

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы!» по математике

24 марта 2013 года

Вариант 1.

1. Решить неравенство

$$3 + 2 \cdot 4^{\log_x 7} - 2^{\log_{\sqrt{x}} 49} \geq 0.$$

2. Найти все пары вещественных чисел (x, y) , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} (2 - \sqrt{3})^x = 3^y + 4^y, \\ \sqrt{-x^2 - 3xy - y^2} = 2y + \frac{x}{2}. \end{cases}$$

3. При каких значениях параметра a площадь фигуры, заданной на плоскости (x, y) системой

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax - ay \leq 1 - \frac{5a^2}{4}, \\ y^2 + 4xy + 4x^2 \leq 25a^2 \end{cases}$$

максимальна?

4. Найти наибольшее значение выражения

$$2 \arccos(\sin(x - 2y - 1)) + x - y + 2$$

при $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi/2$.

5. Гора имеет форму правильной четырехугольной пирамиды с основанием $ABCD$ и вершиной S , причем длина ребра основания равна 13 км, а боковые грани наклонены к основанию под углом β , $\cos \beta = 0,6$. Скорость туриста на ровной поверхности составляет 4 км/ч, а при подъеме или спуске под углом α к горизонту равна $4 \cos^2 \alpha$ км/ч. Может ли турист, находящийся в точке A , успеть на автобус, отходящий ровно через 6 часов 15 минут из точки C , если в середине пути он обязательно делает 9-минутную остановку?

6. В один прекрасный день Цветочный город был взбудоражен известием: кто-то выпил все запасы арбузного сока! В ходе разбирательства выяснилось, что виновен либо Пончик, либо Сиропчик (но не оба), но коротышки никак не могли решить, кто именно из двоих.

- Сок выпил Пончик, — заявила Кнопочка.

- А однажды он целую ракету украл, — поддержала ее Звездочка.

- Сиропчик никогда ничего не крал, — сказал Растеряйка.

- А ты, Растеряйка, каждый день теряешь вещи! — заявила Мушка.

- Звездочка и Растеряйка говорят правду, — сказал Гунька.

- Звездочка и Мушка говорят правду, — утверждал Торопыжка.

- Либо Растеряйка, либо Мушка говорит правду, а может они оба правы, — высказал свое мнение Авоська.

- Либо Гунька, либо Торопыжка, либо оба они говорят правду, — сказал Небоська.

- Звездочка и Авоська говорят правду, — считал Пачкуля Пестренький.

- Небоська говорит правду, а Пестренький врет, — утверждал Незнайка.

- Я ничего не могу понять! — закричал Цветик. — Во всех этих словах нет никакого смысла!

- И все-таки кое-какие выводы из этих слов можно сделать, — возразил Знайка. — Я точно знаю, что либо и Незнайка, и Кнопочка правы, либо оба ошибаются.

Кто же выпил арбузный сок, если известно, что Знайка всегда говорит только правду и никогда не ошибается?

Вариант 1. Ответы

1. Решить неравенство

$$3 + 2 \cdot 4^{\log_x 7} - 2^{\log_{\sqrt{x}} 49} \geq 0.$$

ОТВЕТ: $x \in (0; 1) \cup [7^{\log_3 4}; +\infty)$.

2. Найти все пары вещественных чисел (x, y) , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} (2 - \sqrt{3})^x = 3^y + 4^y, \\ \sqrt{-x^2 - 3xy - y^2} = 2y + \frac{x}{2}. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $x = -1, y = 1/2$.

3. При каких значениях параметра a площадь фигуры, заданной на плоскости (x, y) системой

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax - ay \leq 1 - \frac{5a^2}{4}, \\ y^2 + 4xy + 4x^2 \leq 25a^2 \end{cases}$$

максимальна?

ОТВЕТ: $|a| \geq \frac{2}{\sqrt{5}}$.

4. Найти наибольшее значение выражения

$$2 \arccos(\sin(x - 2y - 1)) + x - y + 2$$

при $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi/2$.

ОТВЕТ: $2\pi + 3$.

5. Гора имеет форму правильной четырехугольной пирамиды с основанием $ABCD$ и вершиной S , причем длина ребра основания равна 13 км, а боковые грани наклонены к основанию под углом β , $\cos \beta = 0,6$. Скорость туриста на ровной поверхности составляет 4 км/ч, а при подъеме или спуске под углом α к горизонту равна $4 \cos^2 \alpha$ км/ч. Может ли турист, находящийся в точке A , успеть на автобус, отходящий ровно через 6 часов 15 минут из точки C , если в середине пути он обязательно делает 9-минутную остановку?

ОТВЕТ: МОЖЕТ.

6. В один прекрасный день Цветочный город был взбудоражен известием: кто-то выпил все запасы арбузного сока! В ходе разбирательства выяснилось, что виновен либо Пончик, либо Сиропчик (но не оба), но коротышки никак не могли решить, кто именно из двоих.

- Сок выпил Пончик, — заявила Кнопочка.

- А однажды он целую ракету украл, — поддержала ее Звездочка.

- Сиропчик никогда ничего не крал, — сказал Растеряйка.

- А ты, Растеряйка, каждый день теряешь вещи! — заявила Мушка.

- Звездочка и Растеряйка говорят правду, — сказал Гунька.

- Звездочка и Мушка говорят правду, — утверждал Торопыжка.

- Либо Растеряйка, либо Мушка говорит правду, а может они оба правы, — высказал свое мнение Авоська.

- Либо Гунька, либо Торопыжка, либо оба они говорят правду, — сказал Небоська.

- Звездочка и Авоська говорят правду, — считал Пачкуля Пестренький.

- Небоська говорит правду, а Пестренький врет, — утверждал Незнайка.

- Я ничего не могу понять! — закричал Цветик. — Во всех этих словах нет никакого смысла!

- И все-таки кое-какие выводы из этих слов можно сделать, — возразил Знайка. — Я точно знаю, что либо и Незнайка, и Кнопочка правы, либо оба ошибаются.

Кто же выпил арбузный сок, если известно, что Знайка всегда говорит только правду и никогда не ошибается?

ОТВЕТ: СИРОПЧИК.