Решения комплекта вариантов VI–1 — VI–4.

Задача 1.

Ответ: $n \in \{3;5;6\}$ и любое целое $n \geqslant 8$ (варианты VI-1, VI-3); $n \in \{3;6;7;9;10\}$ и любое целое $n \geqslant 12$ (варианты VI-2, VI-4).

Решение (варианта VI-1). Купить $1, 2, 4$ или 7 яблок, очевидно, невозможно. Купить $3, 5$ и 6 яблок, очевидно, можно. При $n = 3k$, $k \geqslant 3$, берем только пакеты по 3 яблока, при $n = 3k+1$, $k \geqslant 3$, берем 2 пакета по 5 яблок, остальное, если нужно, добираем пакетами по 3 яблока, при $n = 3k+2$, $k \geqslant 3$, берем 1 пакет с 5 яблоками и остальное добираем пакетами по 3 яблока.

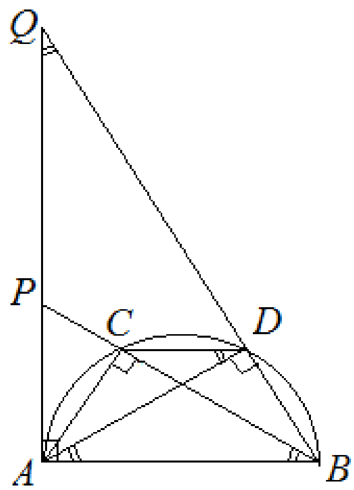
Задача 2.

Ответ: первое число больше.

Решение. Первое число равно $\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(3\sqrt{3}-5+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2\right)$, что больше -2, второе же число равно $-2-\left(2-\sqrt{3}\right)^2$, что меньше -2.

Задача 3.

Ответ: $AQ = 8$.



Решение. I. Рассмотрим конфигурацию, изображенную на рисунке. Касательная QA перпендикулярна диаметру AB. Сумма опирающихся на одну хорду вписанных углов $\angle CAB$ и $\angle CDB$, как и сумма внутренних односторонних углов $\angle CDB$ и $\angle DBA$, равна $180°$, поэтому $\angle CAB = \angle DBA$, т.е. трапеция $ABDC$ – равнобедренная.

Тогда $\triangle ABC = \triangle BAD$, причем опирающиеся на диаметр углы $\angle ACB$ и $\angle BDA$ прямые. Следовательно, $\triangle BQA$ и $\triangle BAD$ подобны как прямоугольные с общим углом, а $\angle PBA = \angle DAB = \angle AQB$.

Значит, $\triangle BQA \sim \triangle PBA$, т.е. $AB : AP = AQ : AB$.

II. Конфигурация, в которой меняются местами точки C и D (и, соответственно, P и Q), невозможна, так как тогда тангенс угла B в трапеции $ABCD$ равнялся бы $1/2$, т.е. этот угол был бы меньше $30°$, и сумма внутренних односторонних углов при вершинах B и D трапеции оказалась бы меньше $180°$.

Задача 4.

Ответ: $x \in (-\frac{\pi}{2}+\pi n; -\frac{\pi}{4}+\pi n] \cup \{\operatorname{arctg} 2 + \pi k\},\ n, k \in \mathbb{Z}$ (во всех вариантах).

Решение (варианта VI-1). После замены $y = \operatorname{tg} x$ и логарифмирования получим равносильное неравенство

$$\sqrt{(y+1)^3(y-2)^3} \geqslant (y+1)^2(y-2)\log_3 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} y-2 \leqslant 0, \\ (y+1)(y-2) \geqslant 0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} y-2 > 0, \\ (y+1)^3(y-2)^3 \geqslant (y+1)^4(y-2)^2\log_3^2 5 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y \in (-\infty;-1] \cup \{2\}, \\ \left\{\begin{array}{l} y-2 > 0, \\ y-2 \geqslant (y+1)\log_3^2 5 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y \in (-\infty;-1] \cup \{2\}, \\ \left\{\begin{array}{l} y-2 > 0, \\ (1-\log_3^2 5)y - 2 - \log_3^2 5 \geqslant 0, \end{array}\right. \end{array}\right.$$

что равносильно тому, что $y \in (-\infty;-1] \cup \{2\}$, поскольку $1 - \log_3^2 5 < 0$.

Задача 5.

Ответ: $a \in (-\infty; \frac{3}{2}] \cup [2;3]$.

Решение. Замена $y = \sqrt{5x-1}$ сводит исходную задачу к задаче исследованию неравенства $f(y) \equiv -2ay^2 + 4a^2y - 12a^2 + 22a - 12 \leqslant 0$ при $y \in [2;3]$.

Очевидно, при $a = 0$ неравенство выполнено при любых y.

При $a \neq 0$ графиком функции $f(y)$ является парабола, вершина которой имеет абсциссу a. Рассмотрим четыре возможных случая:

1) $a < 0 \Rightarrow \max\limits_{y \in [2;3]} f(y) = f(3) = 4a - 12 \leqslant 0$, т.е. все $a < 0$ удовлетворяют условию задачи;

2) $0 < a < 2 \Rightarrow \max\limits_{y \in [2;3]} f(y) = f(2) = -4(a - \frac{3}{2})(a-2)$, что неположительно, только если $a \in (0; \frac{3}{2}]$;

3) $2 \leqslant a \leqslant 3 \Rightarrow \max\limits_{y \in [2;3]} f(y) = f(a) = 2(a-1)(a-2)(a-3)$, что неположительно при всех $a \in [2;3]$;

4) $a > 3 \Rightarrow \max\limits_{y \in [2;3]} f(y) = f(3) = 4a - 12 > 0$, т.е. среди $a > 3$ решений нет.