0 695450 280005

69-54-50-28
(119.1)

Работа сдана досрочно
13:19

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ____________________

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ПВГ
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Шекеры Артёма Борисовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

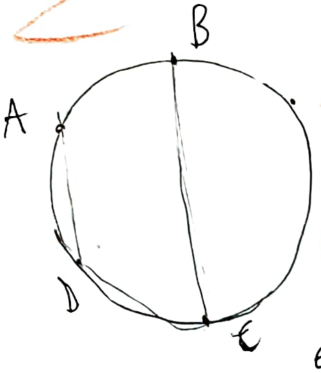
Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
69-54-50-28	119	14	21	21	21	21	21	X	X

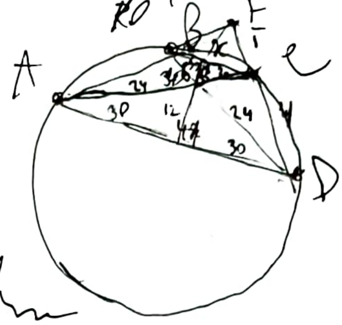
Оценка 95 баллов

95 (девяносто пять)

69-54-50-28
(119.1)

Черновик. Лист 1 из 2.





$S_{ABCD} = S_{AED} - S_{BEC}$

$= S_{AED} - \frac{1}{25} S_{AED} = \frac{24}{25} S_{AED}$

$S_{ABCD} = \frac{24\sqrt{3} + 6\sqrt{3}}{2} \cdot 15$

если $p, q \neq 2$ $\quad p^{q-н} \cdot q^{p-н}$

$15^2\sqrt{3} = \frac{24}{25}$

$p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}$ $\quad p^q - q^p + 3 - ч.$

$p^2 - \cancel{2}^p + 3 = 2^{p-1}$ $\quad p^2 + 3 = \cancel{2^p} \; 3 \cdot 2^{p-1} \Rightarrow p \vdots 3$

$2^3 - 3^2 + 3 = 2$ $\quad 2^q - q^2 + 3 = 2$ $\quad q^2 - 3 = \cancel{2 \cdot (2^{q-1} - 1)}$ $2^q - 2$

$3^2 - 2^3 + 3 = 2^2$ $\quad 2^q = q^2 - 1$

$2^q = (q-1)(q+1)$

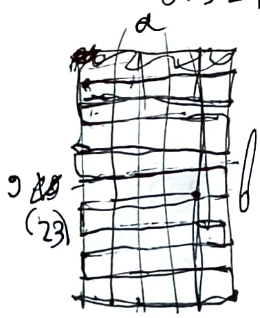
$8 - 9 + 3 = 2$

$9 - 8 + 3 = 4$

1 V
2 V
3 V
4 V
5
6

$23 \cdot 10$

230 п.



ф. п п

$b(a-1) + ab - 1 = ab - b + b - 1 = ab - 1$

н. → н. (кол-во − (н−1))

вместе → п. (кол-во) − 10)

$5н = н - x + 100$

$4н = 100$ $\quad н = 25$

$b_n \cdot b_{n-2}^3 = b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3$

$b_n = \frac{b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3}{b_{n-2}^3}$

$b_5 = \frac{1 \cdot 16^3}{2^3} = 8^3 = 512$

$b_4 = \frac{2 \cdot 2^3}{1^3} = 16$

2 1 2 16 512

$2 \quad 2^0 \quad 2^1 \quad 2^4 \quad 2^9 \quad 2^{16}$

1 2 3 4 5 6

$2^{x^2} \quad 2^{(x+1)^2} \quad 2^{(x+2)^2}$

$b_{next} = \frac{2^{3(x+2)^2} \cdot 2^{x^2}}{2^{3(x+1)^2}} = 2^{3x^2 + 12x + 12 + x^2 - 3x^2 - 6x - 3} = 2^{x^2 + 6x + 9}$

Черновик. Лист 2 из 2.

~~покодую~~ ~~вероятн~~ ~~груп~~

н 1 един. — н, к, и, б, ь, ё, г — 7

о 5 ~~после их выч. нач. г~~

к 1

р 3 двой. — в, ы — 2

и 1 тр. — р — 1

в 2 пят. — о — 1

б 1

ь 1

ё 1

ы 2

г 1

букв.	1	2	3	5
кол-во	7	2	1	1

1 код — 5

1 2 3

7 2 1

8 2 1

23 10 23·10

неч. 1 = 7

1111 22

неч.

если 2 × 2, ост. — 1

$a\cdot(b-1)+b(a-1)$

$2ab-a-b$

$ab-1$

$ab-a-b+1$

то

$(a-1)(b-1)$

$(2ab-a-b)-(ab-1)=ab-a-b+1=(a-1)(b-1)=22\cdot 9$

$23 \times 9 = 207$, $207 + 229 = 427$

$427 - 198 = 229$

$22 \times 9 = 198$

1 2 3 5

7 2 1 1

1111111 2235

122335

1 3 5

135 I

123

133

135 I

134 II

123 I

124

134

123 III

69-54-50-28
(119.1)

Чистовик. Лист 1 из 4

№1.

$p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}$

1) $p \neq 2,\ q \neq 2$

p^q – неч., q^p – неч., 2^{p-1} $(p>1)$ – чёт. $\Rightarrow$ неч.-неч.+неч.=чёт.

$\Rightarrow$ противоречие

2) $p=2;\ q\neq 2$

$2^q - q^2 + 3 = 2$

$2^q = q^2 - 1$

$2^q = (q-1)(q+1) \Rightarrow q-1 = 2^k,\ q+1 = 2^m \Rightarrow 2^m - 2^k = 2 \Rightarrow m=2,\ k=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow q = 3 \Rightarrow$ пара $(p=2, q=3)$

3) $p\neq 2,\ q=2$

$p^2 - 2^p + 3 = 2^{p-1}$

$p^2 = 3\cdot(2^{p-1}-1) \Rightarrow p^2 \vdots 3 \Rightarrow p=3 \Rightarrow$ пара $(p=3, q=2)$

4) $p=2,\ q=2$

$4-4+3=2$

×

Ответ: $(2;3), (3;2)$

№2.

Ответ: 198

Оценка:

Представим дорожную систему как граф, где вершины – перекрёстки, а участки – рёбра. Тогда, перекрёстков $23\cdot 10 = 230$, а участков (рёбер) – $23\cdot 9 + 10\cdot 22 = 427$. Заметим, что из условия после удаления некоторого количества рёбер граф остался связным. Однако, в связном графе

Чистовик. Лист 2 из 4

на n вершинах обязательно есть хотя бы $n-1$ ребро, значит остались действовать хотя бы 229 участков, значит максимум 198 можно ремонтировать одновременно

Пример:

Можно оставить работать участки змейкой, как показано на рисунке (жирным выделены работающие). Их будет $9 \cdot 23 + (23-1) = 10 \cdot 23 - 1 = 229 \Rightarrow$ ремонтироваться будут 198. Достижимость очевидна

№3.

Пусть всего было n непустых пакетов. Тогда: Посчитаем кол-во ~~вложенных~~ пакетов, вложенных в непустые (на 1-ом уровне). С одной стороны, это $5n$, так как в каждый непустой вложено 5 других, а с другой, все пакеты, кроме 1-ого вложены в ровно 1 другой, значит это кол-во $-101 + n - 1 = n + 100$. Получаем,

$5n = n + 100$

$n = 25$

Ответ: 126

№4.

$\cancel{b_n - b_{n-2}}$ $b_n \cdot b_{n-2}^3 = b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3$

$b_n = \dfrac{b_{n-1}^3 \cdot b_{n-3}}{b_{n-2}^3}$

$b_4 = \dfrac{2^3 \cdot 2}{1^3} = 16.$

Докажем по индукции, что b_n $(n \geq 2) = 2^{(n-2)^2}$. База – $n = 2, 3, 4$

$b_2 = 2^{0^2}$, $b_3 = 2^{1^2}$, $b_4 = 2^{2^2}$.

Шаг:

Пусть ~~к~~ для $k-1, k, k+1$ — выполняется. Докажем для $k+2$

$$b_{k+2} = \frac{b_{k+1}^3 \cdot b_{k-1}}{\cancel{b_{k+2}^3}\, b_k^3} = \frac{2^{3(k-1)^2} \cdot 2^{(k-3)^2}}{2^{3(k-2)^2}} = 2^{3k^2-6k+3+k^2-6k+9-3k^2-12k-12} = 2^{k^2}$$

Значит, $b_n = 2^{(n-2)^2}$ для любого $n \geq 2$, а значит $b_{2023} = 2^{2021^2}$

№5.

Формализуем игру: есть 7 кучек по 1 букве, 2 по 2, 1 по 3 и 1 по 5. За ход разрешается убрать из одной кучки любое кол-во букв (не 0). Кто не может сделать ход — проигрывает.

Выигрышная стратегия (1 игрок):

Сначала отложим в сторону 6 кучек по 1 и 2 по 2.

~~Пусть 1-ый игрок не бу~~ Их можно разбить на пары с одинаковым кол-вом букв в кучках одной пары.

Пусть 1-ый игрок не будет ~~играть~~ делать ход на этих кучках первым, а если 2-ой игрок сделает какой-то ход с одной из этих кучек — 1-ый отвечает аналогичным ходом на ~~кучке~~ парной кучке.

Рассмотрим остальные кучки: 1, 3 и 5 букв. Заметим, что если 1-ый игрок сможет выиграть первоначальную игру на этих кучках, значит и всю игру тоже. Докажем, что он может ~~у~~ гарантировать победу:

Первым ходом убираем 3 буквы из кучки с 5.

Остаётся: 1, 2, 3.

Заметим, что если после нашего хода остаётся 2 одинаковые кучки, то мы выигрываем (симметричная стратегия), значит:

Если соперник убирает все буквы одной кучки, мы

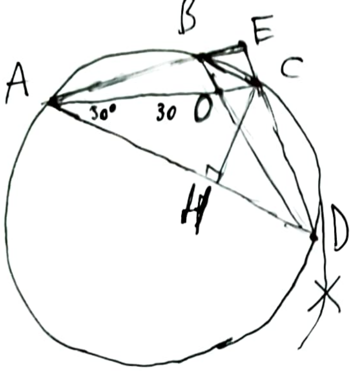
Чистовик. лист 4 из 4

сравниваем с оставшемся и побеждаем.
Иначе, он сравняет с какие-то кучки, тогда 3-10 убираем и побеждаем.

$\Rightarrow$ ~~А~~ 1-ый игрок (Алиса) побеждает

Ответ: да, у Алисы

№6.



$AD \parallel BC$, $ABCD$ - впис. $\Rightarrow ABCD$ - р/б трапеция $\Rightarrow \angle CAD = \angle BDA = \frac{\smile AB}{2} = 30°$

Проведём CH (высота), тогда $CH = AC \sin 30 = \frac{AC}{2} = 15$.

$AC \cap BD = \cancel{\ }O$, $\angle AOD = \angle BOC = 120°$. $\triangle BOC \sim \triangle DOA$, $\frac{BC}{DA} = 4 \Leftrightarrow \frac{AO}{OC} = 4 \Rightarrow$

$OC + 4OC = 30 \Rightarrow OC = 6$, $AD = 24 \Rightarrow BC = \sqrt{BO^2 + OC^2 - 2 \cdot BO \cdot OC \cos 120} =$

$= \sqrt{BO^2 + BO^2 + BO^2} = BO\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ ~~(BO = OC)~~ ($BO = OC$ из р/б);

$\Rightarrow AD = 4BC = 24\sqrt{3} \Rightarrow \cancel{SA}\ S_{ABCD} = \frac{(6+24)\sqrt{3}}{2} \cdot 15 = 225\sqrt{3}$.

$\cancel{S_{AED} = S}$ $S_{ABCD} = S_{AED} - S_{BEC}$ $(\triangle AED \sim \triangle BEC, \frac{BC}{AD} = \frac{1}{4}) = S_{AED} - \frac{1}{16} S_{AED}$

$= \frac{15}{16} S_{AED} = 225\sqrt{3} \Rightarrow S_{AED} = 240\sqrt{3}$

Ответ: $240\sqrt{3}$