

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы!» по математике

24 марта 2013 года

Вариант 2.

1. Решить неравенство

$$5^{\log_x 3} + (\sqrt{5})^{\log_{\sqrt{x}} 9} \leq 6.$$

2. Найти все пары вещественных чисел (x, y) , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} (\sqrt{5} - 2)^x = 4^{-y} + 5^{-y}, \\ \sqrt{3x^2 - 8xy + 5y^2} = 3y - 2x. \end{cases}$$

3. При каких значениях параметра a площадь фигуры, заданной на плоскости (x, y) системой

$$\begin{cases} x^2 - ax + y^2 - \frac{2}{3}ay \leq 1 - \frac{13a^2}{36}, \\ 4y^2 + 12xy + 9x^2 \leq \frac{169}{9}a^2 \end{cases}$$

максимальна?

4. Найти наименьшее значение выражения

$$\arccos(\sin(3x - 2y + 1)) - x - y + \frac{5}{2}$$

при $0 \leq x \leq \pi/3, 0 \leq y \leq \pi/2$.

5. Гора имеет форму правильной четырехугольной пирамиды с основанием $ABCD$ и вершиной S , причем длина ребра основания равна 13 км, а боковые грани наклонены к основанию под углом β , $\cos \beta = 0,7$. Скорость туриста на ровной поверхности составляет 4 км/ч, а при подъеме или спуске под углом α к горизонту равна $4 \cos^2 \alpha$ км/ч. Может ли турист, находящийся в точке A , успеть на автобус, отходящий ровно через 6 часов из точки C , если в середине пути он обязательно делает 6-минутную остановку?

6. На день своего рождения Мила слепила рекордное число куличиков, а на следующее утро все они оказались разрушенными! В ходе разбирательства выяснилось, что виновен либо Вупсень, либо Пупсень (но не оба), но кто именно из них двоих — непонятно.

- Вупсень не портил куличики, — заявил Пчеленок.

- Зато он часто портил другие вещи, — возразила Баба Капа.

- Пупсень никогда ничего не ломал, — сказал Лунтик.

- А вот Лунтик каждый день что-нибудь ломает, — заявила Пиявка.

- Баба Капа и Лунтик говорят правду, — сказал Пескарь Иванович.

- Баба Капа и Пиявка говорят правду, — утверждал Паук Шнюк.

- Либо Лунтик, либо Пиявка говорит правду, а может быть, они оба правы, — высказал свое мнение Рак Чикибряк.

- Либо Пескарь Иванович, либо Паук Шнюк, либо они оба говорят правду, — сказал Корней Корнеевич.

- Баба Капа и Рак Чикибряк говорят правду, — решительно заявил Кузя.

- Корней Корнеевич говорит правду, а Кузя не прав, — считала сама Мила.

- Я ничего не могу понять! — закричала Тетя Мотя. — В этой болтовне нет никакого смысла!

- Кое-какой смысл в этом все же есть. — возразил Генерал Шер. — Я точно знаю, что либо и Пчеленок, и Мила правы, либо оба ошибаются.

Кто же сломал куличики, если известно, что Генерал Шер всегда говорит только правду и никогда не ошибается?

Вариант 2. Ответы

1. Решить неравенство

$$5^{\log_x 3} + (\sqrt{5})^{\log_{\sqrt{x}} 9} \leq 6.$$

ОТВЕТ: $x \in (0; 1) \cup [3^{\log_2 5}; +\infty)$.

2. Найти все пары вещественных чисел (x, y) , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} (\sqrt{5} - 2)^x = 4^{-y} + 5^{-y}, \\ \sqrt{3x^2 - 8xy + 5y^2} = 3y - 2x. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $x = -1, y = -1/2$.

3. При каких значениях параметра a площадь фигуры, заданной на плоскости (x, y) системой

$$\begin{cases} x^2 - ax + y^2 - \frac{2}{3}ay \leq 1 - \frac{13a^2}{36}, \\ 4y^2 + 12xy + 9x^2 \leq \frac{169}{9}a^2 \end{cases}$$

максимальна?

ОТВЕТ: $|a| \geq \frac{6}{\sqrt{13}}$.

4. Найти наименьшее значение выражения

$$\arccos(\sin(3x - 2y + 1)) - x - y + \frac{5}{2}$$

при $0 \leq x \leq \pi/3, 0 \leq y \leq \pi/2$.

ОТВЕТ: $2 - \frac{7\pi}{12}$.

5. Гора имеет форму правильной четырехугольной пирамиды с основанием $ABCD$ и вершиной S , причем длина ребра основания равна 13 км, а боковые грани наклонены к основанию под углом β , $\cos \beta = 0,7$. Скорость туриста на ровной поверхности составляет 4 км/ч, а при подъеме или спуске под углом α к горизонту равна $4 \cos^2 \alpha$ км/ч. Может ли турист, находящийся в точке A , успеть на автобус, отходящий ровно через 6 часов из точки C , если в середине пути он обязательно делает 6-минутную остановку?

ОТВЕТ: МОЖЕТ.

6. На день своего рождения Мила слепила рекордное число куличиков, а на следующее утро все они оказались разрушенными! В ходе разбирательства выяснилось, что виновен либо Вупсень, либо Пупсень (но не оба), но кто именно из них двоих — непонятно.

- Вупсень не портил куличики, — заявил Пчеленок.

- Зато он часто портил другие вещи, — возразила Баба Капа.

- Пупсень никогда ничего не ломал, — сказал Лунтик.

- А вот Лунтик каждый день что-нибудь ломает, — заявила Пиявка.

- Баба Капа и Лунтик говорят правду, — сказал Пескарь Иванович.

- Баба Капа и Пиявка говорят правду, — утверждал Паук Шнюк.

- Либо Лунтик, либо Пиявка говорит правду, а может быть, они оба правы, — высказал свое мнение Рак Чикибряк.

- Либо Пескарь Иванович, либо Паук Шнюк, либо они оба говорят правду, — сказал Корней Корнеевич.

- Баба Капа и Рак Чикибряк говорят правду, — решительно заявил Кузя.

- Корней Корнеевич говорит правду, а Кузя не прав, — считала сама Мила.

- Я ничего не могу понять! — закричала Тетя Мотя. — В этой болтовне нет никакого смысла!

- Кое-какой смысл в этом все же есть. — возразил Генерал Шер. — Я точно знаю, что либо и Пчеленок, и Мила правы, либо оба ошибаются.

Кто же сломал куличики, если известно, что Генерал Шер всегда говорит только правду и никогда не ошибается?

ОТВЕТ: ВУПСЕНЬ.