и  $n^4 = 2014^x \cdot 2015^{y-1}$ . Для этого  $x$  и  $y - 1$  должны быть кратны 4, а  $x - 1$  и  $y - 5$ . Подходят, например,  $x = 16$  и  $y = 5$ . Тогда, если взять  $m = 2014^3 \cdot 2015$  и  $n = 2014^4 \cdot 2015$ , получим  $|2015m^5 - 2014n^4| = 0$ .

3. Фермеры Иванов, Петров, Сидоров, Васильев и Ермолаев владеют участками прямоугольной формы, площадь которых указана на чертеже (см. рис.). Найдите площадь общего пастбища.



**Ответ:** 17,5.

**Решение:** Поле Васильева в 2 раза больше, чем у Сидорова, следовательно, его ширина в 2 раза больше. из этого вытекает, что площадь леса равна 15 га. Аналогично, площадь поля Иванова относится к площади леса как  $24 : 15$ , следовательно, так же относится площадь Петрова к общему пастбищу. получаем уравнение  $24 : 15 = 28 : x$ , откуда  $x = 17,5$ .

4. Уходя на работу мама поручила Мише, Пете и Васе: а) подмести пол в прихожей; б) помыть посуду; в) купить хлеба; г) заплатить за электричество; д) вынести мусор; е) пропылесосить ковер в гостиной. Сколькими различными способами они могут распределить задания, так, чтобы каждое задание делал кто-то один из ребят и при условии, чтобы каждый что-нибудь делал?

**Ответ:** 540.

**Решение:** Всего существует  $3^6 = 729$  способов распределить задания. Но при этом в  $2^6 = 64$  способах все работы будут выполнять Миша и Петя. Также есть 64 способа, когда все работы будут выполнять Петя и Вася, а также 64 — когда Миша и Вася. Если вычесть  $3 \times 64$ , получится, что случаи, когда всю работу выполняет один человек мы вычли по два раза. Поэтому к результату прибавим 3:  $3^6 - 3 \cdot 2^6 + 3 = 540$ .

5. Найдите наибольшее трехзначное число, которое кратно сумме своих цифр и в котором первая цифра совпадает с третьей, но не совпадает со второй.

**Ответ:** 828.

**Решение:** Обозначим это число  $\overline{aba} = 100a + 10b + a$ , где  $a \neq b$ . Оно должно быть кратно  $2a + b$ , следовательно,  $101a + 10b - 10(2a + b) = 81a$  тоже кратно  $2a + b$ .

Поскольку надо найти наибольшее такое число, рассмотрим  $a = 9$ . Тогда  $81a = 729 = 3^6$ , т.е. все делители есть степени тройки, следовательно,  $18 + b = 27$ , откуда  $b = 9$ , что противоречит условию  $a \neq b$ .

Рассмотрим теперь  $a = 8$ . Тогда число  $81a = 648 = 2^3 \cdot 3^4$  должно делиться на  $16 + b$  без остатка, что возможно только при  $b = 2$  и  $b = 8$  (но последнее противоречит условию  $a \neq b$ ). Значит  $a = 8, b = 2$ .

6. Решите в натуральных числах уравнение

$$abc + ab + bc + ac + a + b + c = 164.$$

В ответе укажите произведение  $abc$ .

**Ответ:** 80.

**Решение:**  $(a + 1) \times (b + 1) \times (c + 1) = abc + ab + bc + ac + a + b + c + 1 = 165 = 3 \times 5 \times 11$ , следовательно,  $a = 2, b = 4$  и  $c = 10$ . Заметим, что решение единственно с точностью до перестановки  $a, b$  и  $c$ , поскольку 3, 5, 11 — простые числа.