Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***VII–1***

1. Выясните, какое из чисел больше:

$$\operatorname{arctg}\bigl(1+\sqrt{2}\bigr)+\operatorname{arcctg}\bigl(1-\sqrt{2}\bigr) \quad \text{или} \quad \frac{7\sqrt{3}}{4}\,.$$

2. Найдите все значения a, при каждом из которых для любого значения b система

$$\begin{cases} (x+1)^2+|y-1|=2, \\ y=b|2x+1|+a \end{cases}$$

имеет решения.

3. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине равен $2\arccos\dfrac{3}{4}$. Окружность радиуса 4 с центром в середине основания AC пересекает прямую AB в точках K и L, а прямую BC в точках M и N, причем отрезки KM и LN пересекаются. Найдите радиус окружности, проходящей через точки B, L и N.

4. Решите уравнение

$$\log_3(x+1)\cdot\log_3(2x-1)\cdot\bigl(3-\log_3(2x^2+x-1)\bigr)=1\,.$$

5. Два равных конуса расположены так, что осью каждого из них является образующая другого. Углы при вершинах в осевых сечениях этих конусов равны по 60°. Найдите угол между двумя образующими, по которым пересекаются эти конусы.

март 2013 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***VII–2***

1. Выясните, какое из чисел больше:

$$\operatorname{arctg}\bigl(\sqrt{2}+\sqrt{3}\bigr)+\operatorname{arcctg}\bigl(\sqrt{2}-\sqrt{3}\bigr) \quad \text{или} \quad \frac{5\sqrt{7}}{4}\,.$$

2. Найдите все значения a, при каждом из которых для любого значения b система

$$\begin{cases} (x+1)^2+(|y-1|-1)^2=4, \\ y=b|x+2|+a \end{cases}$$

имеет решения.

3. В равнобедренном треугольнике ABC угол при основании равен $\arcsin\dfrac{2}{3}$. Окружность с центром в середине основания BC пересекает прямую AC в точках K и L, а прямую AB в точках M и N, причем отрезки KM и LN пересекаются. Найдите ее радиус, если радиус окружности, проходящей через точки A, L и N, равен 2.

4. Решите уравнение

$$\log_3(x+2)\cdot\log_3(2x+1)\cdot\bigl(3-\log_3(2x^2+5x+2)\bigr)=1\,.$$

5. Два равных конуса расположены так, что осью каждого из них является образующая другого. Углы при вершинах в осевых сечениях этих конусов равны по 90°. Найдите угол между двумя образующими, по которым пересекаются эти конусы.

март 2013 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***VII–3***

1. Выясните, какое из чисел больше:

$$\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}+2\right)+\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{3}-2\right) \quad \text{или} \quad \frac{7\sqrt{3}}{4}\,.$$

2. Найдите все значения a, при каждом из которых для любого значения b система

$$\begin{cases} (x-1)^2+|y-1|=2, \\ y=b|2x-3|+a \end{cases}$$

имеет решения.

3. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине равен $2\arccos\dfrac{3}{4}$. Окружность радиуса 4 с центром в середине основания AC пересекает прямую AB в точках K и L, а прямую BC в точках M и N, причем отрезки KM и LN пересекаются. Найдите радиус окружности, проходящей через точки B, L и N.

4. Решите уравнение

$$\log_3(x+1)\cdot\log_3(2x-1)\cdot\left(3-\log_3(2x^2+x-1)\right)=1\,.$$

5. Два равных конуса расположены так, что осью каждого из них является образующая другого. Углы при вершинах в осевых сечениях этих конусов равны по 60°. Найдите угол между двумя образующими, по которым пересекаются эти конусы.

март 2013 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***VII–4***

1. Выясните, какое из чисел больше:

$$\operatorname{arctg}\left(2+\sqrt{5}\right)+\operatorname{arcctg}\left(2-\sqrt{5}\right) \quad \text{или} \quad \frac{5\sqrt{7}}{4}\,.$$

2. Найдите все значения a, при каждом из которых для любого значения b система

$$\begin{cases} (x-2)^2+(|y-1|-1)^2=4, \\ y=b|x-1|+a \end{cases}$$

имеет решения.

3. В равнобедренном треугольнике ABC угол при основании равен $\arcsin\dfrac{2}{3}$. Окружность с центром в середине основания BC пересекает прямую AC в точках K и L, а прямую AB в точках M и N, причем отрезки KM и LN пересекаются. Найдите ее радиус, если радиус окружности, проходящей через точки A, L и N, равен 2.

4. Решите уравнение

$$\log_3(x+2)\cdot\log_3(2x+1)\cdot\left(3-\log_3(2x^2+5x+2)\right)=1\,.$$

5. Два равных конуса расположены так, что осью каждого из них является образующая другого. Углы при вершинах в осевых сечениях этих конусов равны по 90°. Найдите угол между двумя образующими, по которым пересекаются эти конусы.

март 2013 г.

Решение вариантов VII–1 и VII–3.

Задача 1.

Ответ: первое число больше.

Решение. Если $a > 0$ и $\varphi = \operatorname{arctg} a$, то $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\varphi = a$. Значит, $\operatorname{ctg}(\pi - \varphi) = -\frac{1}{a}$ и $\frac{\pi}{2} < \pi - \varphi < \pi$, поэтому $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{a}\right) = \pi - \varphi$, и следовательно, $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{a}\right) = \pi$ при всех $a > 0$.

Если $a = 1 + \sqrt{2}$, то $-\frac{1}{a} = 1 - \sqrt{2}$, и если $a = \sqrt{3} + 2$, то $-\frac{1}{a} = \sqrt{3} - 2$; поэтому первое число равно π. Так как $\sqrt{3} < 1{,}76$, то второе число: $\frac{7\sqrt{3}}{4} < 3{,}08 < \pi$.

Задача 2.

Ответ: $-\frac{3}{4} \leqslant a \leqslant \frac{11}{4}$.

Решение. Изобразим решение системы на координатной плоскости. Первое уравнение системы задает объединение двух дуг парабол: $y = 3 - (x-1)^2$, $y \geqslant 1$ и $y = (x-1)^2 - 1$, $y < 1$. Второе уравнение системы при $b = 0$ определяет на плоскости прямую $y = a$, а при $b \neq 0$ – два луча $y = b(2x+1) + a$, $x \geqslant -\frac{1}{2}$ и $y = -b(2x+1) + a$, $x < -\frac{1}{2}$ с общим началом в точке $\left(-\frac{1}{2}, a\right)$.

Прямая $x = -\frac{1}{2}$ пересекает дуги парабол в точках $A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ и $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{4}\right)$. Поэтому для того, чтобы система имела решение, необходимо и достаточно, чтобы общее начало лучей лежало на отрезке AB.

Задача 3.

Ответ: $\frac{8}{\sqrt{7}}$.

Решение. Пусть точка O – середина основания AC. Не ограничивая общности, будем считать, что точки L и M расположены ближе к вершине B, чем точки K и N соответственно. В силу симметрии относительно прямой BO отрезок LM параллелен основанию AC и $\angle LMB = \angle BLM = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B$. Так как $\triangle LMN$ вписан в окружность радиуса 4, то $LN = 8\sin\angle LMN = 8\sin\angle LMB = 8\cos(\frac{1}{2}\angle B) = 6$. Тогда искомый радиус окружности определяется из теоремы синусов для $\triangle LMN$:

$$R = \frac{LN}{2\sin\angle B} = \frac{6}{4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{8}{\sqrt{7}}.$$

Задача 4.

Ответ: $x = 2$.

Решение. Для допустимых значений $x > \frac{1}{2}$ имеем: $\log_3(x+1) > 0$.

Если же $\log_3(2x-1) < 0$, т.е. $\frac{1}{2} < x < 1$, то $\log_3(2x^2 + x - 1) < \log_3 2 < 3$, и потому $3 - \log_3(2x^2 + x - 1) > 0$ и левая часть уравнения отрицательна.

Таким образом, все три множителя левой части уравнения положительны и корни следует искать только среди тех x, для которых

$$\{x > 1,\ 2x^2 + x - 1 < 27\} \iff x \in (1; 3{,}5).$$

Положим $t = \log_3(x+1)$, $p = \log_3(2x-1)$ и перепишем уравнение в виде

$$pt^2 - (3p - p^2)t + 1 = 0.$$

Так как $p > 0$ и дискриминант этого уравнения как квадратного относительно t равен $D(p) = p(p-1)^2(p-4)$, то

$$\{D(p) \geqslant 0,\ p > 0\} \iff p \in \{1\} \cup [4; +\infty).$$

Но при $p \geqslant 4$: $x \geqslant 42$, поэтому $p = 1$ и $t = 1$, что выполнено, только если $x = 2$.

Задача 5.

Ответ: $2\arccos\sqrt{\dfrac{3}{2+\sqrt{3}}}$.

Решение. Пусть S – общая вершина рассматриваемых конусов, SA_1 и SA_2 – их оси. Обозначим через SB и SC их общие образующие и через α искомый угол $\angle BSC$.

Описанная в задаче конфигурация имеет две плоскости симметрии: одна – SA_1A_2 – содержит оси конусов, другая – SBC – содержит их общие образующие. Тогда эти плоскости перпендикулярны, пусть SO – прямая их пересечения.

Обозначим через φ угол в осевом сечении каждого из конусов. Так как SA_2 является образующей для конуса с осью SA_1 и наоборот, то $\angle A_2SO = \angle OSA_1 = \varphi/4$. Кроме того, $\angle A_2SB = \angle A_2SC = \angle A_1SB = \angle A_1SC = \varphi/2$, $\angle OSB = \angle OSC = \alpha/2$.

Будем считать, что точки A_1, A_2, B, C, O лежат в некоторой плоскости, перпендикулярной прямой SO и расположенной на расстоянии h от вершины S. Тогда из пирамиды SOA_1C, в которой все плоские углы при вершине O прямые, имеем

$$SA_1 = \frac{h}{\cos(\varphi/4)}, \quad OA_1 = h\operatorname{tg}(\varphi/4), \quad SC = \frac{h}{\cos(\alpha/2)}, \quad OC = h\operatorname{tg}(\alpha/2);$$

$$\left.\begin{aligned} \triangle OA_1C: &\quad A_1C^2 = h^2\operatorname{tg}^2(\varphi/4) + h^2\operatorname{tg}^2(\alpha/2) \\ \triangle SA_1C: &\quad A_1C^2 = \frac{h^2}{\cos^2(\varphi/4)} + \frac{h^2}{\cos^2(\alpha/2)} - 2\frac{h^2}{\cos(\varphi/4)\cos(\alpha/2)}\cos(\varphi/2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\varphi/2) = \cos(\varphi/4)\cos(\alpha/2).$$

Так как $\varphi = 60^\circ$, то $\cos(\alpha/2) = \sqrt{\frac{3}{2+\sqrt{3}}}$.

Решение вариантов VII–2 и VII–4.

Задача 1.

Ответ: второе число больше.

Решение. Если $a > 0$ и $\varphi = \operatorname{arctg} a$, то $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\varphi = a$. Значит, $\operatorname{ctg}(\pi - \varphi) = -\frac{1}{a}$ и $\frac{\pi}{2} < \pi - \varphi < \pi$, поэтому $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{a}\right) = \pi - \varphi$, и следовательно, $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{a}\right) = \pi$ при всех $a > 0$.

Если $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, то $-\frac{1}{a} = \sqrt{2} - \sqrt{3}$, и если $a = 2 + \sqrt{5}$, то $-\frac{1}{a} = 2 - \sqrt{5}$; поэтому первое число равно π. Так как $\sqrt{7} > 2{,}6$, то второе число: $\frac{5\sqrt{7}}{4} > 3{,}25 > \pi$.

Задача 2.

Ответ: $-\sqrt{3} \leqslant a \leqslant 2 + \sqrt{3}$.

Решение. Изобразим решение системы на координатной плоскости. Первое уравнение системы задает объединение двух дуг окружностей: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$, $y \geqslant 1$ и $(x+1)^2 + y^2 = 4$, $y < 1$. Второе уравнение системы при $b = 0$ определяет на плоскости прямую $y = a$, а при $b \neq 0$ – два луча $y = b(x+2) + a$, $x \geqslant -2$ и $y = -b(x+2) + a$, $x < -2$ с общим началом в точке $(-2, a)$.

Прямая $x = -2$ пересекает дуги окружностей в точках $A\left(-2, 2+\sqrt{3}\right)$ и $B\left(-2, -\sqrt{3}\right)$. Поэтому для того, чтобы система имела решение, необходимо и достаточно, чтобы общее начало лучей лежало на отрезке AB.

Задача 3.

Ответ: $\frac{4\sqrt{5}}{3}$.

Решение. Пусть точка O – середина основания BC. Не ограничивая общности, будем считать, что точки L и M расположены ближе к вершине A, чем точки K и N соответственно. В силу симметрии относительно прямой AO отрезок ML параллелен основанию BC и $\angle AML = \angle ALM = \angle ABC = \arcsin\frac{2}{3}$. Из теоремы синусов для $\triangle ALN$ имеем: $LN = 4\sin\angle A = 4\sin(\pi - 2\arcsin\frac{2}{3}) = 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{16\sqrt{5}}{9}$. Тогда искомый радиус окружности с центром O равен

$$R = \frac{LN}{2\sin\angle NML} = \frac{16\sqrt{5}}{9 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{4\sqrt{5}}{3}.$$

Задача 4.

Ответ: $x = 1$.

Решение. Для допустимых значений $x > -\frac{1}{2}$ имеем: $\log_3(x+2) > 0$.

Если же $\log_3(2x+1) < 0$, т.е. $-\frac{1}{2} < x < 0$, то $\log_3(2x^2+5x+2) < \log_3 2 < 3$, и потому $3 - \log_3(2x^2+5x+2) > 0$ и левая часть уравнения отрицательна.

Таким образом, все три множителя левой части уравнения положительны и корни следует искать только среди тех x, для которых

$$\{x > 0,\ 2x^2+5x+2 < 27\} \iff x \in (0;\ 2{,}5).$$

Положим $t = \log_3(x+2)$, $p = \log_3(2x+1)$ и перепишем уравнение в виде

$$pt^2 - (3p - p^2)t + 1 = 0.$$

Так как $p > 0$ и дискриминант этого уравнения как квадратного относительно t равен $D(p) = p(p-1)^2(p-4)$, то

$$\{D(p) \geqslant 0,\ p > 0\} \iff p \in \{1\} \cup [4; +\infty).$$

Но при $p \geqslant 4$: $x \geqslant 40$, поэтому $p = 1$ и $t = 1$, что выполнено, только если $x = 1$.

Задача 5.

Ответ: $2\arccos\sqrt{\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}}$.

Решение. Пусть S – общая вершина рассматриваемых конусов, SA_1 и SA_2 – их оси. Обозначим через SB и SC их общие образующие и через α искомый угол $\angle BSC$. Описанная в задаче конфигурация имеет две плоскости симметрии: одна – SA_1A_2 – содержит оси конусов, другая – SBC – содержит их общие образующие. Тогда эти плоскости перпендикулярны, пусть SO – прямая их пересечения.

Обозначим через φ угол в осевом сечении каждого из конусов. Так как SA_2 является образующей для конуса с осью SA_1 и наоборот, то $\angle A_2SO = \angle OSA_1 = \varphi/4$. Кроме того, $\angle A_2SB = \angle A_2SC = \angle A_1SB = \angle A_1SC = \varphi/2$, $\angle OSB = \angle OSC = \alpha/2$.

Будем считать, что точки A_1, A_2, B, C, O лежат в некоторой плоскости, перпендикулярной прямой SO и расположенной на расстоянии h от вершины S. Тогда из пирамиды SOA_1C, в которой все плоские углы при вершине O прямые, имеем

$$SA_1 = \frac{h}{\cos(\varphi/4)}, \quad OA_1 = h\operatorname{tg}(\varphi/4), \quad SC = \frac{h}{\cos(\alpha/2)}, \quad OC = h\operatorname{tg}(\alpha/2);$$

$$\left.\begin{aligned} &\triangle OA_1C: \quad A_1C^2 = h^2\operatorname{tg}^2(\varphi/4) + h^2\operatorname{tg}^2(\alpha/2) \\ &\triangle SA_1C: \quad A_1C^2 = \frac{h^2}{\cos^2(\varphi/4)} + \frac{h^2}{\cos^2(\alpha/2)} - 2\frac{h^2}{\cos(\varphi/4)\cos(\alpha/2)}\cos(\varphi/2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\varphi/2) = \cos(\varphi/4)\cos(\alpha/2).$$

Так как $\varphi = 90^\circ$, то $\cos(\alpha/2) = \sqrt{\frac{2}{2+\sqrt{2}}}$.