

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы!» по математике

24 марта 2013 года

Вариант 3.

1. Решить неравенство

$$2 + 7^{\log_x 5} \geq (\sqrt{7})^{\log_{\sqrt{x}} 25}.$$

2. Найти все пары вещественных чисел (x, y) , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} (\sqrt{3} - \sqrt{2})^x = 2^{y/3} + 3^{y/3}, \\ \sqrt{-5x^2 - 8xy - 3y^2} = -y - 2x. \end{cases}$$

3. При каких значениях параметра a площадь фигуры, заданной на плоскости (x, y) системой

$$\begin{cases} x^2 - \frac{a}{2}x + y^2 - 2ay \leq 1 - \frac{17a^2}{16}, \\ 16y^2 + 8xy + x^2 \leq \frac{289}{4}a^2 \end{cases}$$

максимальна?

4. Найти наибольшее значение выражения

$$\arcsin(\cos(3x - y + 3)) + 2x - 2y + 3$$

при $0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2$.

5. Гора имеет форму правильной четырехугольной пирамиды с основанием $ABCD$ и вершиной S , причем длина ребра основания равна 13 км, а боковые грани наклонены к основанию под углом β , $\cos \beta = 0,65$. Скорость туриста на ровной поверхности составляет 4 км/ч, а при подъеме или спуске под углом α к горизонту равна $4 \cos^2 \alpha$ км/ч. Может ли турист, находящийся в точке A , успеть на автобус, отходящий ровно через 6 часов 10 минут из точки C , если в середине пути он обязательно делает 10-минутную остановку?

6. Однажды князь Владимир объявил о том, что княжеская казна вновь похищена! В ходе разбирательства выяснилось, что виновен либо Соловей-Разбойник, либо Колыван (но не оба), но князь никак не мог решить, кто именно.

- Соловей-Разбойник не крал казну, — заявил Добрыня Никитич.
- Он ведь уже один раз воровал и ее, и коня богатырского, — возразила Настасья Филипповна.
- Колыван никогда ничего не крал, — сказала Баба Яга.
- Да ведь Баба Яга Колывана всегда защищает! — заявила Аленушка.
- Настасья Филипповна и Баба Яга говорят правду, - сказал Юлий.
- Настасья Филипповна и Аленушка говорят правду, - утверждал Тихон.
- Либо Баба Яга, либо Аленушка говорит правду, а может быть обе они правы, — высказал свое мнение Змей Горыныч.
- Либо Юлий, либо Тихон, либо оба они говорят правду, — сказал Гонец.
- Настасья Филипповна и Змей Горыныч говорят правду, — считала Любава.
- Гонец говорит правду, а Любава не права, — утверждал Алеша Попович.
- У меня от вашей болтовни уже голова болит! — закричал князь Владимир. — Все это ничего не доказывает!
- Погоди, князь, кажется, я догадался, — возразил Илья Муромец. — Дело в том, что я точно знаю, что либо и Добрыня Никитич, и Алеша Попович правы, либо оба ошибаются. Кто же украл казну, если известно, что Илья Муромец всегда говорит только правду и никогда не ошибается?

1. Решить неравенство

$$2 + 7^{\log_x 5} \geq (\sqrt{7})^{\log_{\sqrt{x}} 25}.$$

ОТВЕТ: $x \in (0; 1) \cup [5^{\log_2 7}; +\infty)$.

2. Найти все пары вещественных чисел
- (x, y)
- , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} (\sqrt{3} - \sqrt{2})^x = 2^{y/3} + 3^{y/3}, \\ \sqrt{-5x^2 - 8xy - 3y^2} = -y - 2x. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $x = -1, y = 3/2$.

3. При каких значениях параметра
- a
- площадь фигуры, заданной на плоскости
- (x, y)
- системой

$$\begin{cases} x^2 - \frac{a}{2}x + y^2 - 2ay \leq 1 - \frac{17a^2}{16}, \\ 16y^2 + 8xy + x^2 \leq \frac{289}{4}a^2 \end{cases}$$

максимальна?

ОТВЕТ: $|a| \geq \frac{4}{\sqrt{17}}$.

4. Найти наибольшее значение выражения

$$\arcsin(\cos(3x - y + 3)) + 2x - 2y + 3$$

при $0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2$.

ОТВЕТ: $\frac{11\pi}{6} + 1$.

5. Гора имеет форму правильной четырехугольной пирамиды с основанием $ABCD$ и вершиной S , причем длина ребра основания равна 13 км, а боковые грани наклонены к основанию под углом β , $\cos \beta = 0,65$. Скорость туриста на ровной поверхности составляет 4 км/ч, а при подъеме или спуске под углом α к горизонту равна $4 \cos^2 \alpha$ км/ч. Может ли турист, находящийся в точке A , успеть на автобус, отходящий ровно через 6 часов 10 минут из точки C , если в середине пути он обязательно делает 10-минутную остановку?

ОТВЕТ: МОЖЕТ.

6. Однажды князь Владимир объявил о том, что княжеская казна вновь похищена! В ходе разбирательства выяснилось, что виновен либо Соловей-Разбойник, либо Колыван (но не оба), но князь никак не мог решить, кто именно.

- Соловей-Разбойник не крал казну, — заявил Добрыня Никитич.
- Он ведь уже один раз воровал и ее, и коня богатырского, — возразила Настасья Филипповна.
- Колыван никогда ничего не крал, — сказала Баба Яга.
- Да ведь Баба Яга Колывана всегда защищает! — заявила Аленушка.
- Настасья Филипповна и Баба Яга говорят правду, - сказал Юлий.
- Настасья Филипповна и Аленушка говорят правду, - утверждал Тихон.
- Либо Баба Яга, либо Аленушка говорит правду, а может быть обе они правы, — высказал свое мнение Змей Горыныч.
- Либо Юлий, либо Тихон, либо оба они говорят правду, — сказал Гонец.
- Настасья Филипповна и Змей Горыныч говорят правду, — считала Любава.
- Гонец говорит правду, а Любава не права, — утверждал Алеша Попович.
- У меня от вашей болтовни уже голова болит! — закричал князь Владимир. — Все это ничего не доказывает!
- Погоди, князь, кажется, я догадался, — возразил Илья Муромец. — Дело в том, что я точно знаю, что либо и Добрыня Никитич, и Алеша Попович правы, либо оба ошибаются. Кто же украл казну, если известно, что Илья Муромец всегда говорит только правду и никогда не ошибается?

ОТВЕТ: СОЛОВЕЙ-РАЗБОЙНИК.