Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **I–1***

1. Выясните, какое из чисел больше:

$$\log_{2012} 2013 \quad \text{или} \quad \log_{2013} 2014\,.$$

2. Несколько чисел образуют арифметическую прогрессию, причем их сумма равна 63, а первый член в полтора раза больше разности прогрессии. Если все члены прогрессии уменьшить на одну и ту же величину так, чтобы первый член прогрессии был равен разности прогрессии, то сумма всех чисел уменьшится не более, чем на 8, но не менее, чем на 7. Определите, какой может быть разность этой прогрессии.

3. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$\sqrt{\arcsin x} \leqslant \sqrt{\arccos y}\,.$$

4. Кратчайшее расстояние от вершины B треугольника ABC до точек противолежащей стороны равно 12. Найдите стороны AB и BC этого треугольника, если $\sin\angle C = \sqrt{3}/2$ и $AC = 5$.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y| + |y-x| \leqslant a - |x-1|, \\ (y-4)(y+3) \geqslant (4-x)(3+x) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

март 2013 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **I–2***

1. Выясните, какое из чисел больше:

$$\log_{2011} 2012 \quad \text{или} \quad \log_{2012} 2013\,.$$

2. Несколько чисел образуют арифметическую прогрессию, причем их сумма равна 63, а первый член в полтора раза больше разности прогрессии. Если все члены прогрессии уменьшить на одну и ту же величину так, чтобы первый член прогрессии был равен разности прогрессии, то сумма всех чисел уменьшится не более, чем на 8, но не менее, чем на 7. Определите, какой может быть разность этой прогрессии.

3. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$\sqrt{\arcsin x} \leqslant \sqrt{\arccos y}\,.$$

4. Кратчайшее расстояние от вершины B треугольника ABC до точек противолежащей стороны равно 12. Найдите стороны AB и BC этого треугольника, если $\sin\angle C = \sqrt{3}/2$ и $AC = 5$.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y| + |y-x| \leqslant a - |x-1|, \\ (y-4)(y+3) \geqslant (4-x)(3+x) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

март 2013 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **I–3***

1. Выясните, какое из чисел больше:

$$\log_{2013} 2014 \quad \text{или} \quad \log_{2014} 2015\,.$$

2. Несколько чисел образуют арифметическую прогрессию, причем их сумма равна 63, а первый член в полтора раза больше разности прогрессии. Если все члены прогрессии уменьшить на одну и ту же величину так, чтобы первый член прогрессии был равен разности прогрессии, то сумма всех чисел уменьшится не более, чем на 8, но не менее, чем на 7. Определите, какой может быть разность этой прогрессии.

3. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$\sqrt{\arcsin y} \leqslant \sqrt{\arccos x}\,.$$

4. Кратчайшее расстояние от вершины B треугольника ABC до точек противолежащей стороны равно 12. Найдите стороны AB и BC этого треугольника, если $\sin\angle C = \sqrt{3}/2$ и $AC = 5$.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y| + |y - x| \leqslant a - |x - 1|, \\ (y-4)(y+3) \geqslant (4-x)(3+x) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

март 2013 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **I–4***

1. Выясните, какое из чисел больше:

$$\log_{2010} 2011 \quad \text{или} \quad \log_{2011} 2012\,.$$

2. Несколько чисел образуют арифметическую прогрессию, причем их сумма равна 63, а первый член в полтора раза больше разности прогрессии. Если все члены прогрессии уменьшить на одну и ту же величину так, чтобы первый член прогрессии был равен разности прогрессии, то сумма всех чисел уменьшится не более, чем на 8, но не менее, чем на 7. Определите, какой может быть разность этой прогрессии.

3. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$\sqrt{\arcsin y} \leqslant \sqrt{\arccos x}\,.$$

4. Кратчайшее расстояние от вершины B треугольника ABC до точек противолежащей стороны равно 12. Найдите стороны AB и BC этого треугольника, если $\sin\angle C = \sqrt{3}/2$ и $AC = 5$.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y| + |y - x| \leqslant a - |x - 1|, \\ (y-4)(y+3) \geqslant (4-x)(3+x) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

март 2013 г.

Решения комплекта вариантов I–1 — I–4.

Задача 1.

Ответ: первое число больше (во всех вариантах).

Решение. Сравним числа $\log_{k-1} k$ и $\log_k(k+1)$ для всех $k \geqslant 3$. Учтем, что в силу неравенства Коши: $\sqrt{\log_k(k-1)\cdot\log_k(k+1)} < 0,5\log_k(k^2-1) < 1$. Следовательно, $\log_k(k+1) < \log_{k-1} k$.

Задача 2.

Ответ: разность равна 21/8 или 2.

Решение. Пусть числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ образуют арифметическую прогрессию с разностью d. Тогда $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 63$, $a_1 = 3d/2 \Rightarrow 0,5d(n+2)n = 63$.

После описанного в условии изменения эти числа снова будут образовывать арифметическую прогрессию с той же разностью d, но с другим первым членом, равным теперь d. Поэтому их сумма станет равна $0,5d(n+1)n$, и по условию выполнено неравенство $55 \leqslant 0,5d(n+1)n \leqslant 56$. Учитывая первое соотношение, получим

$$\frac{55}{63} \leqslant \frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{56}{63} \iff \frac{47}{8} \leqslant n \leqslant 7.$$

Следовательно, $n = 6$ или $n = 7$, а разность d соответственно равна 21/8 или 2.

Задача 3.

Ответ: $1 + (\pi/4)$ (во всех вариантах).

Решение (для вариантов I–1 и I–2). Область допустимых значений неравенства определяется системой $\begin{cases} \arcsin x \geqslant 0, \\ \arccos y \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -1 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$

Если $-1 \leqslant y \leqslant 0$, то $\arccos y \geqslant \frac{\pi}{2} \geqslant \arccos x$. Следовательно, весь квадрат $\{0 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 0\}$ площади 1 входит в множество решений.

На оставшемся множестве $\{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ справедливы неравенства $0 \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \arccos y \leqslant \frac{\pi}{2}$ и, так как функция $\sin t$ возрастает при $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, получим равносильные неравенства

$$\sin(\arcsin x) \leqslant \sin(\arccos y) \iff x \leqslant \sqrt{1-y^2} \iff x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

Поэтому здесь решением будет четверть единичного круга, площадь которой равна $\frac{\pi}{4}$.

Задача 4.

Ответ: одна сторона равна 12, а другая равна либо $(5+\sqrt{501})/2$, либо $\sqrt{229}$.

Решение. Рассмотрим три возможных случая.

1) Углы A и C острые. Тогда $\angle C = 60^\circ$ и высота BH равна 12. Но в этом случае $CH = 6$ и основание H высоты не может лежать на стороне AC.

2) Угол A тупой, а угол C острый. Тогда $\angle C = 60^\circ$, $AB = 12$ и по теореме косинусов $144 = 25 + BC^2 - 5 \cdot BC \Rightarrow BC = (5+\sqrt{501})/2$.

3) Угол A острый, а угол C тупой. Тогда $\angle C = 120^\circ$, $BC = 12$ и по теореме косинусов $AB^2 = 229$.

Задача 5.

Ответ: при $a = 7$.

Решение. В силу неравенства треугольника:

$$|y| + |y-x| + |x-1| \geqslant |y - (y-x) - (x-1)| = 1,$$

поэтому первое неравенство может иметь решения лишь тогда, когда $a \geqslant 1$. В этом случае оно равносильно системе неравенств

$$-\frac{a-1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{a+1}{2}, \quad -\frac{a-1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a+1}{2}, \quad x - \frac{a+1}{2} \leqslant y \leqslant x + \frac{a-1}{2},$$

которая определяет на координатной плоскости шестиугольник, если $a > 1$, и треугольник, если $a = 1$.

Второе неравенство системы равносильно неравенству $(x-0,5)^2+(y-0,5)^2 \geqslant 49/2$ и потому определяет дополнение до всей плоскости внутренней части круга с центром $(1/2, 1/2)$ радиуса $7/\sqrt{2}$.

Если $a=1$, то система не имеет решений.

Так как при $a>1$ вершины $(-\frac{a-1}{2}, -\frac{a-1}{2})$ и $(\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2})$ бóльшей диагонали шестиугольника являются наиболее удаленными от точки $(1/2, 1/2)$ среди всех точек шестиугольника, то в пересечении рассматриваемых множеств множеств будет ровно две точки тогда и только тогда, когда окружность второго множества проходит через эти вершины. Точка $(1/2, 1/2)$ является серединой бóльшей диагонали, а длина этой диагонали равна $a\sqrt{2}$. Следовательно, $a\sqrt{2}=14/\sqrt{2}$, т.е. $a=7$.