Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***V–1***

1. Найдите все пары натуральных чисел $x, y \in [1; 8]$, удовлетворяющих равенству
$$\sqrt{xx,xxx\ldots} = y,yyy\ldots$$
(десятичная запись каждого из чисел $xx,xxx\ldots$ и $y,yyy\ldots$ состоит из бесконечного количества одинаковых цифр).

2. Решите уравнение
$$\left|\log_{1/2}(x^2) - 2\right| - \left|\log_2 x + 2\right| = \frac{1}{2}\log_{1/\sqrt{2}} x\,.$$

3. В окружность радиуса 3 вписаны треугольники ABC и AMN. При этом прямая AM проходит через середину E отрезка BC, а прямая BN — через середину F отрезка AC. Найдите периметр треугольника ABC, если $AM : AE = 2 : 1$ и $BN : BF = 17 : 13$.

4. Выясните, сколько корней имеет уравнение
$$\left(21x - 11 + \frac{\sin x}{100}\right) \cdot \sin(6\arcsin x) \cdot \sqrt{(\pi - 6x)(\pi + x)} = 0\,.$$

5. Квадрат со стороной 12 требуется разрезать (полностью) на четыре квадрата с целочисленной стороной a, три квадрата с целочисленной стороной b и десять прямоугольников со сторонами a и b. Найдите все значения a и b, при которых это возможно.

март 2013 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***V–2***

1. Найдите все пары натуральных чисел $x, y \in [1; 8]$, удовлетворяющих равенству
$$\sqrt{xx,xxx\ldots} = y,yyy\ldots$$
(десятичная запись каждого из чисел $xx,xxx\ldots$ и $y,yyy\ldots$ состоит из бесконечного количества одинаковых цифр).

2. Решите уравнение
$$\left|\log_{1/2}(x^2) - 4\right| - 2\left|\log_2(x^2) + 2\right| = \log_{\sqrt{2}} x\,.$$

3. В окружность радиуса 3 вписаны треугольники ABC и AMN. При этом прямая AM проходит через середину E отрезка BC, а прямая BN — через середину F отрезка AC. Найдите периметр треугольника ABC, если $AM : AE = 2 : 1$ и $BN : BF = 17 : 13$.

4. Выясните, сколько корней имеет уравнение
$$\left(21x - 11 + \frac{\sin x}{100}\right) \cdot \sin(6\arcsin x) \cdot \sqrt{(\pi - 6x)(\pi + x)} = 0\,.$$

5. Квадрат со стороной 12 требуется разрезать (полностью) на четыре квадрата с целочисленной стороной a, три квадрата с целочисленной стороной b и десять прямоугольников со сторонами a и b. Найдите все значения a и b, при которых это возможно.

март 2013 г.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробъёвы горы»

Вариант ***V–3***

1. Найдите все пары натуральных чисел $x, y \in [1; 8]$, удовлетворяющих равенству

$$\sqrt{xx,xxx\ldots} = y,yyy\ldots$$

(десятичная запись каждого из чисел $xx,xxx\ldots$ и $y,yyy\ldots$ состоит из бесконечного количества одинаковых цифр).

2. Решите уравнение

$$\left|\log_4 x + 1\right| - \left|\log_{1/2} x - 1\right| = \frac{1}{4}\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x}\,.$$

3. В окружность радиуса 3 вписаны треугольники ABC и AMN. При этом прямая AM проходит через середину E отрезка BC, а прямая BN — через середину F отрезка AC. Найдите периметр треугольника ABC, если $AM : AE = 2 : 1$ и $BN : BF = 17 : 13$.

4. Выясните, сколько корней имеет уравнение

$$\left(21x - 11 + \frac{\sin x}{100}\right)\cdot\sin(6\arcsin x)\cdot\sqrt{(\pi - 6x)(\pi + x)} = 0\,.$$

5. Квадрат со стороной 12 требуется разрезать (полностью) на четыре квадрата с целочисленной стороной a, три квадрата с целочисленной стороной b и десять прямоугольников со сторонами a и b. Найдите все значения a и b, при которых это возможно.

март 2013 г.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробъёвы горы»

Вариант ***V–4***

1. Найдите все пары натуральных чисел $x, y \in [1; 8]$, удовлетворяющих равенству

$$\sqrt{xx,xxx\ldots} = y,yyy\ldots$$

(десятичная запись каждого из чисел $xx,xxx\ldots$ и $y,yyy\ldots$ состоит из бесконечного количества одинаковых цифр).

2. Решите уравнение

$$2\left|\log_{1/2} x - 1\right| - \left|\log_4(x^2) + 2\right| = -\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}} x\,.$$

3. В окружность радиуса 3 вписаны треугольники ABC и AMN. При этом прямая AM проходит через середину E отрезка BC, а прямая BN — через середину F отрезка AC. Найдите периметр треугольника ABC, если $AM : AE = 2 : 1$ и $BN : BF = 17 : 13$.

4. Выясните, сколько корней имеет уравнение

$$\left(21x - 11 + \frac{\sin x}{100}\right)\cdot\sin(6\arcsin x)\cdot\sqrt{(\pi - 6x)(\pi + x)} = 0\,.$$

5. Квадрат со стороной 12 требуется разрезать (полностью) на четыре квадрата с целочисленной стороной a, три квадрата с целочисленной стороной b и десять прямоугольников со сторонами a и b. Найдите все значения a и b, при которых это возможно.

март 2013 г.

Решения комплекта вариантов V–1 — V–4.

Задача 1.

Ответ: $x=1, y=3$ и $x=4, y=6$.

Решение. Так как бесконечная десятичная дробь вида $0,xxx\ldots$ равна $\frac{x}{9}$, то равенство в условии равносильно соотношению

$$11x+\tfrac{x}{9}=(y+\tfrac{y}{9})^2 \iff 9x=y^2,$$

откуда и получается ответ.

Задача 2.

Ответ: $(0;\frac{1}{4}]\cup\{1\}$ (варианты V-1, V-2, V-4), $\{2^{-8/5};1\}$ (вариант V-3).

Решение (вариант V-1). Перепишем уравнение в виде

$$|\log_2 x+2|-2|\log_2 x+1|=\log_2 x$$

и выполним замену $t=\log_2 x$. Решая получающееся уравнение $|t+2|-2|t+1|=t$ методом интервалов, получим $t\in(-\infty;-2]\cup\{0\}$.

Задача 3.

Ответ: $\frac{72}{5}$.

Решение. По теореме о пересекающихся хордах: $AE\cdot EM=BE\cdot EC$. Но так как по условию $AE=EM$ и $BE=EC$, то $AE=BE=CE$, т.е. E – центр описанной около $\triangle ABC$ окружности. Значит, угол A – прямой.

Так как аналогично $AF\cdot FC=BF\cdot FN$ и по условию: $BF=13x$, $FN=4x$, то $AF=FC=2\sqrt{13}x$. Следовательно, из прямоугольного треугольника ABF: $AB^2=BF^2-AF^2=9\cdot 13x^2$, а из треугольника ABC: $9\cdot 13x^2+16\cdot 13x^2=36\Rightarrow x=\frac{6}{5\sqrt{13}}$.

Поэтому периметр равен $7\sqrt{13}x+6=\frac{72}{5}$.

Задача 4.

Ответ: 7 корней.

Решение. 1) $\sqrt{(\pi-6x)(\pi+x)}=0 \iff x=\frac{\pi}{6};-\pi$. Но так как $-\pi<-1$, то для корня $x=-\pi$ не определен $\arcsin x$ и только $x=\frac{\pi}{6}$ является корнем исходного уравнения.

2) $\sin(6\arcsin x)=0 \iff 6\arcsin x=\pi k$, $k=0,\pm1,\pm2,\pm3$. Но так как $x\leqslant\frac{\pi}{6}$, то корнями исходного уравнения будут только следующие числа: $-1,-\frac{\sqrt{3}}{2},\pm\frac{1}{2},0$.

3) Рассмотрим уравнение $\frac{\sin x}{100}=11-21x$. На промежутках $(-\infty;0]$ и $[1;+\infty)$ оно не имеет решений, так как на первом из них: $\frac{\sin x}{100}<1<11-21x$, а на втором: $\frac{\sin x}{100}>-1>11-21x$. На промежутке $(0;1)$ уравнение имеет единственное решение x_0, так как здесь левая часть – возрастающая функция, правая часть – убывающая и, кроме того, при $x=0$: $\frac{\sin x}{100}=0<11=11-21x$, а при $x=\frac{\pi}{6}$: $\frac{\sin x}{100}=\frac{1}{200}>11-3{,}5\cdot 3{,}1415>11-3{,}5\pi=11-21x$ (и соответственно получается, что $x_0<\frac{\pi}{6}$).

Задача 5.

Ответ: $a=2$, $b=4$.

Решение. Необходимым условием существования такого разрезания является равенство площадей: $4a^2+3b^2+10ab=144$. Отсюда получаем, что b четно и, так как $3b^2<144$, число b может быть равно 2, 4 или 6. При $b=2$ имеем: $a(a+5)=33$ и a не целое. При $b=4$ имеем: $a(a+10)=24\Rightarrow a=2$. При $b=6$ имеем: $a(a+15)=9$ и a не целое. Таким образом, остается лишь проверить, что разрезание с параметрами $a=2$, $b=4$ в рассматриваемом квадрате возможно.