**Московский государственный университет**
**имени М. В. Ломоносова**

---

*Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»*

*Вариант* ***II–1***

**1.** Выясните, какое из чисел больше:

$$\frac{\lg 2013}{2\lg 2} \quad \text{или} \quad 2\lg\frac{2013}{2}\,.$$

**2.** Найдите все пары натуральных чисел $x, y$, удовлетворяющие уравнению

$$6x^2y + 2x^2 + 3xy + x - 9y = 2016\,.$$

**3.** Высоты остроугольного треугольника $ABC$ пересекаются в точке $O$. Найдите угол $ACB$, если $AB : OC = 2$.

**4.** Определите, сколько корней на промежутке $[-\pi; \pi]$ имеет уравнение

$$\frac{2\cos 4x + 1}{2\cos x - \sqrt{3}} = \frac{2\sin 4x - \sqrt{3}}{2\sin x - 1}\,,$$

и укажите эти корни.

**5.** Пять рёбер тетраэдра имеют дли́ны 2, 4, 5, 9 и 13. Определите, может ли при этом длина шестого ребра:

а) равняться 11;

б) равняться $11,1$.

*март 2013 г.*

**Московский государственный университет**
**имени М. В. Ломоносова**

---

*Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»*

*Вариант* ***II–2***

**1.** Выясните, какое из чисел больше:

$$\frac{\lg 2011}{2\lg 2} \quad \text{или} \quad 2\lg\frac{2011}{2}\,.$$

**2.** Найдите все пары натуральных чисел $x, y$, удовлетворяющие уравнению

$$6x^2y + 2x^2 + 3xy + x - 9y = 2016\,.$$

**3.** Высоты остроугольного треугольника $ABC$ пересекаются в точке $O$. Найдите угол $ACB$, если $AB : OC = 3$.

**4.** Определите, сколько корней на промежутке $[-\pi; \pi]$ имеет уравнение

$$\frac{2\cos 4x + 1}{2\cos x - \sqrt{3}} = \frac{2\sin 4x - \sqrt{3}}{2\sin x - 1}\,,$$

и укажите эти корни.

**5.** Пять рёбер тетраэдра имеют дли́ны 2, 4, 5, 9 и 13. Определите, может ли при этом длина шестого ребра:

а) равняться 11;

б) равняться $11,1$.

*март 2013 г.*

**Московский государственный университет**
**имени М. В. Ломоносова**

*Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»*

*Вариант **II–3***

**1.** Выясните, какое из чисел больше:

$$\frac{\lg 2015}{2\lg 2} \quad \text{или} \quad 2\lg\frac{2015}{2}\,.$$

**2.** Найдите все пары натуральных чисел $x, y$, удовлетворяющие уравнению

$$6x^2y + 2x^2 + 3xy + x - 9y = 2016\,.$$

**3.** Высоты остроугольного треугольника $ABC$ пересекаются в точке $O$. Найдите угол $ACB$, если $AB : OC = 4$.

**4.** Определите, сколько корней на промежутке $[-\pi; \pi]$ имеет уравнение

$$\frac{2\cos 4x + 1}{2\cos x - \sqrt{3}} = \frac{2\sin 4x - \sqrt{3}}{2\sin x - 1}\,,$$

и укажите эти корни.

**5.** Пять рёбер тетраэдра имеют дли́ны 2, 4, 5, 9 и 13. Определите, может ли при этом длина шестого ребра:

а) равняться 11;

б) равняться $11,1$.

*март 2013 г.*

**Московский государственный университет**
**имени М. В. Ломоносова**

*Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»*

*Вариант **II–4***

**1.** Выясните, какое из чисел больше:

$$\frac{\lg 2017}{2\lg 2} \quad \text{или} \quad 2\lg\frac{2017}{2}\,.$$

**2.** Найдите все пары натуральных чисел $x, y$, удовлетворяющие уравнению

$$6x^2y + 2x^2 + 3xy + x - 9y = 2016\,.$$

**3.** Высоты остроугольного треугольника $ABC$ пересекаются в точке $O$. Найдите угол $ACB$, если $AB : OC = 5$.

**4.** Определите, сколько корней на промежутке $[-\pi; \pi]$ имеет уравнение

$$\frac{2\cos 4x + 1}{2\cos x - \sqrt{3}} = \frac{2\sin 4x - \sqrt{3}}{2\sin x - 1}\,,$$

и укажите эти корни.

**5.** Пять рёбер тетраэдра имеют дли́ны 2, 4, 5, 9 и 13. Определите, может ли при этом длина шестого ребра:

а) равняться 11;

б) равняться $11,1$.

*март 2013 г.*

**Решения комплекта вариантов II–1 — II–4.**

**Задача 1.**

**Ответ:** первое число меньше (во всех вариантах).

**Решение.** Обозначим через $A$ числа 2011, 2013, 2015 или 2017, участвующие в различных вариантах, и сравним предложенные числа: $\dfrac{\lg A}{2\lg 2} \equiv 0{,}5\log_2 A$ и $2\lg(A/2)$.

Так как $2000 < A < 2^{11}$, то $0{,}5\log_2 A < \frac{11}{2} < 6 < 2\lg(A/2)$.

**Задача 2.**

**Ответ:** $x = 4$, $y = 20$.

**Решение.** Раскладывая левую часть уравнения на множители, получим

$$(3y+1)(2x+3)(x-1) = 2013.$$

Так как $2013 = 33\cdot 11\cdot 61$ и число $3y+1$ имеет остаток 1 при делении на 3, то $3y+1 = 61 \iff y = 20$. Так как $2x+3 > x-1$, то $x-1 = 3$; $2x+3 = 11$, т.е. $x = 4$.

**Задача 3.**

**Ответ:** $\operatorname{arctg} 2$ (в варианте II–1); $\operatorname{arctg} 3$ (в варианте II–2); $\operatorname{arctg} 4$ (в варианте II–3); $\operatorname{arctg} 5$ (в варианте II–4).

**Решение.** Пусть $k = AB : OC$. Если $BB_1$ – высота $\triangle ABC$, то $\triangle ABB_1 \sim \triangle COB_1$ (они прямоугольные и $\angle BAB_1 = \angle B_1OC$). Тогда $k = \dfrac{AB}{OC} = \dfrac{BB_1}{B_1C} = \operatorname{tg}\angle ACB$.

**Задача 4.**

**Ответ:** 4 корня: $-5\pi/6$, $-\pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/3$.

**Решение.** Допустимые значения определяются условиями: $\cos x \ne \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin x \ne \frac{1}{2}$, и поэтому на промежутке $[-\pi,\pi]$: $x \ne \pm\frac{\pi}{6}$, $x \ne \frac{5\pi}{6}$.

Перепишем уравнение в виде

$$(2\cos 4x + 1)(2\sin x - 1) = (2\sin 4x - \sqrt{3})(2\cos x - \sqrt{3}) \iff$$
$$\iff 4\sin 3x - 4\sin(x + \tfrac{\pi}{3}) - 4\sin(4x - \tfrac{\pi}{6}) + 4 = 0.$$

Замена $y = x + \frac{\pi}{3}$ приводит к уравнению

$$\sin 3y + \sin y + \cos 4y - 1 = 0 \iff \sin^2 y\cos y(1 - 2\sin y) = 0,$$

откуда $\sin y = 0$ или $\cos y = 0$ или $\sin y = 1/2$. Получим три серии решений: $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Непосредственный отбор дает четыре корня на промежутке $[-\pi,\pi]$: $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$.

**Задача 5.**

**Ответ:** а) нет; б) нет.

**Решение.** Рассмотрим любую грань тетраэдра, ограниченную тремя известными ребрами. Если длина одного из ребер этой грани равна 2, то в силу неравенства треугольника двумя другими ребрами могут быть только ребра длин 4 и 5. Аналогично, если длина одного из ребер этой грани равна 13, то длины двух других ребер равны 5 и 9. Таким образом, у данного тетраэдра две известные грани: одна – треугольник со сторонами $2, 4, 5$, а другая – треугольник со сторонами $5, 9, 13$.

Пусть в тетраэдре $ABCS$: $AB = 5$, $BC = 4$, $AC = 2$. Тогда возможны два случая: $SA = 13$, $SB = 9$ и $SA = 9$, $SB = 13$.

а) Шестое ребро $SC$ не может быть длины 11, так как в обоих случаях невозможен треугольник $SAC$.

б) Если длина ребра $SC$ равна 11,1, то втором случае $SC > SA + AC$, что невозможно, поэтому достаточно рассмотреть конфигурацию первого случая:

- $\triangle ABC$ – тупоугольный ($\angle C > 90^\circ$); его площадь равна $\frac{1}{4}\sqrt{231}$; следовательно, высота $CK$ опущена на сторону $AB$ и ее длина равна $\frac{1}{10}\sqrt{231}$, при этом $AK = 1{,}3$ и $KB = 3{,}7$;

- $\triangle ABS$ – тупоугольный ($\angle B > 90^\circ$); его площадь равна $\frac{9}{4}\sqrt{51}$; следовательно, высота $SH$ опущена на продолжение стороны $AB$ за точку $B$ и ее длина равна $\frac{9}{10}\sqrt{51}$, при этом $BH = 6{,}3$ и $HK = 10$;

- поворачивая грань $SAB$ вокруг ребра $AB$, получим, что длина ребра $SC$ должна удовлетворять двойному неравенству

$$\sqrt{(SH-CK)^2+HK^2} < SC < \sqrt{(SH+CK)^2+HK^2} \iff$$

$$\iff |SC^2 - SH^2 - CK^2 - HK^2| < 2\,SH \cdot CK \iff |SC^2 - 143{,}62| < 0{,}54\sqrt{1309};$$

- если $SC = 11{,}1$, то требуется проверить неравенство $20{,}41 < 0{,}54\sqrt{1309} \iff 37\frac{43}{54} < \sqrt{1309}$; однако $37^2 = 1369$, и потому последнее неравенство неверно.